

ATTI

22-23

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIV

1957

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXII


(1° semestre 1957)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1957



Digitized by the Internet Archive  
in 2024



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 gennaio 1957

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

## NOTE DI SOCI

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili.*

Nota I (\*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

È noto che, in un qualunque solido iperstatico, soggetto ad un sistema qualunque di forze esterne, *i valori delle tensioni interne*  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$  *che caratterizzano lo stato di equilibrio sono quelli che rendono minima la espressione*

$$\int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \bar{\varepsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

*per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colle deformazioni impresse  $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_z, \bar{\gamma}_{yz}, \bar{\gamma}_{zx}, \bar{\gamma}_{xy}$  e colle forze esterne date.*

L'equazione in cui questo teorema si traduce

$$\int_V [(\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x) \delta \sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y) \delta \sigma_y + (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \delta \sigma_z + (\gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz}) \delta \tau_{yz} + (\gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx}) \delta \tau_{zx} + (\gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}) \delta \tau_{xy}] dV = 0$$

deve naturalmente essere verificata qualunque siano le variazioni  $\delta \sigma_x, \delta \sigma_y, \delta \sigma_z, \delta \tau_{yz}, \delta \tau_{zx}, \delta \tau_{xy}$  che si immaginano attribuite alle tensioni interne, *purché piccolissime e compatibili colle forze esterne date.* Il che equivale a dire che quelle variazioni debbono costituire un sistema di tensioni in equilibrio per forze esterne tutte nulle.

(\*) Presentata nella seduta del 12 gennaio 1957.

Ciò premesso, consideriamo una parete sottile - o membrana - di forma affatto qualunque.

Sia  $S$  la superficie media della membrana ed  $e$  il suo spessore (eventualmente variabile con continuità da punto a punto di essa) che supporremo sempre piccolissimo rispetto alle dimensioni della membrana.

In queste condizioni le forze esterne possono essere trattate come se fossero delle forze superficiali applicate direttamente alla superficie media  $S$ ; quanto alle tensioni interne, si possono sempre supporre uniformemente distribuite sullo spessore (piccolissimo) della membrana, ed ovunque parallele al piano tangente.

Ciò equivale a dire che, se  $M$  è un punto qualunque della superficie  $S$  ed  $x$  ed  $y$  sono due assi ortogonali situati sul piano tangente (che potrebbero essere per esempio le tangenti alle due linee di curvatura passanti per  $M$ ) in ciascun punto dell'asse  $z$ , normale ai precedenti, si avrà

$$\sigma_z = 0 \quad , \quad \tau_{yz} = 0 \quad , \quad \tau_{zx} = 0$$

$$\sigma_x \quad , \quad \sigma_y \quad , \quad \tau_{xy} \text{ indipendenti da } z.$$

Si può quindi limitarsi a considerare, in ciascun punto di  $S$ , le tre componenti della tensione

$$\mathfrak{T}_x = \sigma_x \cdot e \quad \mathfrak{T}_y = \sigma_y \cdot e \quad \mathfrak{T}_{xy} = \tau_{xy} \cdot e$$

tra le quali, nell'ipotesi dell'equilibrio, si possono sempre scrivere certe equazioni differenziali indefinite la cui integrazione, *quando è possibile*, implica l'introduzione di funzioni arbitrarie (determinabili, in ciascun caso concreto, colle equazioni ai limiti).

Se ne deve concludere che un siffatto sistema è, generalmente, iperstatico, e che la scelta di quella tra le infinite soluzioni staticamente equilibrate che verrà effettivamente realizzata - in quanto congruente e compatibile coi vincoli - deve potersi fare coll'ausilio del teorema generale sopra ricordato.

Il quale, a differenza del classico ricorso alle equazioni indefinite ed ai limiti, ci consentirà di tenere conto della influenza che, su la determinazione della configurazione risolvante hanno le deformazioni impresse in cui notoriamente si traducono tutti quei fattori, estranei alla teoria classica dell'elasticità, ma che hanno in realtà una importanza fondamentale: e che sono dovuti a fenomeni termici o di ritiro, a precompressioni od a cedimenti plastici dei materiali.

A tal fine giova supporre:

1° che si possano riferire i singoli stati di tensione in equilibrio colle forze esterne date, ai singoli sistemi di valori di  $k$  parametri indipendenti (incognite iperstatiche) biunivocamente e linearmente, cioè in modo tale che le componenti speciali di tensione si possano tutte esprimere come funzioni lineari di quei  $k$  parametri;



2° che si possa caratterizzare la deformazione impressa per mezzo di un certo numero  $h \leq k$  di altri parametri indipendenti (caratteristiche dello stato di coazione) biunivocamente e linearmente, cioè in modo tale che le componenti della deformazione impressa si possano tutte esprimere come funzioni lineari di quegli  $h$  parametri.

In questa duplice ipotesi le  $k$  equazioni in cui ovviamente si scinde l'ipotesa condizione di minimo risulteranno lineari e non omogenee tra i  $k$  parametri dello stato di tensione e gli  $h$  parametri della deformazione impressa.

Esse potranno quindi, generalmente, venire utilizzate per determinare  $k$  qualsiasi tra quei  $k + h$  parametri in funzione dei rimanenti; o addirittura per determinarli tutti quanti, se avviene che tra essi si possano ulteriormente stabilire  $k$  altre relazioni lineari.

In pratica vi sono tre categorie di problemi la cui soluzione viene così ad essere determinata; e sono:

1° quelli in cui le deformazioni impressesono, o si suppongono, note (problema fondamentale della teoria delle coazioni); le dette equazioni possono allora venire senz'altro impiegate per la determinazione delle  $k$  incognite iperstatiche;

2° quelli in cui le deformazioni impressesono incognite, ma in compenso vengono ad esser noti i valori di  $h$  delle incognite iperstatiche; le stesse equazioni serviranno allora a determinare, oltre alle  $k - h$  incognite iperstatiche rimanenti, gli  $h$  parametri della deformazione impressa;

3° quelli in cui le deformazioni impressesono incognite, ma sono note  $h$  relazioni (lineari o riducibili a tali in via di prima approssimazione) che le legano alle incognite iperstatiche; le  $k$  equazioni di cui sopra, unitamente a queste  $h$  relazioni, potranno allora venire utilizzate per determinare le  $k + h$  incognite del problema.

Se così stanno le cose, non è più necessario affrontare la risoluzione del sistema di equazioni differenziali in cui si compendiano le condizioni dell'equilibrio; risoluzione che, anche nei pochi casi in cui è possibile, non ci potrà mai dare altro che la configurazione di equilibrio corrispondente all'ipotesi della perfetta elasticità.

Il problema che conviene invece affrontare è quello di una oculata scelta delle incognite iperstatiche e della conseguente risoluzione di un semplice sistema di equazioni lineari i cui coefficienti e termini noti — *se la scelta delle incognite è stata ben fatta* — si possono calcolare più facilmente o anche trovare sperimentalmente operando su opportuni modelli.

Non è d'altronde neppure da escludersi che — in certi casi particolari, e per particolari scelte delle incognite iperstatiche — taluni coefficienti si annullino, e che le equazioni divengano per conseguenza indipendenti ed immediatamente risolvibili.

È pertanto prevedibile che, in una eventuale teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili, i teoremi su gli stati di coazione trovino un nuovo campo di utili ed importanti applicazioni.



**Astronomia.** — *Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due.* Nota <sup>(\*)</sup> III del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

Si è visto nella Nota II sul problema qui trattato che, quando si scelga pel riferimento immediato delle posizioni stellari un triedro mobile  $T_i$  con l'origine nel centro del Sole e opportunamente collegato (in maniera innanzi precisata) a determinate stelle, esiste una relazione — mai prima ravvisata — che lega, in qualsiasi tempo  $t$ , le componenti  $p, q, r$  della rotazione istantanea del detto triedro e le derivate prime di queste rispetto al tempo ai coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$  della direzione  $S\Sigma$  di una stella generica  $\Sigma$  e alle derivate temporali prime e seconde  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}; \ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$  di  $\alpha, \beta, \gamma$ . La relazione stessa include anche gli elementi di una matrice simmetrica che caratterizza il potenziale galattico nell'intorno del Sole.

La detta equazione, da cui dipende la determinazione diretta della rotazione assoluta di  $T_i$  senza la cui conoscenza non è possibile pensare ad una deduzione rigorosa delle velocità stellari, dà luogo, quando vi si introducano dati di osservazione relativi a stelle dell'accennato gruppo della Galassia, ad un sistema della cui risoluzione si tratterà qui più oltre con conclusioni definitive. Ricordo intanto che le incognite del sistema sono in numero di dodici e possono essere scelte in due maniere diverse, avendo i due gruppi tre incognite comuni (cioè le  $p, q, r$ ) e sussistendo, fra le rimanenti, *nove* relazioni, riportate nella Nota II.

È ora molto importante il rilevare — e ciò faremo in primo luogo — come, ottenuta la risoluzione del sistema anzidetto, si renda possibile la determinazione, con procedimento non meno rigoroso, delle distanze dal Sole di tutte quelle stelle dell'intorno per le quali si disponga di dati di osservazione analoghi a quelli già utilizzati per la formazione del sistema di cui sopra. Occorre a tale scopo ricordare che l'equazione fondamentale, indicata con (9) nella Nota II, esprime anche la condizione necessaria e sufficiente perché le tre equazioni lineari e omogenee alle quali conduce la (7) della Nota medesima ammettano soluzioni con valori non tutti nulli delle  $\rho, \dot{\rho}, \ddot{\rho}$ , ciò che la natura del problema evidentemente richiede. Converrà riscrivere qui la (9) suddetta, con lo scambio, nel determinante, fra linee e colonne, dopo di che gli elementi successivi in ciascuna delle tre linee orizzontali rappresenteranno rispettivamente i coefficienti di  $\rho, \dot{\rho}$  e  $\ddot{\rho}$ , nella equazione che corrisponde alla linea.

(\*) Presentata all'Accademia nella seduta del 12 gennaio 1957.

Scritta dunque l'equazione sotto la forma

$$(1) \quad \begin{vmatrix} (\sigma s)_x + 2(q\dot{\gamma} - r\dot{\beta}) + \ddot{\alpha} & q\gamma - r\beta + \dot{\alpha} & \alpha \\ (\sigma s)_y + 2(r\dot{\alpha} - p\dot{\gamma}) + \ddot{\beta} & r\alpha - p\gamma + \dot{\beta} & \beta \\ (\sigma s)_z + 2(p\dot{\beta} - q\dot{\alpha}) + \ddot{\gamma} & p\beta - q\alpha + \dot{\gamma} & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

risulteranno, come è noto, pienamente determinati i mutui rapporti fra le  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  e  $\ddot{\rho}$  e si avrà propriamente, se si indichi in generale con  $A_{r,s}$  il complemento algebrico di quell'elemento del determinante che si trova sulla linea  $r$  e sulla colonna  $s$ , qualunque sia  $r$

$$(2) \quad \rho = \dot{\rho} A_{r,1}/A_{r,2}, \quad \ddot{\rho} = \dot{\rho} A_{r,3}/A_{r,2},$$

dalle quali relazioni, poiché le velocità radiali sono misurabili con metodi fisici con grande precisione (nel caso di stelle sufficientemente luminose), si dedurranno senz'altro le distanze  $\rho$  e le accelerazioni radiali  $\ddot{\rho}$ . Si hanno in particolare, se si vogliono adoperare per tale calcolo gli elementi relativi alla prima linea <sup>(1)</sup>, per  $A_{1,1}$ ,  $A_{1,2}$ ,  $A_{1,3}$  le espressioni seguenti:

$$(3) \quad \begin{aligned} A_{1,1} &= \gamma(r\alpha - p\gamma + \dot{\beta}) - \beta(p\beta - q\alpha + \dot{\gamma}) \\ A_{1,2} &= \beta[(\sigma s)_z + 2(p\dot{\beta} - q\dot{\alpha}) + \ddot{\gamma}] - \gamma[(\sigma s)_y + 2(r\dot{\alpha} - p\dot{\gamma}) + \ddot{\beta}] \\ A_{1,3} &= [(\sigma s)_y + 2(r\dot{\alpha} - p\dot{\gamma}) + \ddot{\beta}](p\beta - q\alpha + \dot{\gamma}) - \\ &\quad - [(\sigma s)_z + 2(p\dot{\beta} - q\dot{\alpha}) + \ddot{\gamma}](r\alpha - p\gamma + \dot{\beta}), \end{aligned}$$

(1) È interessante segnalare un caso singolare che si presenta nello scegliere la linea i cui complementi algebrici intervengono nel calcolo di  $\rho$  e  $\ddot{\rho}$  secondo le (2). Il detto caso si incontra quando la stella in questione sia quella che si è indicata con  $S_1$  e che si trova in ogni tempo sull'asse  $Sx$  del triedro  $T_1$ . Si ha quindi costantemente  $\alpha = 1$  e sono nulli i valori di  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$ ,  $\ddot{\gamma}$ . L'equazione fondamentale (1) si riduce allora a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 1 \\ a_{21} & r & 0 \\ a_{31} & -q & 0 \end{vmatrix} = -(a_{21}q + a_{31}r) = 0.$$

I complementi algebrici degli elementi della prima linea sono tutti nulli: i primi due per la presenza degli zeri e il terzo perché coincidente col determinante stesso, il cui annullarsi è imposto dalla equazione, perché la  $S_1$  è compresa fra le stelle che si considerano ai fini della ricerca. Le relazioni (2) non sono quindi applicabili per  $r=1$ ; bisognerà invece servirsi dei complementi algebrici della seconda o della terza linea, i quali sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} A_{21} &= -q, & A_{22} &= -a_{31}, & A_{23} &= a_{11}q \\ A_{31} &= -r, & A_{32} &= a_{21}, & A_{33} &= a_{11}r \end{aligned}$$

e si ha allora nel primo caso

$$\rho = \frac{q\dot{\rho}}{a_{31}}, \quad \ddot{\rho} = -\frac{a_{11}}{a_{31}}q\dot{\rho}$$

e nel secondo

$$\rho = -\frac{r\dot{\rho}}{a_{21}}, \quad \ddot{\rho} = \frac{a_{11}}{a_{21}}r\dot{\rho};$$

risultati i quali coincidono quando si tenga conto della equazione che precede.



essendosi già posto (cfr. Nota II)

$$(\sigma s)_x = a_{11} \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma$$

$$(\sigma s)_y = a_{21} \alpha + a_{22} \beta + a_{23} \gamma$$

$$(\sigma s)_z = a_{31} \alpha + a_{32} \beta + a_{33} \gamma.$$

Dal punto di vista dimensionale tutto è, nella esposta nuova soluzione del problema delle distanze stellari, ben chiaro. Alle espressioni (3) corrispondono grandezze fisiche le cui dimensioni sono, ordinatamente,  $t^{-1}$ ,  $t^{-2}$ ,  $t^{-3}$ . I rapporti  $A_{11}/A_{12}$  e  $A_{13}/A_{12}$  hanno quindi per dimensioni rispettive  $t^1$  e  $t^{-1}$  e ai loro prodotti per  $\dot{p}$  (di dimensioni  $l^1 t^{-1}$ ) corrispondono le dimensioni  $l^1$ ,  $l^1 t^{-2}$ , come era da attendersi.

In quanto alle unità di misura è da notarsi che nella preparazione dei dati di osservazione e nei calcoli per la risoluzione del sistema fondamentale delle equazioni per la determinazione delle dodici incognite principali sarà sicuramente riconosciuta la convenienza di riferirsi all'anno, come unità di misura di tempo; dovrà quindi adottarsi la medesima unità anche nella misura delle velocità radiali. Viene così ad imporsi, come unità di lunghezza, l'unità astronomica; i risultati delle determinazioni spettroscopiche delle velocità radiali (dati generalmente in km. sec.<sup>-1</sup>) dovranno dunque essere riportati alle predette nuove unità, con le quali risulteranno poi espresse le  $\rho$  e  $\tilde{\rho}$ .

2. Rimane ora a trattare, in vista della attuazione pratica del metodo nuovo qui esposto, il procedimento più opportuno a seguirsi per la risoluzione del sistema ottenuto con l'introdurre nelle equazioni della forma (I) i dati forniti dalle osservazioni e riportati ad un'epoca unica  $t_0$ . Potendosi, come si è visto, scegliere l'uno o l'altro dei due gruppi di incognite precedentemente indicati, suppongo qui scelto quello formato dalle componenti  $p, q, r$  della rotazione istantanea di  $T_i$  e dai nove elementi  $a_{ij}$  della matrice dell'omografia  $\sigma$ ; le equazioni così ottenute sono del secondo grado.

Riguardo alla formazione del sistema delle (I) da risolvere potrebbe a prima vista sembrare opportuno di ridurre il numero delle equazioni al minimo indispensabile, cioè a dodici. Le gravi complicazioni di calcolo che presenta il problema di risolvere un sistema di equazioni quadratiche fra dodici incognite e il pericolo che il calcolatore possa essere indotto ad appor- tare semplificazioni con la preliminare esclusione di termini che possano apparirgli trascurabili, portano però a considerazioni generali dirette alla ricerca di semplificazioni d'altra natura, che siano pienamente legittime. Circostanze singolarmente favorevoli per tale ricerca si vedono ben presto, perché è facile riconoscere la possibilità di introdurre condizioni supplementari con le quali la soluzione cercata, cioè quell'unica che è astronomicamente utile, può esser distinta dalle altre e *isolata fin dall'inizio dei calcoli*.

Che la « soluzione astronomica » del problema sia *unica* è evidente. I valori che assumono le incognite  $p, q, r; \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  al tempo  $t_0$  sono univocamente dipendenti dai movimenti che al tempo stesso hanno (rispetto ad



un triedro a rotazione nulla con l'origine nel centro del Sole) le due stelle  $S_1$  e  $S_2$  che, insieme ad  $S$ , definiscono il triedro  $T_i$ . In quanto alle incognite  $a, b, c; l, m, n$  i loro valori dipendono, in maniera egualmente univoca, dalla distribuzione e grandezza delle masse galattiche che creano il campo gravitazionale nell'intorno del Sole. La condizione di unicità della soluzione che qui interessa sebbene importantissima, come si vedrà, non basta, però ancora a far distinguere la soluzione singolare dalle altre algebricamente possibili; occorre prescegliere un procedimento di calcolo che porti ad evitare una limitazione *a priori* del numero delle equazioni sulle quali si opera. Tale essenzialissima condizione si precisa col richiedere che, a calcoli compiuti, rimanga logicamente implicito che le conclusioni ottenute siano da considerarsi valide per *tutte* le stelle appartenenti all'intorno del Sole.

È agevole ora mostrare come, col concorso delle due condizioni supplementari indicate, la conoscenza della « soluzione astronomica » *si possa far dipendere dalla risoluzione di un sistema di equazioni lineari*: risultato di eccezionale interesse ma che deve tuttavia sembrare ben naturale e prevedibile, dato il carattere essenzialmente algebrico che con l'equazione (1) assume il problema e a seguito delle considerazioni che assicurano l'unicità della soluzione.

3. Si supponga formato, coi dati di osservazione forniti da stelle il cui numero lasciamo per ora imprecisato, un sistema di equazioni del tipo (1). Le incognite sono allora quelle del gruppo delle  $a_{ij}$  in numero di nove e delle  $p, q, r$ , e in quanto alla scelta delle stelle si porrà la sola condizione che appartengano all'intorno del Sole. Le equazioni sono di secondo grado e ciascuna tra esse comprenderebbe, se *completa*, 90 termini dipendenti dalle dodici incognite. Ma le equazioni non sono complete: mancano tutti i termini di secondo grado formati con le sole  $a_{ij}$  e sono in numero di 45; rimangono così, a riduzioni fatte, 45 termini contenenti incognite e algebricamente distinti, cioè i 27 prodotti delle  $a_{ij}$  per le tre  $p, q, r$  e inoltre i 6 termini a secondo grado fra queste ultime e i 12 termini lineari. Fissiamo ora a 45 il numero delle equazioni; segue da quanto sopra che le dodici incognite corrispondenti alla soluzione astronomica dovranno verificare sicuramente tutte le equazioni medesime, perché la condizione (1) è *necessaria*. Se dunque i 33 termini non lineari compresi nelle equazioni si immaginano calcolati in base ai valori numerici che assumono le dodici incognite indipendenti costituenti la soluzione predetta supposta nota, l'insieme dei 45 numeri può esser considerato come soluzione di un sistema di 45 equazioni lineari, con coefficienti *tutti noti* e forniti dalle osservazioni di altrettante stelle. I numeri stessi, possono allora essere *effettivamente e direttamente conosciuti con la risoluzione del sistema lineare e la soluzione così ottenuta non potrà esser diversa da quella astronomica che si ricerca*, perché altrimenti il sistema lineare, formato, come si è visto, da equazioni fra loro indipendenti (determinante non nullo) ammetterebbe due soluzioni.



I valori delle 33 incognite addizionali introdotte per formare il sistema lineare, valori che la risoluzione di questo fornisce, dovranno necessariamente risultare compatibili con le relazioni algebriche che nelle equazioni originarie si intendono naturalmente esistenti fra le 33 *nuove* e le dodici incognite propriamente dette, le quali di fatto individuano la supposta soluzione astronomica del sistema. Un esatto controllo numerico sulle dette relazioni eseguito dopo risolto il sistema lineare è certo importante al fine di assicurare l'esatta esecuzione dei non semplici calcoli, ma è bene chiarire che, quando siano esclusi errori materiali o siano stati corretti quelli esistenti il controllo non può mancare, perché un risultato negativo non potrebbe logicamente interpretarsi che con la *inesistenza* della « soluzione astronomica » che si cerca: ipotesi manifestamente assurda.

*Conclusioni riassuntive della ricerca.* La soluzione del problema del riferimento pei movimenti stellari nella Galassia esposta nelle tre Note qui presentate è, a mio avviso, l'unica ammissibile, in quanto si fonda sulla determinazione diretta e del tutto autonoma della rotazione assoluta del triedro mobile di riferimento  $T_t$ , in corrispondenza ad un'epoca prestabilita. La conoscenza, per via rigorosa, di tale indispensabile elemento si rende possibile solo con la introduzione di nuovi dati, risultando manifestamente insufficienti quelli utilizzati allo stesso scopo coi procedimenti tradizionali. I nuovi dati qui assunti sono quelli concernenti le accelerazioni assolute (nel senso precisato nella Nota II): scelta ben naturale perché, se riguardo ad un coordinamento delle velocità assolute non si può nulla, *a priori*, ritenere noto, altrettanto non può dirsi per le accelerazioni, i cui vettori non sono indipendenti ma sono da considerarsi - per la presenza del campo gravitazionale galattico - funzioni del posto.

Obbiettivo apparentemente secondario ma del più alto interesse - e in realtà coesistente con quello principale in vista - è poi raggiunto, nel corso della nuova trattazione, con la determinazione, strettamente rigorosa, delle distanze dal Sole di un numero considerevole di stelle.

Riguardo alle operazioni di calcolo che nell'applicazione del nuovo metodo si rendono necessarie è da notare che la risoluzione di un sistema di 45 equazioni lineari avrebbe forse alquanto preoccupato i nostri predecessori, ma che nessuna complicazione nello svolgimento di questa parte materiale del compito è attualmente da prevedersi, dati i metodi e mezzi di calcolo numerico dei quali ora si dispone.

I metodi e i procedimenti tuttora praticati per la risoluzione del fondamentale problema qui esaminato debbono essere decisamente abbandonati perché le concezioni sulle quali si fondano rivelano anomalie logiche di carattere sostanziale e queste infirmano in maniera assai grave la validità delle deduzioni che alcuni astronomi hanno creduto di poter trarre sul coordinamento dei moti stellari. In quelle anomalie bisogna vedere l'immanicabile risultato di tentativi fatti per risolvere un problema indeterminato.

Nel caso concreto gli operatori hanno creduto di potersi avvalere, per la conoscenza della rotazione di  $T_1$ , della teoria di quel movimento stabilita dalla meccanica celeste <sup>(2)</sup>, ma non hanno ben considerato che la conoscenza di quel moto non può dirsi acquisita se non quando siano stati dedotti, col confronto della teoria con l'osservazione, i valori numerici delle costanti introdotte dalla teoria stessa e che ai fini di tale confronto gli astronomi non possono evitare di ammettere conoscenze *a priori* sullo stato di moto assoluto di alcune stelle e sono pertanto condotti o a porre a base delle successive ricerche ipotesi *arbitrarie*, oppure a dichiarare inesistenti i moti stessi e a ricadere così nel falso concetto delle « stelle fisse ».

**Chimica.** — *Determinazione quantitativa della cristallinità del polipropilene* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI, MARCO CESARI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. NATTA.

Una delle caratteristiche più significative di un alto polimero cristallino è il suo grado di cristallinità, inteso come percentuale in peso della frazione cristallina del polimero. Da tale parametro strutturale dipendono infatti molte sue proprietà fisiche e tecnologiche, come i carichi di snervamento e di rottura, la densità, la durezza, il modulo di elasticità ecc. [1].

In seguito alla sintesi effettuata in questo Istituto di numerosi nuovi polimeri cristallini di idrocarburi vinilici, per i quali è stata trovata una struttura isotattica o sindiotattica [2], è risultato necessario, per meglio studiarne le proprietà, disporre di un metodo generale per la misura del loro grado di cristallinità. Dalla letteratura risulta che tale proprietà è stata molto studiata sinora per un solo idrocarburo polimerico sintetico cristallino, il politene, la cui cristallinità e le cui proprietà variano notevolmente in funzione del modo di preparazione. Il problema della determinazione del grado di cristallinità era stato affrontato per tale polimero attraverso varie vie, la più accurata delle quali è risultata quella roentgenografica [3].

Anche nel caso dei polimeri vinilici cristallini si sono osservate cristallinità variabili a seconda, non solo dei trattamenti termici o meccanici subiti dai campioni, ma anche del modo di preparazione, ed in particolare in relazione al tipo di catalizzatore impiegato, alla sua stereospecificità ed alla sua eterogeneità. La possibilità di formazione di catene atattiche, di catene isotattiche, e di catene costituite da blocchi di tratti atattici e di tratti isotattici, influisce notevolmente sulla cristallinità e sulle proprietà fisiche dei polimeri.

Il polipropilene cristallino presenta una densità calcolata di 0,936, solo di 0,086 maggiore di quella del polipropilene lineare amorfo. Tale diffe-

(2) Cfr. al riguardo: Nota I, n° 3.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Soc. Montecatini.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.



renza è molto minore di quella (almeno 0,15) che si riscontra nel confronto tra la densità calcolata per il polietilene cristallino (1,00) e quella prevista per il polimero amorfo (0,83-0,85). Le variazioni di densità, in funzione della cristallinità, sono perciò da prevedersi quantitativamente meno rilevanti per il polipropilene che per il politene.

Per la determinazione della cristallinità ci siamo orientati anche noi verso l'impiego di metodi di confronto delle quantità relative di energia diffratta, rispettivamente dalle regioni amorfe e da quelle cristalline di un polimero, perché in tal modo si può prescindere (entro certi limiti) dall'assorbimento, dalla densità, dallo spessore e dalla purezza del campione in esame.

Il punto più delicato del metodo sta nella valutazione quantitativa delle diffrazioni dovute rispettivamente alle regioni amorfe ed alle regioni cristalline del polimero, pur prescindendo dall'esistenza eventuale di zone con gradi intermedi di ordine.

Nel corso di questa ricerca abbiamo impiegato uno spettrometro per raggi X con contatore di Geiger della North Am. Philips Comp. Inc.

Gli spettri nell'intervallo angolare di  $2\theta$ , compreso tra  $4^\circ$  e  $30^\circ$ , sono stati eseguiti con la radiazione di un anticatodo di rame, filtrata con un foglio di nichel, usando all'uscita dei raggi una fenditura di  $1/4^\circ$  e rapporti di amplificazione variabili a seconda dell'assorbimento del campione (in generale 200 count per secondo a fondo scala). La costante di tempo usata è stata di 4 secondi: un compromesso per avere contemporaneamente una buona risoluzione ed un buon « fondo ».

Gli spettri sono stati eseguiti in generale per riflessione, su campioni stampati, ricotti a  $200^\circ\text{C}$  senza pressione e lasciati poi lentamente raffreddare, oppure su polvere. Solo eccezionalmente si sono effettuati spettri per trasparenza, con analoghi risultati.

Riferiamo dettagliatamente in questa nota sui risultati ottenuti con i polipropileni.

Gli spettri Geiger di campioni diversi di polipropilene parzialmente cristallino (fig. 1) presentano tutti 4 caratteristici picchi, nell'intervallo di  $2\theta$  compreso tra  $10^\circ$  e  $25^\circ$ , dovuti alla parte cristallina, le cui intensità relative, misurate dall'area con un planimetro di Amsler, stanno approssimativamente nei seguenti rapporti, per campioni completamente disorientati:

Picco	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
Indici $(hkl)$ . . . . .	110	040	130	111 $\left\{ \begin{array}{l} 13\bar{1} \\ 041 \end{array} \right.$
$2\theta$ per Cu $K\alpha$ . . . . .	14,0	17,0	18,8	21,2      21,9
$\frac{I_{hkl}}{I_{040}}$ . . . . .	2	1	0,80	2

Approssimativamente sotto lo stesso intervallo angolare cade la banda dell'amorfo, con massimo d'intensità per  $2\theta = 16,3^\circ$ . La forma della banda dell'amorfo è asimmetrica, a differenza di quella del polietene ed analogamente a quella di altre poli-alfa-olefine. Essa inizia  $6-7^\circ$  prima, e termina  $10-11^\circ$  dopo il punto di massimo.

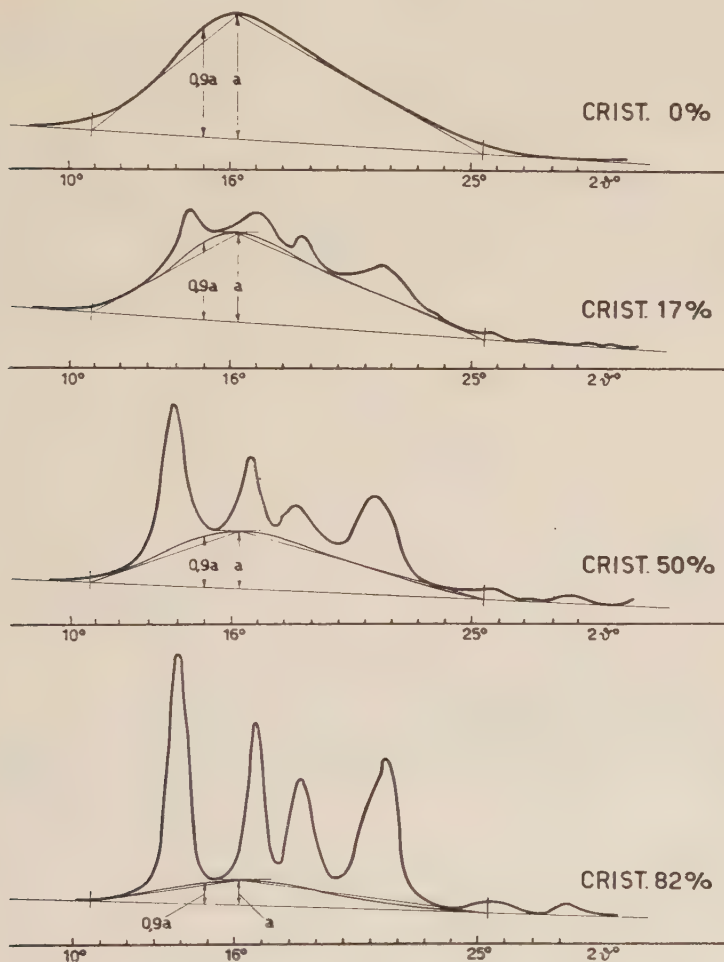


Fig. 1. - Spettri di Geiger di campioni di polipropilene aventi differenti cristallinità.

Nel caso di polimeri lineari di idrocarburi non saturi il confronto della forma delle diverse curve di bande dell'amorfo (fig. 2) ci ha permesso infatti di osservare che quest'ultime possono essere risolte in generale in due bande simmetriche, l'una (I) a  $19^\circ 5'$  attribuibile alle distanze di Van der Waals che più frequentemente si ripetono e l'altra (II) con posizione ed intensità relativa variabile da un polimero all'altro (nel caso del polipropilene a circa  $16^\circ$ ), attribuibile alla distanza che si calcolerebbe se le posizioni relative più frequenti delle catene fossero quelle corrispondenti a zone



localizzate con impacchettamento esagonale compatto. Nel caso che alla banda dell'amorfo si sovrappongano i picchi dovuti alla sostanza cristallina, occorre possedere un criterio per separare la diffrazione dovuta alla sostanza amorfa da quella dovuta alla sostanza cristallina.

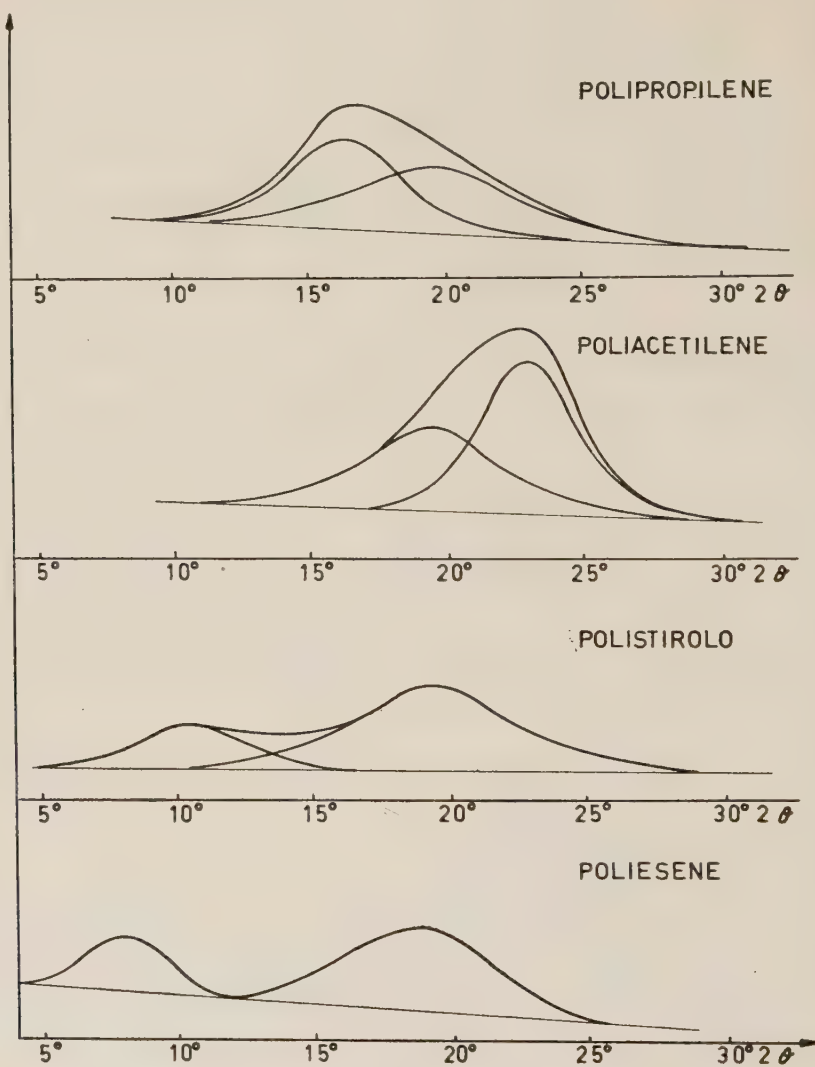


Fig. 2. - Confronto tra gli spettri di diversi polimeri amorfi.

Tracciata la linea di fondo (fig. 1), abbiamo per semplicità ammesso che l'altezza della banda dell'amorfo sia proporzionale alla distanza del minimo tra i picchi  $C_1$  e  $C_2$  e la linea di fondo.

In effetti tale minimo corrisponde al punto in cui l'intensità dovuta alle parti amorfe è meno influenzata dai picchi dovuti a quelle cristalline. Infatti i picchi  $C_1$  e  $C_2$  sono meno allargati dei successivi e la loro separazione angolare risulta abbastanza buona ( $\sim 3^\circ$ ).

È possibile, tenendo presenti le considerazioni di cui sopra, tracciare una curva che riproduca le intensità delle diffrazioni dovute alle parti amorfe, separate dai picchi dovuti alla parte cristallina. La fig. 1 mostra un semplice metodo di tracciamento che consente in pratica di ottenere tale separazione.

L'intensità diffratta, misurata dalla superficie dei picchi, dovrebbe essere corretta, analogamente a quanto effettuato da Bryant e Coll. nel caso del polietilene, con il fattore di Lorentz e polarizzazione e con un fattore che tenga conto della non puntiformità della nuvola elettronica degli atomi, del tipo  $1/P(\theta) \cdot f_c^2(\theta)$ , in cui  $P(\theta)$  e  $f_c^2(\theta)$  possono essere ricavati da apposite tabelle.

Tale correzione presenta meno importanza per il polipropilene che per il polietilene, perché se si considera l'intensità complessiva dei 4 picchi indicati in figura, essa è distribuita nella stessa zona angolare della diffrazione diffusa considerata per l'amorfo. Il fattore di correzione dell'intensità dovuta alla parte amorfa risulta essere del tipo:

$$(1) \quad F = \frac{\int_0^\pi \frac{I(\theta) d\theta}{P(\theta) f_c^2(\theta)}}{A}$$

con  $I(\theta)$  intensità diffratta all'angolo  $\theta$ ,  $A$  area totale della banda dell'amorfo.

Il valore dell'integrale calcolato per un alto polimero lineare amorfo del polipropilene « standard », completamente solubile in etere, è risultato  $6,9 \pm 0,1$ .

Per i picchi dovuti alla sostanza cristallina i fattori di correzione sono stati ricavati dalla funzione  $1/P(\theta) f_c^2(\theta)$  per valori angolari medi di ciascuno dei picchi principali.

Essi sono:

Picco cristallino	Fattore di correzione
$C_1$	3,06
$C_2$	5,18
$C_3$	6,89
$C_4$	10,30

L'intensità corretta diffratta dalla parte cristallina  $I_c$ , in un certo intervallo angolare, e l'intensità corretta diffratta dalla parte amorfa  $I_a$ , pure in un qualsiasi intervallo angolare, forniscono il mezzo per calcolare la cristallinità del polimero attraverso la relazione:

$$(2) \quad \% \text{ crist.} = \frac{I_c}{I_c + KI_a} \cdot$$



La costante  $K$  sarebbe teoricamente eguale a 1 qualora le intensità  $I_a$  e  $I_c$  fossero calcolate su tutto lo spettro.

Per il polietilene (3) la costante  $K$ , pur limitandosi la regione su cui vengono calcolati  $I_c$  e  $I_a$  ai primi  $2\theta = 30^\circ$  dello spettro, è risultata aggirarsi ugualmente tra 0,9 e 1,1 ed è stata quindi assunta uguale ad 1.

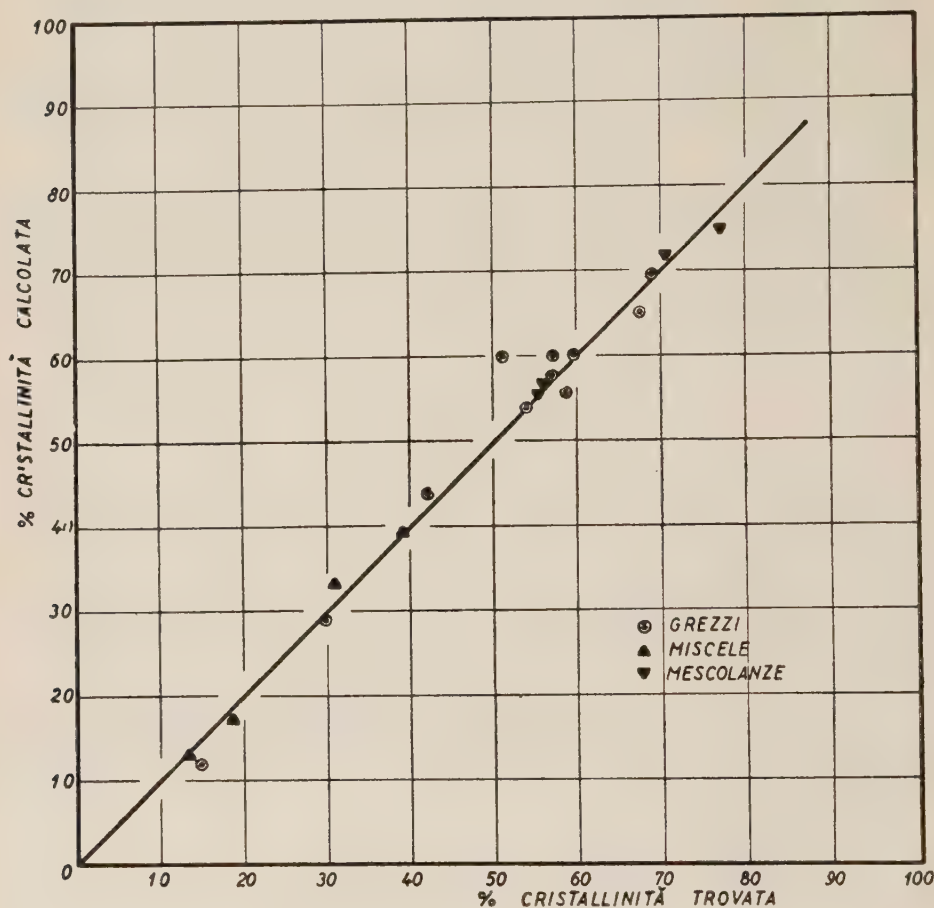


Fig. 3. - Grafico dell'accordo tra cristallinità calcolate e trovate in alcune serie di miscele.

Nel caso del polipropilene, qualora si sommi l'intensità diffratta dalla parte cristallina entro i primi  $30^\circ$  ( $2\theta$ ) (oltre quest'angolo non si osservano più rilevanti picchi al contatore di Geiger) e si confronti con quella diffratta dalla parte amorfa, la migliore costante  $K$ , che accorda i dati ricavabili da serie di miscele artificiali a composizione nota, risulta pure uguale a 1,0.

Siccome abbiamo preferito in pratica misurare  $I_c$  diffratta dai soli primi 4 picchi cristallini, trascurando gli ultimi 2 picchi non sempre facilmente misurabili, abbiamo adottato un valore di  $K$  eguale a 0,9.

La validità del metodo da noi usato è stata confermata in molti modi ed in particolare mediante l'esame di miscele artificiali. Abbiamo in tali

raffronti assunto, e la correlazione dei risultati lo giustifica, che non esista solubilità del prodotto cristallizzato nel prodotto amorfo.

Le miscele artificiali sono state ottenute per miscela di un polipropilene parzialmente cristallino (residuo all'estrazione eterea) con un polimero completamente amorfo. Le miscele sono state preparate per coprecipitazione introducendo una soluzione dei due polimeri in benzene in un eccesso di metanolo e ghiaccio secco ed hanno subito una ricottura durante l'essiccamento.

Sono stati presi inoltre in esame diversi polipropileni grezzi ed i loro componenti separati per estrazione. Si è trovato in generale un buon accordo, tra cristallinità determinata direttamente dal grezzo e cristallinità calcolata in base a quella delle singole frazioni separate per estrazione, secondo la relazione

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = c_g$$

dove

$c_g$  cristallinità del grezzo

$x_1, x_2, x_3$  percenti all'estrazione di estratto etereo, eptanico e residuo all'estrazione eptanica

$c_1, c_2, c_3$  rispettive cristallinità.

Come risulta dalla fig. 3 l'accordo tra i valori sperimentali e quelli calcolati è molto soddisfacente.

Sono state infine esaminate mescolanze di polveri di polimeri aventi diversa cristallinità ed anche in questo caso si sono ottenuti risultati più che soddisfacenti nel confronto tra le intensità calcolate e quelle sperimentali.

Per concludere, possiamo affermare che il metodo, proposto da Bryant per la determinazione della cristallinità nel polietilene, è di validità generale e può essere esteso ad altri polimeri cristallini, quali i polimeri isotattici.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. A. SPERATI, W. A. FRANTA e H. W. STARKWEATHER, Jr., «J.A.C.S.», 75, 6127 (1953).
- [2] G. NATTA, P. PINO, P. CORRADINI et al., «J.A.C.S.», 77, 1708 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, «Atti Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. 4, sez. II, fasc. 5, p. 73 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI, «Makrom. Chemie», 16, 77 (1955); G. NATTA, I. W. BASSI, P. CORRADINI, «Makrom. Chemie», 19, 455 (1956); G. NATTA, P. CORRADINI, «J. Pol. Sci.», 20, 251 (1956); G. NATTA, P. CORRADINI, I. W. BASSI, «Makrom. Chemie», 21, 240 (1956).
- [3] W. M. D. BRYANT, J. P. TORDELLA, R. H. H. PIERCE, Jr., lavoro presentato al A.C.S. Meeting, Chicago 1950; G. NATTA, P. CORRADINI, Simposio di Chimica Macromolecolare, Milano-Torino 1954. Suppl. «Ric. Sci.» 25, 695 (1955).



### Chimica Biologica. — *Ricerche sulla mioglobina fetale* (\*).

Nota di ALESSANDRO ROSSI-FANELLI, DORIANO CAVALLINI, CARLO DE MARCO, presentata (\*\*) dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

L'esistenza di due emoglobine (Hb), una di tipo fetale ed una di tipo adulto è già nota da tempo. La prima, che è presente nel feto e nel neonato, persiste per qualche tempo, per essere poi sostituita completamente nell'adulto da emoglobina del secondo tipo. È anche noto come in alcune forme morbose (morbo di Cooley), per un errore genetico vi sia persistenza di emoglobina di tipo fetale anche nell'adulto. La emoglobina fetale e la feteina, una proteina plasmatica trovata da Pedersen [1] nel siero di sangue di vitello, rappresentano però gli unici esempi di proteine tipo fetale finora isolate e caratterizzate. Le ricerche sulla presenza e sulla natura della mioglobina (Mb) nel muscolo del feto sono invece molto scarse.

In ricerche recentissime in collaborazione con Cavallini e De Marco [2] abbiamo ripreso il problema della mioglobina fetale ed abbiamo tentato di isolare questo pigmento dal cuore di vitello e di uomo riuscendo ad ottenere questa nuova proteina allo stato puro e cristallino.

Abbiamo determinato gli spettri di assorbimento nel visibile e nell'ultravioletto notando lievi differenze con la Mb di tipo adulto. Interessanti variazioni sono state osservate a 290 m $\mu$  probabilmente dovute a differente contenuto in aminoacidi aromatici.

Per meglio individuare questa proteina, poiché il gruppo prostetico risulta verosimilmente identico alle altre Mb, abbiamo cominciato a studiare la natura chimica della globina determinando la composizione in aminoacidi con l'usuale tecnica cromatografica e comparandola con quella della Mb di tipo adulto e con l'Hb di tipo adulto e fetale.

A tale scopo la mioglobina è stata estratta e cristallizzata dal muscolo di feto umano a termine e da muscoli di individui adulti secondo i metodi descritti in due nostri precedenti lavori [3], [2]. Campioni delle due mioglobine venivano denaturati per ebollizione per 10', filtrati e lavati sul filtro con H<sub>2</sub>O fino a scomparsa dei solfati. Il residuo veniva idrolizzato a riflusso in HCl6N per 24 h; l'HCl veniva eliminato portando a secco nel vuoto, riprendendo in H<sub>2</sub>O e riportando a secco nuovamente. Questa operazione veniva eseguita 4 volte. Il residuo, disciolto in H<sub>2</sub>O e desalficato elettroliticamente, veniva cromatografato su carta secondo la tecnica di Dent (4) in cromatografia bidimensionale, usando fenolo per la prima dimensione e collidina-lutidina per la seconda. La cromatografia unidimensionale, usando alcool amilico terziario, secondo la tecnica di Work [5] veniva utilizzata invece per svelare

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

la presenza di isoleucina. La quantità di Mb impiegata per la cromatografia oscillava da 0,5 a 1 mg.

Riportiamo nella seguente tabella i dati riguardanti la composizione qualitativa in aminoacidi della Mb e della Hb tipo adulto e fetale.

TABELLA.

Aminoacidi	Mioglobina		Emoglobina (*)	
	adulta	fetale	adulta	fetale
Cistina . . . . .	—	—	+	+
Ac. Aspartico. . . .	+	+	+	+
Ac. Glutamico . . . .	+	+	+	+
Serina . . . . .	+	+	+	+
Glicina . . . . .	+	+	+	+
Treonina . . . . .	+	+	+	+
Alanina . . . . .	+	+	+	+
Lisina . . . . .	+	+	+	+
Arginina . . . . .	+	+	+	+
Istidina . . . . .	+	+	+	+
Prolina . . . . .	+	+	+	+
Valina . . . . .	+	+	+	+
Metionina . . . . .	+	+	+	+
Leucina . . . . .	+	+	+	+
Isoleucina . . . . .	+	+	—	+
Fenilalanina . . . . .	+	+	+	+
Tirosina . . . . .	+	+	+	+

(\*) I dati di questi due pigmenti sono riportati da un nostro precedente lavoro [6].

I dati riassunti nella tabella mostrano che la Mb umana fetale differisce dalla Hb del feto perché non contiene *cistina* e da quella di tipo adulto per il fatto che non contiene *cistina*, ma contiene *isoleucina*, che manca invece in questo tipo di pigmento.

La Mb fetale risulta qualitativamente simile alla Mb tipo adulto. Anche l'apprezzamento quantitativo dell'intensità delle macchie e della loro grandezza sui cromatogrammi di questi due pigmenti non ha rivelato differenze tali da essere apprezzate direttamente. Se una differenza esiste nella compo-



sizione chimica dei due pigmenti, deve ricercarsi in differenze quantitative che solo metodi più sensibili possono svelare. A tale scopo abbiamo in corso ricerche di separazione dei vari aminoacidi con la tecnica di Moore e Stein [7] con colonne di resine a scambio ionico.

Inoltre, impiegando la tecnica elettroforetica su carta da noi precedentemente descritta [8], abbiamo potuto dimostrare che la Mb fetale è eterogenea esistono cioè, sia nel muscolo, sia nel pigmento cristallizzato, almeno tre diverse Mb contenute in differenti concentrazioni e individuabili per la differente mobilità elettroforetica.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] K. O. PEDERSEN, *Ultracentrifugal studies on serum and serum Fractions* (Almquist and Wilsells A. B. 1945).
- [2] A. ROSSI-FANELLI, D. CAVALLINI, C. DE MARCO, « Arch. of Biochem. and Biophysic », 50, 496 (1954).
- [3] A. ROSSI-FANELLI, *Haemoglobin Butterworths Scient. Publ.* 1949, p. 115.
- [4] C. E. DENT., « Biochem. J. », 43, 169 (1948).
- [5] K. E. WORK, « Biochem. J. », 42, XLIX 1948.
- [6] A. ROSSI-FANELLI, D. CAVALLINI e C. DE MARCO, « Giornale di Biochimica », 3, 88 (1953).
- [7] S. MOORE and H. STEIN, « J. Biol. Chem. », 176, 367 (1948).
- [8] A. ROSSI-FANELLI, E. ANTONINI, « Arch. of Biochem. and Bioph. », 1957 in corso di stampa.

#### NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Calcolo numerico.** — *Sulle equazioni algebriche matriciali* (\*).  
Nota di ENZO APARO, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

1. Sia  $f(\lambda)$  una matrice quadrata d'ordine  $v$ , i cui elementi siano polinomi in una variabile  $\lambda$ , con coefficienti che, per semplicità, supporremo reali:

$$f(\lambda) \equiv \| p_{hk}(\lambda) \| \quad (h = 1, \dots, v \quad ; \quad k = 1, \dots, v)$$

Posto

$$n_{hk} = \begin{cases} \text{grado } p_{hk}(\lambda) & , \text{ se } p_{hk}(\lambda) \not\equiv 0, \\ 0 & , \text{ se } p_{hk}(\lambda) \equiv 0, \end{cases}$$

$$n'_h = \max_{k=1, \dots, v} \{ n_{hk} \} \quad ; \quad n''_k = \max_{h=1, \dots, v} \{ n_{hk} \}$$

$$(I) \quad n = \min \left\{ \sum_{h=1}^v n'_h, \quad \sum_{k=1}^v n''_k \right\},$$

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

il determinante di  $f(\lambda)$  è un polinomio  $g(\lambda)$ , il quale, se non è  $\equiv 0$ , ha per grado un numero  $\bar{n} \leq n^{(1)}$ . Ci si propone di calcolare numericamente i coefficienti di  $g(\lambda)$ .

Tale problema ha come importanti casi particolari la determinazione del *polinomio caratteristico di una matrice  $\alpha$  rispetto ad una matrice  $\beta$  dello stesso ordine*, in cui risulta:

$$g(\lambda) = \det. \parallel \alpha_{hk} - \lambda \beta_{hk} \parallel$$

o, ancora più semplicemente, del polinomio caratteristico di una matrice  $\alpha$ , in cui

$$g(\lambda) = \det. \parallel \alpha_{hk} - \lambda \delta_{hk} \parallel$$

e

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq k \\ 1 & \text{per } h = k. \end{cases}$$

2. Un procedimento che si presenta in modo del tutto spontaneo è il seguente: 1° *prendere  $n + 1$  valori reali, a due a due distinti,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$* ; 2° *calcolare gli  $n + 1$  determinanti ad elementi numerici*

$$b_i = \det. \parallel p_{hk}(\lambda_i) \parallel \quad (h = 1, \dots, v \quad ; \quad k = 1, \dots, v)$$

3° *trovare quei valori  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_{n+1}$  per i quali risulta minima la funzione*

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \left( \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\gamma}_j \lambda_i^{j-1} - b_i \right)^2.$$

I coefficienti  $\bar{\gamma}_j$ , per  $\bar{n} + 1 < j \leq n + 1$ , risultano, entro un certo ordine di approssimazione, tutti nulli, e il *polinomio*

$$\bar{g}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\gamma}_j \lambda^{j-1}$$

*approssima il polinomio  $g(\lambda)$  cercato.*

3. Denotiamo con  $v$  la matrice (di Vandermonde), di elementi

$$v_{ij} = \lambda_i^{j-1} \quad (i = 1, \dots, n + 1 \quad ; \quad j = 1, \dots, n + 1),$$

con  $\bar{\gamma}$  e  $b$  le matrici, ad  $n + 1$  righe ed una colonna, di elementi  $\bar{\gamma}_i$  e  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ). Con l'esponente  $-1$  e con un asterisco scritto in alto, a destra della lettera indicante una matrice, vogliamo significare, rispettivamente, la reciproca e la trasposta di essa.

Consideriamo inoltre i prodotti fra matrici effettuati righe per colonne.

(1) È ovvio che si sostituirà il valore dato dalla (1) con uno più vicino ad  $n$ , quando sia possibile ottenerlo facilmente.



È possibile determinare due matrici  $\tau$  e  $c$ , quadrate, d'ordine  $n+1$ , la prima delle quali triangolare superiore <sup>(2)</sup>, tali che:

$$\begin{cases} v\tau = c, \\ c^*c = d, \end{cases}$$

con  $d$  matrice diagonale <sup>(3)</sup> d'ordine  $n+1$ .

La (2) è minima per  $\bar{\gamma} = \tau d^{-1} c^* b$  <sup>(4)</sup>.

4. Vogliamo indicare una scelta dei valori  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ), con la quale non è più necessario il calcolo numerico degli elementi di  $\tau$ ,  $c$  e  $d^{-1}$  mediante il procedimento descritto nel lavoro citato nella nota <sup>(4)</sup>, potendosi invece fornire esplicitamente tali matrici. Dimostriamo, infatti, che, se si assume <sup>(5)</sup>

$$(3) \quad \lambda_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+2} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1)$$

le matrici  $\tau$ ,  $d^{-1}$ ,  $c$  hanno, rispettivamente, per elementi <sup>(6)</sup>

$$(4) \quad \tau_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i=1, j=1 \text{ e } i=2, j=2 \\ (-1)^{\left[\frac{j-i}{2}\right]} \cdot 2^{i-2} \left\{ \left( \frac{i+j}{2} - 1 \right) + \left( \frac{i+j}{2} - 2 \right) \right\} & \text{per } i+j \text{ pari,} \\ & \text{e } i \leq j, j > 2. \\ 0 & \text{per } i+j \text{ dispari o } i > j \end{cases}$$

$$(5) \quad c_{ij} = \cos \frac{(2i-1)(j-1)\pi}{2n+2}$$

$$(6) \quad d_{ij}^{(-1)} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{per } i=j=1 \\ \frac{2}{n+1} & \text{per } i=j=2, 3, \dots, n+1 \\ 0 & \text{per } i \neq j. \end{cases}$$

Cominciamo col dimostrare la relazione  $v\tau = c$ . Introdotti i polinomi (di Cebyscev)

$$T_j(x) = \cos(j \arccos x)$$

è per essi caratteristica la relazione ricorrente

$$(7) \quad T_{j+2}(x) - 2x T_{j+1}(x) + T_j(x) \equiv 0$$

con le condizioni iniziali

$$(8) \quad T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) \equiv x.$$

(2) Cioè con gli elementi al di sotto della diagonale principale tutti nulli.

(3) Con gli elementi al di fuori della diagonale principale tutti nulli.

(4) Cfr. E. APARO, *Risoluzione numerica di un problema di minimi quadrati*, «Ric. Sci.», 25, 11, pp. 3039-3043 (1955).

(5) Tali  $\lambda_i$  sono gli zeri del polinomio di Cebyscev  $T_{n+1}(x)$ , definito più avanti.

(6) Con  $\left[\frac{j-i}{2}\right]$  si intende il massimo intero contenuto in  $\frac{j-i}{2}$ .

Posto

$$T_j(x) = \sum_{i=1}^{j+1} \bar{\tau}_{i,j+1} x^{i-1},$$

la (7), (8) equivalgono alla relazione ricorrente, per i coefficienti  $\bar{\tau}_{i,j}$ :

$$(9) \quad \bar{\tau}_{i,j+2} - 2 \bar{\tau}_{i-1,j+1} + \bar{\tau}_{i,j} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots)$$

con

$$\tau_{ij} = 0 \text{ per } i > j;$$

$$(10) \quad \tau_{11} = 1, \quad \bar{\tau}_{12} = 0, \quad \tau_{22} = 1,$$

e convenendo che sia  $\bar{\tau}_{0,j} = 0$ .

Applicando l'identità:  $\binom{r}{s} + \binom{r-1}{s} = \binom{r+1}{s+1} - \binom{r-1}{s+1}$  si constata facilmente che le  $\tau_{ij}$  date dalle (4) soddisfano le (9) e (10), e coincidono quindi con le  $\bar{\tau}_{ij}$ .

La  $j$ -esima colonna della matrice (4) contiene pertanto i coefficienti di  $T_{j-1}(x)$ , ordinati secondo le potenze crescenti di  $x$ .

Il prodotto della  $i$ -esima riga della matrice  $v$ , avente per elementi:

$$v_{ij} = \cos^{j-1} \frac{(2i-1)\pi}{2n+2}$$

per la  $j$ -esima colonna della matrice  $\tau$  vale perciò:

$$\sum_{r=1}^{n+1} \tau_{rj} \cos^{r-1} \frac{(2i-1)\pi}{2n+2}$$

cioè

$$T_{j-1} \left[ \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+2} \right] = \cos \left\{ (j-1) \arccos \left[ \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+2} \right] \right\}$$

che vale appunto  $c_{ij}$ .

Rimane ora da verificare la validità della relazione:

$$c^*c = d,$$

con la matrice  $c$  fornita dalle (5), ed essendo la matrice  $d$  l'inversa di quella definita dalle (6). Basta per ciò provare che: posto  $\alpha_r = \frac{(2r+1)\pi}{2n+2}$ , risulta

$$\sum_{r=0}^n \cos i\alpha_r \cdot \cos j\alpha_r = \begin{cases} n+1 & \text{per } i=j=0 \\ \frac{n+1}{2} & \text{per } i=j=1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{per } i \neq j \quad (i, j = 0, 1, \dots, n) \end{cases}$$

ed a tali ben note relazioni si perviene facilmente mediante la formula

$$\sum_{r=0}^n \cos m\alpha_r = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 2p(n+1) \\ (-1)^p(n+1) & \text{se } m = 2p(n+1) \end{cases}, \quad (p \text{ intero}).$$

**Analisi Matematica.** — *Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau.* Note I di SOLOMON MARCUS, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

I. Un des plus beaux aspects que présente la théorie des fonctions réelles d'une variable réelle c'est que, en dehors d'un certain ensemble, négligeable d'un point de vue qui dépend de la nature du problème, il apparaît une grande simplicité dans la structure de la fonction, en dépit des apparences contraires et des raisonnements minutieux. Ces ensembles négligeables sont parfois les ensembles dénombrables, parfois les ensembles de première catégorie au sens de Baire, parfois les ensembles de mesure nulle et parfois d'autres ensembles.

En ce qui concerne la théorie des fonctions réelles de deux ou plusieurs variables réelles, l'idée d'étudier les propriétés qui apparaissent quand on fait abstraction d'un certain ensemble négligeable, idée qui dans la théorie des fonctions à une variable a donné, semble-t-il, tout ce qu'elle pouvait donner, cette idée est loin d'être utilisée à sa juste valeur.

Un point de vue qui s'est montré très fécond c'est de diriger la principale attention, de chercher les ensembles négligeables qui, une fois supprimés, font apparaître ce qu'il y a de typique dans la structure de la fonction, non plus sur le champ de définition, mais sur celui des *valeurs* de la fonction.

A notre connaissance, des recherches systématiques en cette direction ont été entreprises pour la première fois en [1].

Dans notre travail, en partant des résultats de A. S. Kronrod [1], de G. M. Adelson-Velski et A. S. Kronrod [2], de A. S. Kronrod et E. M. Landis [3], et de leurs méthodes, nous nous proposons d'étudier certaines classes de fonctions continues de deux variables, du point de vue mentionné ci-dessus. Les classes que nous envisageons contiennent des sous-classes de fonctions fréquemment rencontrées en analyse, fonctions qui ne font pas l'objet des théorèmes établis en [1], [2] et [3]. Nous reprenons certains raisonnements de ces auteurs et, en dégagant l'essentiel, nous montrons que ces raisonnements ont une portée bien plus grande que celle qui s'offre au premier regard.

Nous précisons dès le commencement que toutes les fonctions de deux variables considérées dans ce travail sont définies et continues dans un intervalle bidimensionnel compact  $P = R \times S$ , où  $R$  est un intervalle compact de  $O_x$  et  $S$  un intervalle compact de  $O_y$ . Cependant on pourrait remarquer que bien des considérations n'exigent pas la continuité, ou l'exigent seulement par rapport à chaque variable prise à part. Voir pour cela [4] et surtout [5].

Par  $m$  et  $M$  on désigne les bornes de la fonction sur  $P$ .

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.



2. En 1926 S. Banach a introduit [6] quelques classes remarquables de fonctions réelles d'une variable réelle. Entre autres, il a posé la définition suivante:

Une fonction réelle d'une variable réelle possède la propriété  $T_1$  (resp.  $T_2$ ), si les valeurs prises une infinité (resp. une infinité non dénombrable) de fois forment un ensemble de mesure nulle.

En 1931, S. Saks a montré [7] que la propriété  $T_1$  équivaut, pour les fonctions continues, à la propriété différentielle suivante: les valeurs prises aux points où la fonction n'admet pas de dérivée unique (finie ou infinie) forment un ensemble de mesure nulle. (Le fait que cette propriété est impliquée par la propriété  $T_1$  résulte aussi d'un théorème antérieur de N. Bary [8]). Il en résulte que toute fonction dérivable, toute fonction absolument continue (en particulier, toute fonction lipschitzienne) possède la propriété  $T_1$ . En outre, S. Banach avait montré que toute fonction à variation bornée possède la propriété  $T_1$  [9].

En ce qui concerne la propriété  $T_2$ , elle appartient à toute fonction continue jouissant de la propriété (N) de Lusin et à toute fonction continue, à variation bornée au sens généralisé [10].

Comment se transposent-elles les propriétés  $T_1$  et  $T_2$  aux fonctions de deux variables? Une transposition formelle est, en quelque sorte, dépourvue d'intérêt. En effet, les seules fonctions continues de deux variables, qui possèdent la propriété que les valeurs prises une infinité (même non dénombrable) de fois forment un ensemble de mesure linéaire nulle, sont les constantes. C'est seulement à l'aide de la notion de *connexion locale* qu'on obtient le véritable correspondant des propriétés  $T_1$  et  $T_2$ . Nous posons les définitions suivantes:

*Une fonction  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T'_1$  (resp.  $T''_1$ ) si les valeurs prises aux points de non connexion locale des composantes de niveau<sup>(1)</sup> (resp. des niveaux) forment un ensemble de mesure nulle.*

*Une fonction  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T'_2$  (resp.  $T''_2$ ) si les niveaux formés d'une infinité (resp. une infinité non dénombrable) de composantes forment un ensemble de mesure nulle (sur l'axe des valeurs de  $f(x, y)$ ).*

Il est facile de voir que, pour les fonctions réelles définies sur un intervalle compact de la droite les propriétés  $T'_1$  et  $T''_1$  deviennent, chacune à part, la propriété  $T_1$  de Banach et la propriété  $T'_2$  devient la propriété  $T_2$  de Banach. En ce qui concerne la propriété  $T'_1$ , elle appartient à toute fonction réelle d'une variable réelle.

La notion de connexion locale a déjà montré son importance dans l'étude des niveaux des fonctions de deux variables. Ainsi, A. Velski et A. Kronrod ont démontré [2] que pour une fonction continue  $f(x, y)$ , ayant des dérivées partielles du premier ordre, pour presque tout niveau les composantes

(1) Par *niveau* on entend l'ensemble des points où  $f(x, y)$  prend la même valeur. Par *composante de niveau* on entend une composante de connexion d'un niveau. Par  $E_t$  on désigne le niveau où  $f(x, y) = t$ .

sont localement connexes. Rappelons aussi que nous avons montré ([11], [12]) que pour une fonction  $f(x, y)$  telle que les expressions  $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ ,  $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$  évitent, chacune à part, un certain signe, pour  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta y > 0$ , chaque niveau est connexe et localement connexe.

Ces deux théorèmes rentrent comme des cas particuliers dans le théorème 2 de ce travail.

La propriété  $T''_1$  est plus faible que  $T_1$ ; la propriété  $T'_2$  est plus faible que  $T'''_1$ . Pour avoir une image plus complète des rapports entre les propriétés introduites ci-dessus, nous donnons le

**THÉOREME 1.** — *La propriété  $T''_1$  est équivalente à l'ensemble des  $T'_1$  et  $T'''_1$ .*

*Démonstration.* — Montrons que  $T'_1 \rightarrow T''_1$ ,  $T'''_1 \rightarrow T''_1$ . En effet, par hypothèse, presque chaque niveau est localement connexe. Mais, à la suite de la continuité de la fonction, chaque niveau est compact, donc ([13], p. 164) presque chaque niveau est formé d'un nombre fini de composantes. Ces composantes sont localement connexes ([13], p. 165).

Réciproquement, si un niveau est formé d'un nombre fini de composantes localement connexes, il est localement connexe ([13], p. 163).

$T'_1$  est effectivement plus faible que  $T''_1$  et  $T'''_1$ , comme le montre l'exemple suivant:

*Exemple  $\alpha$ .* — Soit  $f(x, y) = \varphi(x)$ , où  $\varphi(x)$  est une fonction continue sur un intervalle compact et jouit de la propriété que toute valeur comprise entre les bornes de la fonction est prise une infinité non dénombrable de fois. (L'existence d'une telle fonction résulte d'un théorème de S. Mazurkiewicz et W. Sierpinski [14]. Un exemple de même nature a été donné par A. N. Singh [15]). Toute composante de niveau de  $f(x, y)$  est un segment de droite, donc est localement connexe:  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T'_1$ . Tout niveau a une infinité non dénombrable de composantes, donc  $f(x, y)$  ne possède pas la propriété  $T'''_1$  et, compte tenu du théorème 1, elle ne possède pas la propriété  $T''_1$ .

3. Nous nous proposons dans ce qui suit, d'obtenir des critères portant sur les fonctions partielles de  $f(x, y)$ , pour reconnaître si  $f(x, y)$  possède la propriété  $T'_1$ . Mais d'abord nous donnerons deux lemmes qui d'ailleurs joueront un rôle central dans ce travail.

**LEMME 1** — *Soit une famille  $\{I\}$  d'intervalles unidimensionnels situés dans le rectangle  $R \times [m, M]$  du plan des variables  $(x, t)$ , parallèles à  $Ox$  et tels que l'ensemble des points de  $Ot$ , de projection de ces intervalles, est de mesure linéaire extérieure positive (resp. de deuxième catégorie linéaire de Baire, resp. non dénombrable).*

*Il existe un intervalle  $J$  sur  $Ox$ , tel que toute droite  $x = x_0$  ( $x_0 \in J$ ) rencontre dans  $\{I\}$  un ensemble de points de mesure linéaire extérieure positive (resp. de deuxième catégorie linéaire de Baire, resp. non dénombrable).*

*Démonstration.* — Il existe un nombre  $\alpha > 0$ , tel que l'ensemble des intervalles de la famille  $\{I\}$ , de longueur au moins égale à  $\alpha$ , se projette sur

Où après un ensemble de mesure linéaire extérieure positive (resp. de deuxième catégorie linéaire de Baire, resp. non dénombrable).

En utilisant un raisonnement par dichotomie, on trouve un nombre  $\lambda$ , tel que, quelque soit  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des intervalles de  $\{I\}$  de longueur  $\geq \alpha$  et dont les extrémités gauches ont les abscisses comprises entre  $\lambda - \varepsilon$  et  $\lambda + \varepsilon$ , se projette sur  $Ot$  d'après un ensemble de mesure linéaire extérieure positive (resp. de deuxième catégorie linéaire de Baire, resp. non dénombrable).

Donc toute droite  $x = x_0$ , où  $\lambda \leq x_0 < \lambda + (\alpha/2)$ , rencontre dans  $\{I\}$  un ensemble de mesure linéaire extérieure positive (resp. de deuxième catégorie, resp. non dénombrable). L'intervalle  $J = [\lambda, \lambda + \alpha/2]$  satisfait à la thèse du lemme.

LEMME 2. — Si  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T_1$  par rapport à  $x$  pour chaque valeur de  $y$  appartenant à un ensemble dense dans  $S$ , et par rapport à  $y$  pour chaque valeur de  $x$  appartenant à un ensemble dense dans  $R$ , alors  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T'_1$ .

Démonstration. — Soit  $E_t$  un niveau de  $f(x, y)$ , qui contient une composante  $K$  non localement connexe. Soit  $p$  un point de non connexion locale de  $K$ . D'après un théorème de [16], p. 18, il existe un disque  $D$  centré en  $p$  et une suite infinie de composantes distinctes  $K_1, K_2, K_3, \dots$  de  $K \cap \bar{D}$  qui converge topologiquement vers un continu  $H$  qui contient le point  $p$  et qui n'a pas de points communs avec aucun  $K_i$ . Soit  $b_i$  un point d'intersection de  $K_i$  avec la frontière de  $D$ . Désignons par  $b$  un point limite des points  $b_i$ . Soit  $\beta$  l'abscisse de  $b$  et  $\alpha$  l'abscisse de  $p$ . Supposons que  $\beta \neq \alpha$ . Il existe alors deux nombres  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $\alpha \leq x_1 < x_2 \leq \beta$  et toute droite  $x = x_0$ , où  $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ , rencontre une infinité de composantes  $K_i$ , donc contient une infinité de points de  $E_t$ .

Il en résulte que, dans le plan  $(x, t)$ , pour chaque niveau  $E_{t_0}$  qui contient une composante non localement connexe, il existe sur la droite  $t = t_0$  un segment  $I = [x_1, x_2]$ , tel que dans le plan  $(x, y)$  la droite  $x = x_0$  ( $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ ) contient une infinité de points de  $E_{t_0}$ .

Supposons que l'ensemble de ces valeurs  $t_0$  est de mesure linéaire extérieure positive. Alors, d'après le lemme 1, il existe un intervalle  $J$  sur  $Ox$ , tel que, dans le plan  $(x, t)$ , la droite  $x = x_0$  ( $x_0 \in J$ ) rencontre dans la famille  $\{I\}$  un ensemble de mesure linéaire extérieure positive. Il s'ensuit que pour tout  $x_0 \in J$ , l'ensemble des valeurs que  $f(x_0, y)$  prend une infinité de fois est de mesure linéaire extérieure positive, donc pour tout  $x_0 \in J$ ,  $f(x_0, y)$  est dépourvue de la propriété  $T_1$  de Banach. Mais cela est contraire à l'hypothèse.

Si l'on a  $\alpha = \beta$ , alors on emploie un raisonnement analogue par rapport à  $y$  et on aboutit à une contradiction analogue.

Donc l'ensemble des valeurs  $t$  telles que le niveau  $E_t$  contient une composante non localement connexe, est de mesure nulle.

Supposons que dans la définition des propriétés  $T_1, T'_1, T''_1, T'''_1, T_2, T'_2$  on remplace les ensembles exceptionnels de mesure nulle par des ensembles



de première catégorie (au sens de Baire). Désignons les propriétés ainsi obtenues par  $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}'_1, \mathfrak{I}''_1, \mathfrak{I}'''_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}'_2$ . Enfin, désignons les mêmes propriétés, où le rôle des ensembles exceptionnels est donné aux ensembles dénombrables, par  $\tau_1, \tau'_1, \tau''_1, \tau'''_1, \tau_2, \tau'_2$ . Vu le lemme 1 et, en effectuant un raisonnement analogue à celui de la démonstration du lemme 2, on a

LEMME 2' - (L'énoncé du lemme 2, où l'on remplace  $T_1$  par  $\mathfrak{I}_1$  et  $T'_1$  par  $\mathfrak{I}'_1$ ).

LEMME 2'' - L'énoncé du lemme 2, où l'on remplace  $T_1$  par  $\tau_1$  et  $T'_1$  par  $\tau'_1$ ).

On a aussi, en imitant la démonstration du théorème 1:

THÉORÈME 1'. -  $\mathfrak{I}'_1$  est équivalente à l'ensemble des  $\mathfrak{I}'_1$  et  $\mathfrak{I}'''_1$ .

THÉORÈME 1''. -  $\tau'_1$  est équivalente à l'ensemble des  $\tau'_1$  et  $\tau'''_1$ .

Remarque. - Les réciproques des lemmes 2, 2', 2'' ne sont pas vraies. En effet, la fonction  $f(x, y)$  considérée dans l'Exemple  $\alpha$  possède les propriétés  $T'_1, \mathfrak{I}'_1$  et  $\tau'_1$ , mais elle ne possède, par rapport à  $x$ , aucune des propriétés  $T_1, \mathfrak{I}_1, \tau_1$ , pour aucune valeur de  $y$ .

La même fonction montre que  $\mathfrak{I}'_1$  est effectivement plus faible que  $\mathfrak{I}''_1$  et  $\mathfrak{I}'''_1$  et  $\tau'_1$  est effectivement plus faible que  $\tau''_1$  et  $\tau'''_1$ .

THÉORÈME 2. - Supposons que  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T_1$  (resp.  $\mathfrak{I}_1$ , resp.  $\tau_1$ ) par rapport à  $x$ , pour chaque valeur de  $y$  appartenant à un ensemble dense dans  $S$ , et par rapport à  $y$  pour chaque valeur de  $x$  appartenant à un ensemble dense dans  $R$ . Alors, il existe une épaisseur pleine (resp. un résiduel, resp. un ens. dont le complémentaire est dénombrable)  $\Omega$  de  $[m, M]$ , telle que, pour  $t \in \Omega$ , le niveau  $E_t$  contient seulement des composantes des trois types suivants:

arcs simples ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ ;

courbes simples fermées;

points.

Démonstration. - Nous considérons seulement le cas de  $T_1$ . Pour  $\mathfrak{I}_1$  et  $\tau_1$  les choses vont de la même manière.

D'après le lemme 2, il existe une épaisseur pleine  $\Lambda$  de  $[m, M]$ , telle que, pour  $t \in \Lambda$ , le niveau  $E_t$  est formé seulement des composantes localement connexes. Ecartons les composantes qui possèdent des points de ramification. Les valeurs correspondantes forment un ensemble dénombrable  $N$  ([17], ou [1], p. 34).

Posons  $\Lambda^* = \Lambda - N$ .  $\Lambda^*$  est encore une épaisseur pleine de  $[m, M]$ .

D'après le lemme 27 de [1], toute composante d'un niveau  $E_t$ , où  $t \in \Lambda^*$ , est de l'un des trois types suivants: arc simple; courbe simple fermée; point.

Nous distinguons deux sortes de valeurs  $t \in \Lambda^*$ :

a) Soit  $t \in \Lambda^*$ , tel qu'il existe une composante  $K \subset E_t$  et un point  $\xi(x_0, y_0) \in K$ , jouissant de la propriété que pour le niveau  $E_t$  d'une au moins des fonctions  $f(x_0, y), f(x, y_0)$ , le point  $\xi(x_0, y_0)$  est isolé. Supposons, pour fixer les idées, que cela a lieu pour  $f(x_0, y)$ .

A la suite de la continuité de la fonction, il existe un  $\varepsilon > 0$ , tel que, pour  $0 < \delta \leq \varepsilon$  on a

$$f(x_0, y_0 + \delta) > f(x_0, y_0) > f(x_0, y_0 - \delta)$$

ou bien

$$f(x_0, y_0 + \delta) < f(x_0, y_0) < f(x_0, y_0 - \delta).$$

En tout cas, il existe une composante  $K'$  de  $E_t$  qui sépare le point  $\eta(x_0, y_0 - \varepsilon)$  du point  $\zeta(x_0, y_0 + \varepsilon)$ .  $K'$  ne peut être formé d'un seul point.  $K'$  rencontre le segment  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$  situé sur la droite  $x = x_0$ . Donc  $\xi \in K'$  et on a  $K = K'$ .

Si  $K'$  n'est pas une courbe simple fermée, alors il est un arc simple qui sépare  $P$ . Donc  $K'$  rencontre la frontière de  $P$ . Il peut arriver que les extrémités de  $K'$  ne soient pas sur la frontière de  $P$ ; mais il est facile à voir, à l'aide du théorème de Comarevski ([17] ou [1], p. 34) que cela est possible seulement pour un ensemble tout au plus dénombrable de composantes. Désignons par  $Z$  l'ensemble des valeurs  $t \in \Lambda^*$ , telles que  $E_t$  contient un tel arc.  $Z$  est donc dénombrable.

*b)* Soit  $t \in \Lambda^*$ , tel que pour toute composante  $K$  de  $E_t$ , tout point  $\xi(x_0, y_0)$  de  $K$  est point limite pour le niveau  $E_t$  de  $f(x_0, y)$  et aussi pour le niveau  $E_t$  de  $f(x, y_0)$ . La projection de  $K$  sur  $O_x$  (ou sur  $O_y$ ) est un segment de droite. Donc pour chaque  $t$  du type *b)* on associe un segment de droite  $I$  parallèle à  $O_x$ , tel que pour  $u \in I$ , la droite  $x = u$  rencontre dans  $E_t$  une infinité de points.

Appliquons maintenant le lemme 1; si l'ensemble de ces valeurs  $t$  avait une mesure linéaire extérieure positive, alors il existerait un intervalle  $J$  sur  $O_x$ , tel que, pour  $u \in J$ , les valeurs que la fonction  $f(u, y)$  prend une infinité de fois forment un ensemble de mesure linéaire extérieure positive, donc pour tout  $u \in J$ ,  $f(u, y)$  serait dépourvue de la propriété  $T_1$  par rapport à  $y$ . Mais cela contredit l'hypothèse.

Donc l'ensemble  $V$  des valeurs  $t$  considérées à *b)* est de mesure nulle.

Posons maintenant  $\Omega = \Lambda^* - Z - V$ . L'ensemble  $\Omega$  jouit des propriétés indiquées dans la thèse du théorème.

**COROLLAIRE** (*Théorème de Adelson-Velski et A. S. Kronrod*). Si  $f(x, y)$  possède de dérivées partielles du premier ordre, alors il existe une épaisseur pleine  $\Omega$  de  $[m, M]$ , telle que pour tout  $t \in \Omega$  le niveau  $E_t$  est formé seulement des composantes des trois types indiqués dans la thèse du théorème 2.

*Démonstration.* — En effet, une fonction continue d'une variable qui possède une dérivée unique en chaque point, jouit, d'après le théorème de S. Saks [7], de la propriété  $T_1$ . Il s'ensuit qu'une fonction continue, à deux variables, qui possède en chaque point des dérivées partielles du premier ordre, fait l'objet du théorème 2.

#### OUVRAGES CITÉS.

- [1] A. S. KRONROD, *Sur les fonctions de deux variables* (en russe), « Uspehi Matem. Nauk », t. 5, n. 1 (35), pp. 24-134 (1950).
- [2] G. M. ADELSON-VELSKI et A. S. KRONROD, *Sur les lignes de niveau des fonctions continues, douées de dérivées partielles* (en russe) « D.A.N., S.S.S.R. », 49, nr. 4, p. 239, (1945).

- [3] A. S. KRONROD-E. M. LANDIS, *Sur les ensembles de niveau des fonctions de plusieurs variables* (en russe), « D.A.N. S.S.S.R. », 58, nr. 7, p. 1269 (1947).
- [4] S. MARCUS, *Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions de deux variables*, « C.R. Acad. Sci. », Paris, t. 242, nr. 19, pp. 2273-2275 (1956).
- [5] S. MARCUS *Condițiile (T) ale lui Banach la funcții de două variabile*, « Rev. Univ. C. I. Parhon », București, nr. 8, pp. 15-22 (1955).
- [6] S. BANACH, *Sur une classe de fonctions continues*, « Fund. Math. », t. 8, p. 167 (1926).
- [7] S. SAKS, *Sur certaines classes de fonctions continues*. « Fund. Math. », t. 17, pp. 124-151 (1931).
- [8] N. BARY, *Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues*, « Math. Ann. », t. 103, deuxième partie, p. 633 (1930).
- [9] S. BANACH, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*, « Fund. Math. », t. 7, pp. 225-236 (1925).
- [10] S. SAKS, *Theory of the integral*, Warszawa-Lwow, pp. 279 et 284 (1937).
- [11] S. MARCUS, *Sur quelques notions de monotonie concernant les fonctions réelles de deux variables réelles*, « C. R. Acad. Sci. », Paris, t. 242, nr. 18, pp. 2207-2209 (1956).
- [12] S. MARCUS, *Fonctions monotones de deux variables*, « Revue de Mathématiques pures et appliquées », Bucarest, t. 3, pp. 17-36 (1956).
- [13] C. KURATOWSKI, *Topologie II*, Warszawa-Lwow ed. 2 (1952).
- [14] S. MAZURKIEWICZ-W. SIERPINSKI, *Sur un problème concernant les fonctions continues*, « Fund. Math. », t. 6, pp. 161-169 (1924).
- [15] A. N. SINGH, *Theory and construction of nondifferentiable functions*, p. 89, cité après K. PADMAVALLY, « Proc. Amer. Math. Soc. », Dec., vol. 4, nr. 6, pp. 839-841 (1953).
- [16] G. T. WHYBURN, *Analytic Topology*, New-York, 1942.
- [17] M. V. COMAREVSKI, *Sur une propriété des continus linéaires situés dans un plan et ayant des points de ramification* (en russe), Trud. Turkest. Gos. Univ., vol. 6 et 8 (1923).

**Analisi matematica.** — *Solutions périodiques des systèmes non-linéaires à petit paramètre.* Nota di ARISTIDE HALANAY, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

1. Le théorème que nous allons prouver représente, en quelque sorte, le prolongement naturel de quelques résultats antérieurs ([1], [2], [3], [4]).

On considère le système

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_0(x, t) + \mu X_1(x, t), & X_0(x, t + \omega) = X_0(x, t) \\ & X_1(x, t + \omega) = X_1(x, t) \\ X_0(x, t) = X_0^{(m)}(x, t) + X_0^{(m+1)}(x, t) + \dots, & m \geq 2 \end{cases}$$

où l'on suppose que  $X_0(x, t)$  est analytique, et  $X_0^{(k)}(x, t)$  représente une forme de degré  $k$  dans les coordonnées de  $x$ .

On suppose encore que  $\int_0^\omega X_0^{(m)}(x, t) dt$  a le point  $x = 0$  comme point singulier isolé.

(\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.



THÉORÈME. — Si l'indice du point  $x = 0$  dans le champ de vecteurs  $\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} X_0^{(m)}(x, t) dt$  est différent de zéro, alors pour  $|\mu|$  suffisamment petit le système (1) a une solution périodique de période  $\omega$ , située dans le voisinage du point  $x = 0$ .

Quelques calculs que nous allons effectuer remontent à Levi-Civita [5].

2. Considérons le système

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = X_0^{(m)}(x, t) + X_0^{(m+1)}(x, t) + \dots$$

La solution générale du système est

$$x = A_1(t) x_0 + A_2(t, x_0) + \dots + A_m(t, x_0) + \dots$$

où  $A_k(t, x_0)$  sont des vecteurs dont les coordonnées sont des formes de degré  $k$  dans les coordonnées de  $x_0$ , à coefficients fonctions de  $t$ .

Cette solution vérifie le système, donc

$$\frac{dA_1}{dt} x_0 + \frac{\partial A_2}{\partial t} + \dots + \frac{\partial A_m}{\partial t} + \dots = X_0^{(m)}(A_1 x_0 + A_2 + \dots + A_m + \dots, t) + \dots$$

On obtient les relations

$$\frac{dA_1}{dt} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} = 0, \dots, \quad \frac{\partial A_m}{\partial t} = X_0^{(m)}(A_1 x_0, t), \dots$$

$$A_1(0) = E, \quad A_2(0, x_0) = \dots = A_m(0, x_0) = 0.$$

On déduit d'ici

$$A_1 = E, \quad A_2 = \dots = A_{m-1} = 0$$

$$A_m(t, x_0) = \int_0^t X_0^{(m)}(x_0, t) dt.$$

Il s'ensuit que la solution générale est de la forme

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X_0^{(m)}(x_0, t) dt + \dots$$

où les termes que nous n'écrivons pas sont de degré supérieur dans les coordonnées de  $x_0$ .

Considérons le champ de vecteurs

$$u(x_0) \equiv x(\omega) - x_0 = \int_0^{\omega} X_0^{(m)}(x_0, t) dt + \dots$$

Ce champ a le point  $x_0 = 0$  comme point singulier isolé, parce que la même affirmation est valable pour le champ  $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0^{(m)}(x_0, t) dt$  et l'indice du point  $x_0 = 0$  dans le champ  $u(x_0)$  sera différent de zéro parce que la même affirmation est valable pour le champ  $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0^{(m)}(x_0, t) dt$ . Considérons le champ  $u_\mu(x_0) = x_\mu(\omega) - x_0$ , où  $x_\mu(t)$  est la solution du système (1) qui pour  $t = 0$  prend la valeur  $x_0$ .

On a  $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_\mu(\omega) = x(\omega)$ , donc pour  $|\mu|$  suffisamment petit la rotation du champ  $u_\mu(x_0)$  sur une sphère contenant l'origine sera égale à la rotation du champ  $u(x_0)$ ; il s'ensuit que si cette sphère est suffisamment petite, la rotation du champ sera différente de zéro. Mais alors le champ  $u_\mu(x_0)$  aura dans le domaine intérieur à cette sphère un point singulier, donc un point pour lequel  $u_\mu(x_0) = 0$ ,  $x_\mu(\omega) = x_0 = x_\mu(0)$ . Ce point correspond à une solution périodique.

3. REMARQUES. 1. - Si  $X_0$  ne dépend pas explicitement de  $t$ , on a  $\frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0 dt = X_0$  et on obtient un cas particulier du théorème suivant démontré par l'auteur et I. Berstein: Si l'indice du point  $x = 0$  dans le champ  $X_0(x)$  est différent de zéro, alors pour  $|\mu|$  suffisamment petit le système (1) a une solution périodique dans le voisinage du point  $x = 0$ .

2. Si le point  $x = 0$  est asymptotiquement stable pour le système (2), son indice dans le champ  $x(k\omega) - x_0$  est égal à  $\pm 1$  pour  $k$  suffisamment grand.

Il résulte d'ici que l'indice dans le champ  $\frac{1}{k\omega} \int_0^{k\omega} X_0^{(m)} dt$  est différent de zéro;

mais  $\frac{1}{k\omega} \int_0^{k\omega} X_0^{(m)} dt = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega X_0^{(m)} dt$ , donc nous sommes dans les conditions du théorème. On obtient ainsi un cas particulier d'un théorème de I. Berstein.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. HALANAY, *In legătură cu metoda parametrului mic*, « Bul. St. Acad. R.P.R. », t. VI, Nr. 3, pp. 483-489 (1954).
- [2] A. HALANAY, *Puncte singulare și soluții periodice*, « Bul. St. Acad. R.P.R. », t. VII, Nr. 2, pp. 319-325 (1955).
- [3] I. BARBALAT, *Observații asupra notei « Puncte singulare și soluții periodice »*, « Bul. St. Acad. R.P.R. », t. VII, Nr. 2, f. 325-329.
- [4] F. ALBERCHT, *Despre puncte singulare și soluții periodice*, « Comunicările Acad. R.P.R. », t. V Nr. 7, pp. 1035-1041 (1955).
- [5] T. LEVI-CIVITA, *Sopra alcuni casi di instabilità*, « Ann. di Mat. », 3 serie, T. 5, pp. 221-308 (1901).

**Meccanica razionale.** — *Sulle basi della termomeccanica* (\*).

Nota I di CLIFFORD TRUESDELL, presentata (\*\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA. — Sebbene molti autori <sup>(1)</sup> si siano occupati della termodinamica dei mezzi eterogenei nei quali possono avere luogo simultaneamente i movimenti di diffusione materiale e le trasformazioni chimiche, mi pare che i fondamenti non siano ancora perfettamente definiti. Infatti se le equazioni che reggono gli scambi di massa tra i componenti e la condizione che esprime la conservazione della massa totale sono state stabilite circa mezzo secolo fa, per le azioni dinamiche si parla spesso degli « sforzi parziali », senza però scrivere per essi alcuna specifica equazione <sup>(2)</sup>. Inoltre per il bilancio dell'energia totale ci si limita sempre ad una equazione riferita alla miscela, equazione piuttosto intuita che dedotta matematicamente, e in generale diversa secondo l'autore che la propone.

Oggetto di questa Nota sarà l'esporre una teoria soddisfacente delle miscele eterogenee, e ci serviranno di guida i seguenti principii:

1° *Ogni proprietà del movimento medio è conseguenza matematica delle proprietà del movimento dei componenti.*

(\*) Lavoro eseguito in base ad accordi tra lo U. S. Office of Naval Research e l'Università d'Indiana.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) Mi limito a citare:

P. DUHEM, « Annales de l'École norm. Paris » (3), 10, 187 (1893), spec. Ch. II; anche *Traité d'énergétique*, Paris, 1911, spec. Ch. XIV.

D. HILBERT, *Göttingen Vorlesungen über die Mechanik der Continua*, 1906-7, inedite.

G. JAUMANN, « Sitzungsber. Akad. Wien » (II a), 120, 385-530 (1911), spec. §§ I, IV, VIII.

E. LOHR, « Denkschriften Akad. Wien », 93, 339-421 (1917), spec. §§ 5, 7, 8, 12, 15.

C. ECKART, « Phys. Rev. » (2), 58, 269-275, 924 (1940).

G. MEIXNER, « Annalen der Phys. » (5), 39, 333-356 (1941); 43, 244-270 (1943).

B. LEAF, « Phys. Rev. » (2), 70, 748-758 (1946).

S. R. DE GROOT, *Thermodynamics of irreversible processes*, Amsterdam, 1952.

(2) Il metodo di Duhem fa eccezione in ciò che dall'ipotesi generale dell'esistenza delle energie potenziali estrinseca e mutua per il sistema completo, derivano equazioni che debbono reggere i componenti della miscela. Ciò non ostante, nel corso della deduzione Duhem aggiunge ipotesi ulteriori che riguardano l'azione di un componente sull'altro, ipotesi queste, che sono forse sufficientemente generali, ma non esplicitano gli effetti della diffusione. Cfr. l'eq. (149) del suo libro citato.

Anche il lavoro di Leaf fa eccezione, ma in senso opposto: Leaf scrive, infatti, equazioni che reggono i componenti, cioè le equazioni (6.1) e (7.1) della parte seconda del lavoro attuale con  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{q}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ , ma, eccezione fatta del ragionamento che riguarda l'equazione del calore, non ne derivano i principii corrispondenti per la miscela.

I dottori W. Nachbar, F. Williams e S. Penner hanno avuto la gentilezza di inviarmi un loro manoscritto recente sullo stesso argomento del lavoro attuale, ma non si trova nel loro sviluppo né l'idea centrale del ragionamento, vale a dire l'identità fondamentale del § 3, né alcuna indicazione dei postulati essenziali (6.6) e (7.9).



2° Se tutti gli effetti della diffusione sono ben presi in considerazione, le equazioni per il movimento medio coincidono con le equazioni che reggono il moto di un mezzo semplice. Cioè il mezzo totale non « sa » se è eterogeneo o omogeneo.

Questo secondo principio è conforme ai risultati recentissimi della meccanica statistica <sup>(3)</sup>, ma in questa Nota si preferisce uno sviluppo puramente fenomenologico, che ora comincio ad esporre.

2. PREMESSE E DEFINIZIONI CINEMATICHE. - Sia  $\mathbf{X}_A$  una particella del costituente  $A$ , e l'equazione del suo moto, indicando con  $\mathbf{x}$  le coordinate spaziali e con  $t$  il tempo, sia

$$(2.1) \quad x^k = f_A^k(\mathbf{X}_A, t).$$

La velocità propria della particella  $\mathbf{X}_A$  è il vettore  $\dot{\mathbf{x}}_A$  definito da

$$(2.2) \quad \dot{x}_A^k \equiv \left. \frac{\partial f_A^k}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_A = \text{cost.}}$$

(Nel seguito, si sottintende la convenzione sommatoria degli indici tensoriali  $k, l, \dots$ , che possono assumere i valori 1, 2, 3, ma non per gli indici enumerativi  $A, B, \dots$ , che possono assumere i valori 1, 2,  $\dots$ ,  $K$ ).

Sia  $\rho_A$  la densità assoluta del componente  $A$ . Allora la densità totale  $\rho$  della miscela è

$$(2.3) \quad \rho \equiv \sum_{A=1}^K \rho_A.$$

La *concentrazione* (assoluta)  $c_A$  è definita da

$$(2.4) \quad c_A \equiv \rho_A / \rho;$$

perciò

$$(2.5) \quad \sum_{A=1}^K c_A = 1.$$

La *velocità media*  $\dot{\mathbf{x}}$  si definisce in modo che la quantità di moto specifica corrispondente (prodotto di  $\dot{\mathbf{x}}$  per la densità  $\rho$  della miscela) sia uguale alla somma delle quantità di moto dei componenti:

$$(2.6) \quad \rho \dot{\mathbf{x}} \equiv \sum_{A=1}^K \rho_A \dot{\mathbf{x}}_A \quad \text{o} \quad \dot{\mathbf{x}} \equiv \sum_{A=1}^K c_A \dot{\mathbf{x}}_A.$$

(3) W. NOLL, « J. rational mech. anal. », 4, 627-646 (1955), ha dimostrato che le equazioni di campo per un mezzo continuo si deducono rigorosamente dalla meccanica statistica classica di un insieme, le cui molecole, in numero qualsiasi, possono tutte differire fra loro.

La *velocità di diffusione*  $\mathbf{u}_A$  del componente  $A$  è definita da

$$(2.7) \quad \mathbf{u}_A \equiv \dot{\mathbf{x}}_A - \dot{\mathbf{x}},$$

da cui segue

$$(2.8) \quad \sum_{A=1}^K \rho_A \mathbf{u}_A = 0, \quad \sum_{A=1}^K c_A \mathbf{u}_A = 0.$$

Conviene introdurre due derivate sostanziali  $\dot{Q}$  e  $\dot{\bar{Q}}$ , di cui l'una si riferisce al movimento medio, l'altra al movimento del componente  $A$ :

$$(2.9) \quad \dot{Q} \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} + Q_{,k} \dot{x}^k, \quad \dot{\bar{Q}} \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} + Q_{,k} \dot{x}_A^k;$$

e quindi:

$$(2.10) \quad \dot{\bar{Q}} - \dot{Q} = Q_{,k} u_A^k.$$

Pure da (2.7), (2.9) e (2.8) segue

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{A=1}^K c_A \frac{1}{2} \mathbf{u}_A^2 &= \sum_{A=1}^K c_A u_{Ak} \left[ \dot{\bar{x}}_A^k - \frac{\partial \dot{x}_A^k}{\partial t} - \dot{x}_{A,l}^k \dot{x}_A^l \right], \\ &= \sum_{A=1}^K c_A u_{Ak} \left[ \dot{\bar{x}}_A^k - \dot{x}_{A,l}^k (\dot{x}^l + u_A^l) \right], \\ &= \sum_{A=1}^K c_A u_{Ak} \dot{\bar{x}}_A^k - \sum_{A=1}^K c_A u_A^k u_A^l d_{kl}, \end{aligned} \right.$$

dove

$$(2.12) \quad d_{kl} \equiv \frac{1}{2} (\dot{x}_{k,l} + \dot{x}_{l,k}).$$

3. UNA IDENTITÀ FONDAMENTALE. — Per una funzione qualunque  $Q_A$ , da (2.9) segue

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho_A \dot{Q}_A &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_A Q_A) + (\rho_A Q_A \dot{x}_A^k)_{,k} - Q_A \left[ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\rho_A \dot{x}_A^k)_{,k} \right], \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho_A Q_A) + (\rho_A Q_A \dot{x}_A^k)_{,k} + (\rho_A Q_A u_A^k)_{,k} - Q_A \left[ \frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\rho_A \dot{x}_A^k)_{,k} \right]. \end{aligned} \right.$$

Si ponga

$$(3.2) \quad Q \equiv \sum_{A=1}^K c_A Q_A.$$

Sommando (3.1) da  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$  ad  $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ , si ottiene

$$(3.3) \quad \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} c_{\mathbf{A}} \dot{Q}_{\mathbf{A}} = \dot{Q} + \frac{Q}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \dot{x}^k)_{,k} \right] + \\ + \frac{1}{\rho} \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} (\rho_{\mathbf{A}} Q_{\mathbf{A}} u_{\mathbf{A}}^k)_{,k} - \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} \frac{Q_{\mathbf{A}}}{\rho} \left[ \frac{\partial \rho_{\mathbf{A}}}{\partial t} + (\rho_{\mathbf{A}} \dot{x}_{\mathbf{A}}^k)_{,k} \right].$$

Questa *identità fondamentale* permette di dedurre dai bilanci delle singole  $Q_{\mathbf{A}}$  il bilancio della quantità media  $Q$ , definita da (3.2).

4. BILANCIO DELLA MASSA. - Nel corso dei movimenti e delle trasformazioni chimiche, la massa totale del componente  $\mathbf{A}$  non deve necessariamente restare costante, poiché i vari componenti possono scambiarsi a vicenda parte della loro massa. Definiremo la *rapidità massica*  $\hat{c}_{\mathbf{A}}$  del componente  $\mathbf{A}$  mediante l'equazione:

$$(4.1) \quad \rho \hat{c}_{\mathbf{A}} \equiv \frac{\partial \rho_{\mathbf{A}}}{\partial t} + (\rho_{\mathbf{A}} \dot{x}_{\mathbf{A}}^k)_{,k}.$$

Da (2.9) seguono

$$(4.2) \quad \rho \hat{c}_{\mathbf{A}} = \rho \hat{c}_{\mathbf{A}} - c_{\mathbf{A}} (\rho u_{\mathbf{A}}^k)_{,k}, \quad \rho \dot{c}_{\mathbf{A}} = \rho \hat{c}_{\mathbf{A}} - (\rho_{\mathbf{A}} u_{\mathbf{A}}^k)_{,k}.$$

In (3.3) si ponga  $Q_{\mathbf{A}} = 1$  (quindi, dalla (2.5), anche  $Q = 1$ ). Si ottiene l'identità

$$(4.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \dot{x}^k)_{,k} = \rho \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} \hat{c}_{\mathbf{A}},$$

da cui segue

TEOREMA I. - *Affinché sia*

$$(4.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \dot{x}^k)_{,k} = 0$$

*occorre e basta che*

$$(4.5) \quad \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} \hat{c}_{\mathbf{A}} = 0.$$

Pertanto le equazioni (4.4) e (4.5) sono espressioni equivalenti della conservazione della massa totale della miscela.

Sostituendo (4.4) e (4.1) in (3.3), si deduce una forma più semplice dell'*identità fondamentale*, cioè

$$(4.6) \quad \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} c_{\mathbf{A}} \dot{Q}_{\mathbf{A}} = \dot{Q} + \frac{1}{\rho} \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} (\rho_{\mathbf{A}} Q_{\mathbf{A}} u_{\mathbf{A}}^k)_{,k} - \sum_{\mathbf{A}=\mathbf{I}}^{\mathbf{K}} \hat{c}_{\mathbf{A}} Q_{\mathbf{A}}.$$



dove sono evidenti gli effetti della diffusione e della creazione delle masse componenti sull'incremento temporale della quantità media  $Q$ . Per esempio, se si pone  $Q_A = \dot{x}_A^k$ , da (2.6) e da (4.6) segue

$$(4.7) \quad \sum_{A=1}^K c_A \ddot{x}_A^k = \ddot{x}^k + \frac{1}{\rho} \sum_{A=1}^K (\rho_A u_A^k u_A^l)_{,l} - \sum_{A=1}^K \hat{c}_A u_A^k,$$

identità che mostra che l'accelerazione  $\ddot{x}$  del movimento medio non è la semplice media delle accelerazioni  $\ddot{x}_A$  dei movimenti particolari.

In una Nota che seguirà, applicherò alla quantità di moto e alla energia un ragionamento del tutto analogo a quello che è stato or ora usato nella deduzione del risultato, ormai classico, che esprime il Teorema I. Terminerò la presente Nota con una digressione che offre un'interpretazione chimica spesso molto comoda, anche se non necessaria.

5. DIGRESSIONE NELL'INTERPRETAZIONE CHIMICA DELLE EQUAZIONI CHE ESPRIMONO LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA <sup>(4)</sup>. — Dei  $K$  componenti, siano i primi  $P$  sostanze monoatomiche, i rimanenti, sostanze pluriatomiche. Allora, i *pesi atomici e molecolari* soddisfano all'equazione

$$(5.1) \quad M_A = \sum_{B=1}^P n_{AB} M_B, \quad A = P+1, P+2, \dots, K,$$

dove  $n_{AB}$  è il numero degli atomi della sostanza atomica  $B$  in una molecola della sostanza composta  $A$ . (Se togliamo la condizione, tuttavia qui non usata, che gli  $n_{AB}$  siano numeri non-negativi, il procedimento formale che seguiremo si può applicare egualmente a diversi processi di trasformazione fisica: ioni in soluzione, atomi eccitati a vari livelli di energia, ecc.). Se si pone anche  $n_{AB} \equiv \delta_{AB}$  per  $A \leq B$  e  $n_{AB} \equiv 0$  per  $B > P$  (5.1) si può scrivere

$$(5.2) \quad M_A = \sum_{B=1}^K n_{AB} M_B, \quad A = 1, 2, \dots, K.$$

Un'espressione dell'indistruttibilità delle sostanze atomiche è

$$(5.3) \quad \sum_{A=1}^K n_{AB} \hat{c}_A / M_A = 0.$$

Se moltiplichiamo questa equazione per  $M_B$  e sommiamo da  $B=1$  a  $B=K$ , da (5.2) segue (4.5), che, come è già dimostrato, esprime la conservazione della massa totale.

La (5.3) implica un'identità valida per una funzione arbitraria  $g_A$ , da cui si potrebbero dedurre numerose conseguenze. Sia  $g_A^*$  la differenza tra  $g_A$  e la sua equivalente nelle sostanze atomiche, cioè

$$(5.4) \quad g_A^* \equiv g_A - \sum_{B=1}^P n_{AB} \frac{M_B}{M_A} g_B.$$

(4) Cfr. ECKART, op. cit.

(Quindi  $g_A^* = 0$  se  $A \leq P$ ). Allora si ha

$$(5.5) \quad \sum_{A=1}^K \hat{c}_A g_A = \sum_{A=P+1}^K \hat{c}_A g_A^*.$$

Se ci sono  $k$  reazioni chimiche, siano  $J_a$  ( $a = 1, 2, \dots, k$ ) le loro *velocità di reazione*; allora

$$(5.6) \quad \rho \hat{c}_A = \sum_{a=1}^k N_{Aa} J_a,$$

dove gli  $N_{Aa}$  sono proporzionali ai numeri stechiometrici. Siccome le velocità  $J_a$  sono indipendenti, come condizione equivalente a (4.5) per la conservazione della massa totale abbiamo

$$(5.7) \quad \sum_{A=1}^K N_{Aa} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, k.$$

Equivalente al postulato più dettagliato (5.3) è

$$(5.8) \quad \sum_{A=1}^K n_{AB} N_{Aa} / M_A = 0, \quad \begin{array}{l} a = 1, 2, \dots, k, \\ B = 1, 2, \dots, P. \end{array}$$

**Fisica matematica.** — *Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica.* Nota di GIOVANNI CARINI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. In una prima fase, le ricerche sulla magneto-idrodinamica sono state limitate ai casi in cui le grandezze caratteristiche del fenomeno dipendono da una sola coordinata spaziale e dal tempo.

Ciò va bene finché si ricerca l'influenza di un campo magnetico sul moto di una massa nebulosa infinitamente estesa.

Ma se si vogliono studiare le variazioni del campo magnetico e le conseguenti pulsazioni di una massa fluida cosmica, per esempio di forma sferoidica, bisognerà determinare le soluzioni che dipendono, in generale, dal posto e dal tempo <sup>(1)</sup>.

In un primo momento, il prof. C. Agostinelli ha avuto l'idea di ricercare le soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica, in cui gli elementi del campo elettromagnetico e del moto dipendono dal posto, ma non dal tempo.

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) C. AGOSTINELLI, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica interessanti la Cosmogonia*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XVII, 1954.

Egli determina le soluzioni stazionarie in cui, nel generico punto P del mezzo, l'intensità  $\mathbf{H}$  del campo magnetico è proporzionale alla velocità  $\mathbf{v}$  di P. Successivamente dimostra che è compatibile con le equazioni di Alfvén

$$\begin{aligned}
 & \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\
 & \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\
 & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\
 & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\
 & \mathbf{I} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\
 & \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \operatorname{grad} p \right) + \operatorname{grad} U \\
 & \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

un moto rotatorio uniforme della massa cosmica (incomprimibile), immersa in un campo magnetico omogeneo  $\mathbf{H}_0$ , diretto secondo l'asse di rotazione, con un campo indotto  $\mathbf{h}$  proporzionale alla velocità.

Ora, nella Nota *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica* <sup>(2)</sup>, ho esposto le ragioni che conducono a sostituire al sistema (1) il seguente:

$$\begin{aligned}
 & \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\
 & \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\
 & \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} & \lambda &= \frac{\epsilon \mu - 1}{c} \\
 & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \\
 & \mathbf{I} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\
 & \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \operatorname{grad} p \right) \\
 & \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

ottenuto, associando alle equazioni di Eulero, le equazioni di Minkowski (approssimate ai termini di primo ordine in  $\beta = v/c$ ).

Ivi, ho affermato che i due sistemi (1) e (2) conducono, in generale, a risultati diversi.

Qui vogliamo mostrare come si modificano i risultati, nel caso che si ricerchi se sono possibili dei moti rotatori uniformi della massa cosmica (incomprimibile), immersa in un campo magnetico uniforme e costante  $\mathbf{H}_0$ , diretto secondo l'asse di rotazione.

(2) Cfr. questi « Rendiconti » ser. VIII, vol. XXI, p. 436 (1956).



Troveremo che siffatti moti sono compatibili col sistema (2) e che il campo indotto  $\mathbf{h}$  è ortogonale ad  $\mathbf{H}_0$  e diminuisce al crescere della distanza  $r$  dall'asse di rotazione.

Applicando, poi, il procedimento usato alle equazioni (1) di Alfvén si deduce che sono compatibili col sistema (1) le soluzioni stazionarie, già trovate dal prof. Agostinelli, in cui il campo indotto è proporzionale a  $\mathbf{v}$ , ed altre, in cui il campo indotto decresce con l'aumentare di  $r$ .

2. Se si trascura  $\dot{\mathbf{D}}$  di fronte ad  $\mathbf{I}$  e si suppone il fluido incomprimibile, dalle (2), si deducono le equazioni (3)

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H})' = -\frac{c^2}{\sigma} \text{rot rot } \mathbf{H} + \mu \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \\ \text{div } (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H}) = 0 \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{rot } \mathbf{H} \wedge (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H}) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{array} \right. \quad \eta = \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sigma}$$

Tenendo presente che

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad } v^2,$$

le soluzioni stazionarie del sistema (3) si ottengono muovendo dalle equazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } (\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} + \xi \text{rot } \mathbf{H}) = 0 \\ \text{div } (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H}) = 0 \\ \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{rot } \mathbf{H} \wedge (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H}) + \text{grad } \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0 \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

dove si è posto  $\xi = \frac{c^2}{\mu \sigma}$ ,  $\eta = \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sigma}$  e si è supposto che la forza  $\mathbf{F}$  derivi dal potenziale  $U$ .

Allo scopo di ricercare se sono compatibili con le (4) dei moti rotatori uniformi della massa cosmica, immersa in un campo magnetico uniforme e costante  $\mathbf{H}_0$ , diretto secondo l'asse di rotazione, supponiamo che la velocità della generica particella  $P$  sia espressa da

$$(5) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

dove  $\boldsymbol{\omega}$  è un vettore costante ed  $r$  è la distanza di  $P$  dall'asse.

Con ciò ovviamente la condizione  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  è verificata.

Nel generico punto  $P$  l'intensità magnetica totale  $\mathbf{H}$ , essendo  $\mathbf{h}$  il campo indotto, è data da

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} + \mathbf{H}_0.$$

Per la natura del fenomeno considerato, è plausibile pensare che la  $\mathbf{h}$  sia rappresentata da

$$\mathbf{h} = a(r) \mathbf{v} + b(r) \mathbf{r} + q(r) \boldsymbol{\omega},$$

dove  $a(r)$ ,  $b(r)$ ,  $q(r)$  sono tre funzioni di  $r$  da determinare in modo che la (5) e la

$$\mathbf{H} = a\mathbf{v} + b\mathbf{r} + q\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_0$$

soddisfino alle prime due delle (4).

La terza delle (4) servirà per determinare la pressione in ogni punto della massa fluida rotante.

Essendo

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} = br^2 \boldsymbol{\omega} - (q\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_0) \boldsymbol{\omega} \mathbf{r} \quad ; \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} \mathbf{v}, \quad u = ar^2$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} + \xi \text{rot } \mathbf{H} = -\frac{\xi}{r} \frac{dq}{dr} \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} (q\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}_0) \mathbf{r} + \left( br^2 + \frac{\xi}{r} \frac{du}{dr} \right) \boldsymbol{\omega}$$

$$\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H} = \mu a \mathbf{v} + \left( \mu b - \eta \frac{\omega^2}{r} \frac{du}{dr} \right) \mathbf{r} + \mu \left( q + \frac{\mathbf{H}_0}{\omega} \right) \boldsymbol{\omega},$$

si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } (\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} + \xi \text{rot } \mathbf{H}) = -\xi \left[ \frac{2}{r} \frac{dq}{dr} + r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} \right) \right] \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( br^2 + \frac{\xi}{r} \frac{du}{dr} \right) \mathbf{v} \\ \text{div } (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H}) = 2 \left( \mu b - \eta \frac{\omega^2}{r} \frac{du}{dr} \right) + r \frac{d}{dr} \left( \mu b - \eta \frac{\omega^2}{r} \frac{du}{dr} \right). \end{array} \right.$$

Le prime due equazioni delle (4) saranno identicamente soddisfatte, se si determinano le tre funzioni  $a$ ,  $b$ ,  $q$  come soluzioni delle seguenti

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{r} \frac{dq}{dr} + r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} \right) = 0 \\ \frac{d}{dr} \left( br^2 + \frac{\xi}{r} \frac{du}{dr} \right) = 0 \\ 2 \left( \mu b - \eta \frac{\omega^2}{r} \frac{du}{dr} \right) + r \frac{d}{dr} \left( \mu b - \eta \frac{\omega^2}{r} \frac{du}{dr} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Da queste ultime si deduce

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = j_1 \log r + j_1' \\ a = \frac{m\mu - j_2}{2\eta\omega^2} \frac{\log(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi)}{r^2} + \frac{m'}{r^2} \\ b = \frac{m\eta\omega^2 r^2 + j_2\xi}{r^2(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi)} \end{array} \right.$$

dove  $j_1, j_1', j_2, m, m'$  sono delle costanti.

Osserviamo che a distanza infinita dall'asse di rotazione, il campo  $\mathbf{H}$  dovrà ridursi al campo uniforme e costante  $\mathbf{H}_0$ .

Se si vuole inoltre che la densità di corrente  $\mathbf{I}$  che soddisfa alle equazioni di Eulero-Minkowski sia finita in tutta la massa cosmica, essendo

$$\mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} = c \frac{m\mu - j_2}{\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi} \boldsymbol{\omega} - c \frac{j_1}{r^2} \mathbf{v},$$

si dovrà avere rispettivamente  $j_1 = 0$ ,  $j_2 = 0$ .

Mentre la forza magneto-idrodinamica, nel generico punto P, è espressa da

$$\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge (\mu \mathbf{H} - \eta \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{H}) = -\mu a \frac{\omega^2}{r} \frac{du}{dr} \mathbf{r} + j_2 \frac{1}{r^3} \frac{du}{dr} \mathbf{v}.$$

Ma, muovendosi ogni particella del fluido di moto circolare uniforme, tale forza dev'essere radiale e ciò esige che sia  $j_2 = 0$ .

In conseguenza di ciò, le (7) diventano

$$(8) \quad \begin{cases} q = 0 \\ a = \frac{m\mu}{2\eta\omega^2} \frac{\log(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi)}{r^2} + \frac{m'}{r^2} \\ b = \frac{m\eta\omega^2}{\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi} \end{cases}$$

3. Nei casi in cui si può trascurare  $\eta = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\sigma}$ , le (4) si riducono alle

$$(4') \quad \begin{cases} \operatorname{rot}(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} + \xi \operatorname{rot} \mathbf{H}) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} + \operatorname{grad} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

deducibili dal sistema di Alfvén, mentre le (6) si mutano nelle

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{2}{r} \frac{dq}{dr} + r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} \right) = 0 \\ \frac{d}{dr} \left( br^2 + \frac{\xi}{r} \frac{du}{dr} \right) = 0 \\ 2b + r \frac{db}{dr} = 0. \end{cases}$$

Da qui, con le stesse considerazioni che hanno condotto alle (8), si ottiene

$$\begin{cases} q = 0 \\ a = \frac{m}{2\xi} + \frac{m'}{r^2} \\ b = 0. \end{cases}$$

In conseguenza, si ha la seguente espressione per l'intensità magnetica totale

$$(9) \quad \mathbf{H} = \left( \frac{m}{2\xi} + \frac{m'}{r^2} \right) \mathbf{v} + \mathbf{H}_0.$$



Per  $m' = 0$ , si ritrovano le soluzioni stazionarie che il prof. Agostinelli ha calcolato con un altro procedimento nella Nota citata al n. 1.

4. Se  $\eta$  non è trascurabile, l'espressione dell'intensità magnetica totale è invece

$$(10) \quad \mathbf{H} = \left[ \frac{m\mu}{2\eta\omega^2} \frac{\log(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)}{r^2} + \frac{m'}{r^2} \right] \mathbf{v} + \frac{m\eta\omega^2}{\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2} \mathbf{r} + \mathbf{H}_0,$$

da cui si deduce che il campo indotto  $\mathbf{h}$  è ortogonale all'asse di rotazione e decresce con l'aumentare della distanza  $r$  dall'asse.

Quindi, come si deduce dalla (9) ove si ponga  $m' = 0$ , con le equazioni di Alfvén (1) sono compatibili dei moti rotatori della massa cosmica, immersa in un campo omogeneo  $\mathbf{H}_0$ , in cui il campo indotto  $\mathbf{h}$  aumenta col crescere della distanza  $r$  dall'asse.

Ciò non si verifica, se alle equazioni di Eulero si associano le equazioni di Minkowski, giacché, come segue dalla (10) il campo indotto diminuisce al crescere di  $r$ .

Per le (8), l'espressione della forza ponderomotrice magneto-idrodinamica diviene

$$\mathbf{F} = - \left[ \frac{m^2\mu^3}{2\eta} \frac{\log(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)}{r(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)} + \frac{m m' \mu^2 \omega^2}{r(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)} \right] \mathbf{i} = - \text{grad } f$$

dove  $\mathbf{i}$  è il versore di  $\mathbf{r}$  ed  $f$  è data da

$$\begin{aligned} f &= \frac{m^2\mu^3}{2\eta} \int \frac{\log(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)}{r(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)} dr + m m' \mu^2 \omega^2 \int \frac{dr}{r(\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2)} = \\ &= \frac{m^2\mu^2}{4\eta\xi^2} \left[ \log \mu\xi^2 \log \frac{\eta\omega^2 r^2}{\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{\eta\omega^2 r^2}{\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2} \right)^n \right] + \\ &\quad + \frac{m m' \mu^2 \omega^2}{\xi} \log \frac{r}{\sqrt{\eta\omega^2 r^2 + \mu\xi^2}}. \end{aligned}$$

Dalla terza delle (4) si deduce allora:

$$\text{grad} \left( -\frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{f}{\rho} + \frac{p}{\rho} - U \right) = 0$$

da cui si ottiene l'integrale

$$\frac{p}{\rho} + \frac{f}{\rho} - \frac{\omega^2 r^2}{2} - U = \text{cost},$$

che definisce la pressione in ogni punto della massa fluida cosmica conduttrice.

Le superficie isobariche, ed in particolare la superficie libera, dove la pressione si suppone costante (o nulla) sono quelle di equazione

$$U + \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{f}{\rho} = \text{cost}.$$

**Chimica.** — *Spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa e allo stato cristallino* <sup>(\*)</sup>. Nota di PAOLO CHIORBOLI e ENOS TEDESCHI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. B. BONINO.

Lo spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa fu già preso in considerazione da Damaschun <sup>(1)</sup>, da Samuel e Kahn <sup>(2)</sup> e da Mathieu e Cornevin <sup>(3)</sup>. Le ricerche più recenti son quelle dei due ultimi citati Autori francesi: esse tuttavia risalgono al 1939.

I risultati di queste vecchie esperienze sono riassunti nella tabella I.

TABELLA I.

*Spettro Raman del  $K_3[Co(CN)_6]$  in soluzione acquosa.*

Autore	Radiaz. eccitatrice	Spettro Raman ( $cm^{-1}$ )			
Damaschun (1932) . . . . .	Hg 5461 Å	340	2070	2141	
Samuel-Kahn (1933) . . . . .	Hg 5461 Å	405			2148
Mathieu-Cornevin (1939) . . . .	{ Hg 4358 Å			2137	2149
				(dep.)	(pol.)
	{ Hg 5461 Å	98	406	2139	2152
		(dep.)?	(?)	(dep.)	(pol.)

Mathieu e Cornevin, nel corso delle loro ricerche, rilevarono che le soluzioni di cobalticianuro, solo debolmente gialline se preparate di fresco, andavano gradualmente incupendo se irradiate con le radiazioni violette e turchine della lampada eccitatrice a mercurio, radiazioni, queste, notevolmente assorbite dalle soluzioni medesime, rivelando così una non trascurabile alterazione fotochimica. Nelle loro esperienze perciò detti autori hanno usato come radiazione eccitatrice la riga turchina a 4358 Å dello spettro del mercurio solo per pose fotografiche di durata relativamente breve (circa 24 ore),

(\*) Lavoro eseguito nel Centro Studi di Chimica fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presso l'Istituto chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) « Z. phys. Chem. », 16, 81 (1932).

(2) « Z. Physik », 84, 87 (1933).

(3) « J. Chim. physique », p. 275, 1939.

mentre hanno usato la riga verde a  $5461 \text{ \AA}$ , che non viene assorbita e non provoca alcuna alterazione appena apprezzabile, per pose assai più lunghe. I medesimi autori, esaminando i risultati precedenti di Damaschun, osservano che la riga da lui riportata a  $2070 \text{ cm}^{-1}$  deve essere attribuita senza dubbio al KCN aggiunto alle soluzioni studiate.

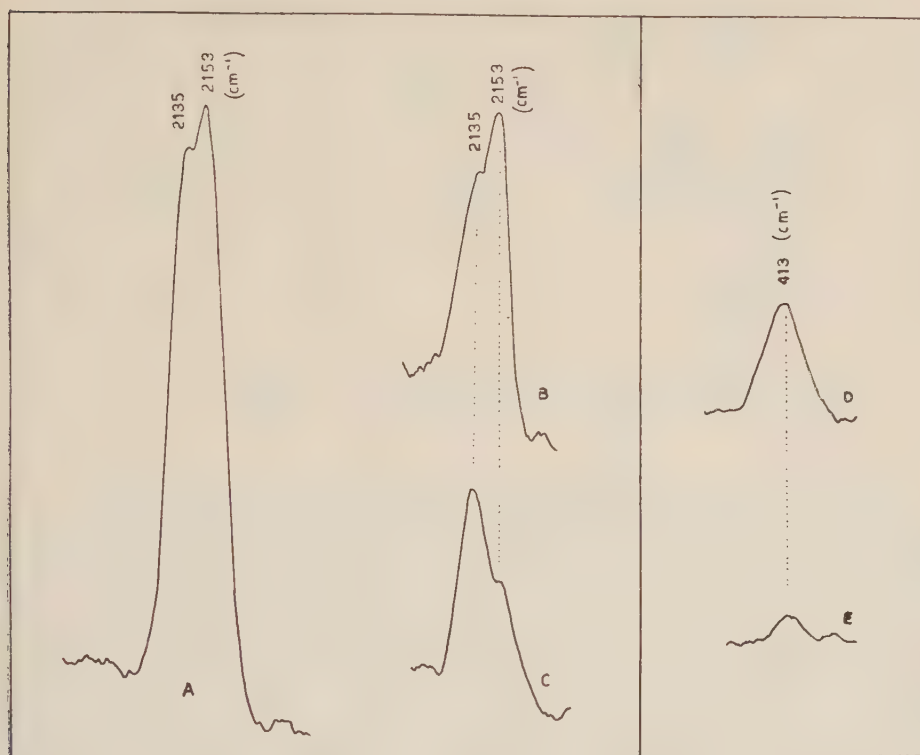


Fig. 1. — Righe Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa (fraz. mol. del soluto 0,02).

A: doppietto a  $2135\text{--}2153 \text{ cm}^{-1}$ , con radiazione eccitatrice non polarizzata;

B, C: lo stesso doppietto con radiazione eccitatrice polarizzata (B: polarizz.  $\perp$ ; C: polarizz.  $\parallel$ ).

D, E: riga a  $413 \text{ cm}^{-1}$ , con radiazione eccitatrice polarizzata (D: polarizz.  $\perp$ ; E: polarizz.  $\parallel$ ).

(Microfotometrie da spettri fotografici)

Noi abbiamo ripreso lo spettro del cobalticianuro potassico<sup>(4)</sup> sia in soluzione acquosa (fraz. mol. 0,02), sia allo stato cristallino, fotograficamente (con pose di 12 ore) e con registrazione fotoelettrica diretta, determinando pure lo stato di polarizzazione delle righe con la tecnica già ampiamente

(4) Questo complesso è stato preparato secondo BENEDETTI e PICHLER [«Z. Anal. Chem.», 70, 258 (1927)] da cianuro cobaltoso fatto reagire con un eccesso di KCN in soluzione acquosa riscaldata all'ebollizione. Il cianuro cobaltoso è stato precipitato da  $\text{CoCl}_2$  e KCN in leggero difetto in soluzione idroalcolica (circa al 20%). Il prodotto è stato ricristallizzato due volte dall'acqua.



descritta in altro lavoro <sup>(5)</sup>, ove sono stati presi in esame gli spettri Raman di ferrocianuri alcalini e alcalino-terrosi. I nostri risultati sono riassunti nella tabella II e nella figura 1.

TABELLA II.

*Nuove determinazioni sperimentali dello spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa e allo stato cristallino.*

Soluzione acquosa . . . .	413 (m) (pol.)	2135 (ff) (dep.)	2153 (ff) (pol.)
Cristallino . . . . .	?	2136 (ff) (dep.)	2152 (ff) (dep.)

m = media; ff = fortissima; pol. = polarizzata; dep. = depolarizzata.

Il doppietto assai caratteristico ed intensissimo a  $2135\text{--}2153\text{ cm}^{-1}$  è del tutto analogo a quello rilevato negli spettri dei ferrocianuri a  $2056\text{--}2090\text{ cm}^{-1}$ : qui le corrispondenti frequenze risultano solo alquanto più alte. La riga a  $2153\text{ cm}^{-1}$ , che negli spettri delle soluzioni acquose risulta polarizzata, è da attribuire all'oscillazione totalsimmetrica di valenza dei legami  $\text{C}\equiv\text{N}$  nella struttura ottaedrica a simmetria  $O_h$  dello ione  $[\text{Co}(\text{CN})_6]^{3-}$  isolato [ $\nu(\text{A}_{1g})$ , fig. 2], e la riga depolarizzata vicina, a  $2135\text{ cm}^{-1}$ , deve considerarsi corrispondente ancora ad una oscillazione di valenza dei gruppi  $\text{C}\equiv\text{N}$ , e cioè alla  $\nu_3(\text{E}_g)$  (ved. fig. 2) (come nel caso dei ferrocianuri), doppiamente degenerare.

Abbiamo potuto rilevare che la riga a  $413\text{ cm}^{-1}$  (corrispondente a quella rilevata da Mathieu e Cornevin a  $406\text{ cm}^{-1}$ ) è polarizzata (ved. fig. 1): essa dunque appartiene alla classe  $\text{A}_{1g}$  ed è perciò attribuibile certamente all'oscillazione totalsimmetrica dei gruppi  $\text{C}\equiv\text{N}$  moventisi rigidamente rispetto all'atomo centrale di cobalto lungo le direzioni  $\text{Co}\text{--}\text{C}$ : può essere quindi considerata la frequenza caratteristica dell'oscillazione di valenza dei legami  $\text{Co}\text{--}\text{C}$ , [ $\nu_2(\text{A}_{1g})$ , fig. 2].

Non abbiamo invece mai rilevato nei nostri spettri (neppure in quelli particolarmente limpidi ed esenti da fondo) la riga di bassissima frequenza, riportata a  $98\text{ cm}^{-1}$  da Mathieu e Cornevin.

Per ciò che riguarda lo spettro del cobalticianuro allo stato cristallino, abbiamo potuto registrare solo l'intenso doppietto a  $2135\text{--}2153\text{ cm}^{-1}$ , che risulta praticamente inalterato. In particolare, anche la riga a  $2135\text{ cm}^{-1}$

(5) CHIORBOLI e CAPPELLINA, « Ann. Chimica », 46, 875 (1956).

propria della oscillazione degenerare  $E_g$  essenzialmente descivibile come oscillazione di valenza dei legami  $C\equiv N$ , non mostra alterazione alcuna né si sdoppia nel campo cristallino. Un comportamento del tutto analogo abbiamo rilevato in precedenza per la riga a  $2056\text{ cm}^{-1}$  dello spettro del ferrocianuro potassico.

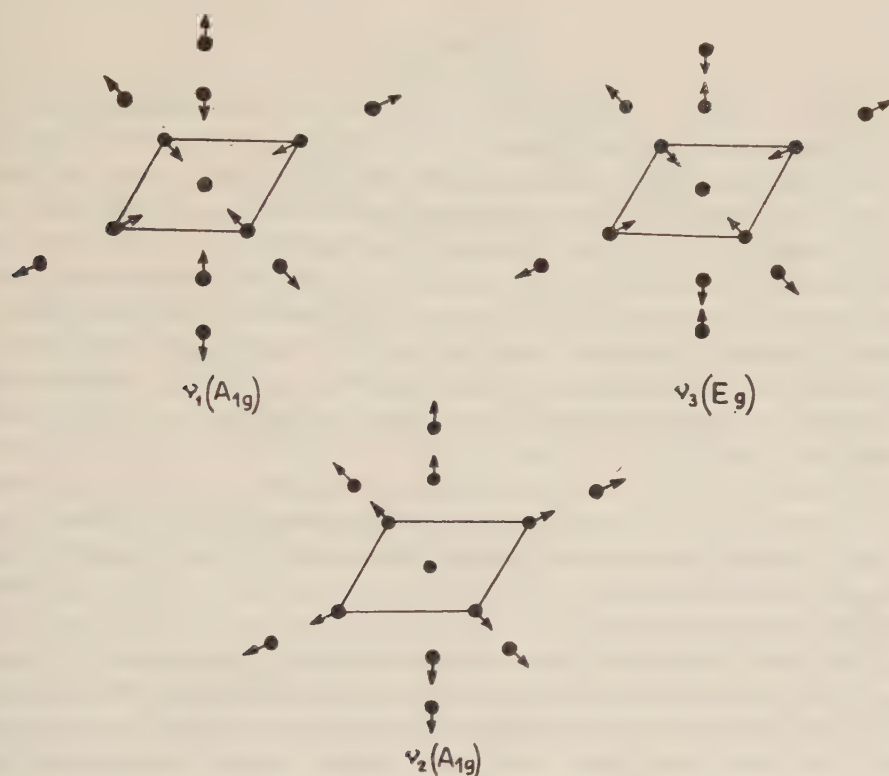


Fig. 2. — Vibrazioni normali dello ione  $[\text{Co}(\text{CN})_6]^{3-}$  corrispondenti alle righe Raman osservate.

Quanto allo stato di polarizzazione delle due righe, risultano entrambe largamente depolarizzate. Riguardo a questo particolare rimandiamo a quanto è stato rilevato a proposito degli spettri Raman dei ferrocianuri allo stato cristallino in un precedente già citato lavoro <sup>(4)</sup>.

Ci è grato ringraziare vivamente il prof. G. B. Bonino per l'interessamento, le discussioni, i consigli.

**Chimica.** — *Analisi di  $^{14}\text{C}$  in etilene o polietilene marcati*<sup>(\*)</sup>.  
Nota di FERDINANDO DANUSSO e GASTONE PAJARO, presentata<sup>(\*\*)</sup>  
dal Socio G. NATTA.

#### INTRODUZIONE.

Indagini chimiche, biochimiche, mediche con radioisotopi hanno assunto, nell'ultimo decennio, rilevante importanza e sviluppo. In particolare la chimica del carbonio è stata oggetto di più profonde indagini mediante l'uso di carbonio isotopico, soprattutto  $^{14}\text{C}$ , ora prodotto correntemente con reattori nucleari.

Alla base di ogni metodo chimico con radioisotopi vi è la misura della radioattività dei composti che interessano, o di altri da essi derivati, effettuata mediante « conteggio » delle radiazioni emesse da campioni opportunamente preparati. La scelta della tecnica di conteggio può quindi essere di fondamentale importanza per il raggiungimento dello scopo della ricerca radiochimica o comunque per le facilitazioni operative che da tale scelta possono derivare.

Nel quadro di un complesso di lavori sulla polimerizzazione di olefine, di cui è stato riferito in parte in recenti pubblicazioni<sup>(1)</sup>, sono in corso ricerche con composti idrocarburici insaturi contenenti  $^{14}\text{C}$ , per le quali è stato necessario mettere a punto metodi di preparazione di composti marcati e di misura di radioattività.

Riteniamo interessante riportare qui, con qualche dettaglio, la tecnica da noi utilizzata per la misura di attività di etilene marcata, tecnica applicabile, con opportune lievi modifiche, anche ad altre olefine o a certi composti idrocarburici insaturi. Con essa l'etilene viene polimerizzata con catalizzatori ad elevata attività catalitica, del tipo Ziegler<sup>(2)</sup>, agenti a pressione ordinaria ed il conteggio effettuato su lamine del polimero ottenuto. Questo metodo, come descritto, ha il vantaggio di una particolare semplicità operativa; inoltre i campioni per la misura hanno considerevole regolarità geometrica, omogeneità di volume e specialmente di superficie.

La tecnica sarà discussa in base ai risultati di conteggi in « strato infinitamente spesso », ma mediante la curva di autoassorbimento, qui determinata, può essere estesa a conteggi in strato sottile ed eventualmente alla misura assoluta della radioattività di etilene o di polietilene marcati.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta 15 dicembre 1956.

(1) G. NATTA, « Atti Accad. Naz. Lincei », Mem. VIII, 4 (1955); G. NATTA, P. PINO, P. CORRADINI, F. DANUSSO, E. MANTICA, G. MAZZANTI, G. MORAGLIO, « J. Am. Chem. Soc. », 77, 1708 (1955); « J. Polym. Sc. », 16, 143 (1955); « Makrom. Chem. », 16, 77 (1955); « Chimica e Industria », 37, 888 (1955); 38, 124 (1956); 38, 751 (1956).

(2) K. ZIEGLER, E. HOLZKAMP, H. BREIL, « Angew. Chem. », 67, 541 (1955); K. ZIEGLER, H. MARTIN, « Makrom. Chem. », 18-19, 186 (1956).



## TECNICA SPERIMENTALE.

a) *Preparazione dell'etilene marcata*. — Si è seguito il metodo di Cox e Warne <sup>(3)</sup>, partendo da  $\text{BaC}_2^*$  <sup>(4)</sup>, da noi preparato per reazione di  $\text{BaCO}_3$ , proveniente da Harwell, con Ba metallico <sup>(5)</sup>. Si è partiti da 0,5 % mmoli di  $\text{BaC}_2^*$ , con attività di 1 mc e si è ottenuta etilene con resa di circa 95 %. L'etilene non dava colorazione con soluzione di cloruro rameoso ammoniacale ed era completamente assorbita, sotto agitazione, da una soluzione di  $\text{HgSO}_4$  in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  <sup>(6)</sup>. Essa è stata infine diluita a 2000  $\text{cm}^3$  con etilene al 99,6 % di purezza e conservata in una buretta, su soluzione satura di  $\text{CaCl}_2$ , da cui veniva prelevata e diluita ulteriormente per le esperienze.

b) *Polimerizzazione*. — La polimerizzazione veniva effettuata in un palloncino da 50  $\text{cm}^3$ , a due colli, munito di agitatore magnetico sul fondo e collegato, con rubinetti, ad una fonte di azoto e ad una pipetta a battente di mercurio, contenente l'etilene da analizzare. Sotto battente di  $\text{N}_2$  ed agitazione, si introducevano 25  $\text{cm}^3$  di benzolo, una soluzione di  $\text{TiCl}_4$  ed una di composto alluminio-organico in benzolo, nelle quantità di volta in volta stabilite. Preparato così il catalizzatore, dopo aver portato a vuoto moderato il palloncino, si lasciava entrare l'etilene, che nelle condizioni descritte polimerizza in pochi minuti a rese elevate.

Terminata l'operazione di polimerizzazione, si asportava l'etilene residua con corrente di  $\text{N}_2$ , fissandola con  $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{HgSO}_4$  in gorgogliatori. Si decomponeva poi il catalizzatore con un eccesso di alcol metilico e si recuperava il polimero polverulento per filtrazione. Successivamente il polimero veniva lavato, sul filtro, con metanolo contenente  $\text{HCl}$  e con acetone. La purezza del polimero così preparato è soddisfacente: ciò è dimostrabile effettuando successive soluzioni del polimero in toluolo bollente e precipitazioni in metanolo, che lasciano invariata l'attività specifica di esso. L'essiccazione del polimero può essere effettuata sullo stesso filtro, sotto lampada a raggi infrarossi.

c) *Preparazione dei campioni*. — 40–50 mg. di polvere di polimero venivano stampati tra fogli di alluminio, con distanziatori di circa 0,3 mm, in una piccola pressa a 140–150° e circa 100  $\text{kg}/\text{cm}^2$ . Si otteneva così un piccolo foglio da cui, per tranciatura con fustella, venivano ricavati dischi di circa 14 mm di diametro. I dischi venivano infine introdotti in piattelli di alluminio e fissati con una mascherina, pure di alluminio, in modo che essi avevano una superficie circolare libera per il conteggio di 1,33  $\text{cm}^2$ .

d) *Conteggio*. — Per il conteggio si è usato un contatore Geiger a finestra sottile di mica da 1,8  $\text{mg}/\text{cm}^2$ . Tutte le misure riportate sono corrette per il fondo; inoltre il conteggio era condotto per un tempo sufficiente a

(3) W. J. ARROL, R. GLASCOCK, « Nature », 161, 932 (1948); « J. Chem. Soc. », 335 (1949); vedi anche (5).

(4) La presenza di carbonio attivo nei composti sarà sempre indicata col simbolo  $\text{C}^*$ .

(5) J. D. COX, R. J. WARNE, « J. Chem. Soc. », 1893 (1951).

(6) FRANCIS, « Anal. Chem. », 17, 703 (1945).

ridurre l'errore standard per fluttuazione statistica a circa l'1 %. Nessuna correzione è stata fatta per l'autoassorbimento (per le misure riportate nelle Tabelle I e II), essendo i campioni, preparati come sopra, «infinitamente spessi» rispetto alla debole emissione  $\beta$  del  $^{14}\text{C}$ .

TABELLA I.

*Misure di attività di polietileni preparati con diverse composizioni e concentrazioni catalitiche (\*).*

N° prova	Composto organico dell'alluminio	Composizione miscela catalitica		Attività specifica del polimero <sup>(a)</sup> c/m
		$\text{TiCl}_4$ (moli $\times 10^{-3}$ )	composto Al (moli $\times 10^{-3}$ )	
3	$\text{Al}(\text{IBu})_3$	0,84	1,70	2.480
4	»	0,28	0,68	2.540
5	»	0,28	0,68	2.524
6	$\text{Al}(\text{Et})_3$	0,84	2,3	2.490
7	»	0,84	2,3	2.520
10	»	0,84	2,3	2.490
13	»	0,64	15	2.520
11	$\text{AlEt}_2\text{Br}$	2,43	1,7	2.473

(\*) Polimerizzazione a temperatura ambiente; volumi di etilene polimerizzati: 100-180  $\text{cm}^3$ ; solvente: 25  $\text{cm}^3$  di benzolo.

(a) Valori corretti.

## RISULTATI.

La tecnica complessiva di misura qui descritta può essere *a priori* soggetta a qualche critica per quanto riguarda il processo di polimerizzazione. Si potrebbe, infatti, pensare che qualche modifica nel contenuto in  $^{14}\text{C}$  possa intervenire nel passaggio da monomero a polimero, ad opera di eventuali processi secondari, tra cui soprattutto: *a*) scambi tra olefina marcata e radicali organici del catalizzatore; *b*) arricchimenti isotopici; *c*) introduzione chimica di catalizzatore o parti di esso, nelle macromolecole del polimero, *d*) inglobamento fisico di frammenti di catalizzatore nel polimero.

L'ultimo processo può essere immediatamente escluso, per importanza, dato che, con la tecnica descritta di preparazione del polimero, le impurezze, come già accennato, sono contenute in grado così ridotto (dell'ordine di  $10^{-3}$ ), che il loro effetto è certamente compreso negli errori sperimentali della misura della radioattività.

Per quanto riguarda la possibilità di scambi tra olefina marcata e composti metallorganici contenuti nella miscela catalitica, come ad es.:



si può già escludere un effetto sensibile del processo in base ai dati delle Tabelle I e II. Infatti, i polietileni ottenuti da una stessa etilene marcata con vari tipi e quantità diverse di reagenti catalitici, hanno attività riproducibile e costante (Tabella I). Particolare significato ha il fatto che le attività dei polietileni ottenuti con alluminio triisobutile sono in accordo con quelle dei polimeri ottenuti con gli altri composti dell'alluminio (ved. anche Tabella II), poiché in tal caso, e nelle nostre condizioni di esperienza, anche se vi fosse stato scambio tra  $\text{Al}(\text{IBu})_3$  ed etilene, l'isobutilene che si sarebbe formato non sarebbe stato in grado di polimerizzare, né di copolimerizzare, e quindi di alterare la misura di attività del polimero.

TABELLA II.

*Analisi di etileni di differente diluizione isotopica (\*).*

N° prova	Frazione di etilene marcata originale nella fase monomerica	Attività specifica del polimero c/m <sup>(a)</sup>		Frazione calcolata di etilene marcata originale nella fase monomerica <sup>(b)</sup>
		con catalizzatore da $\text{Al}(\text{IBu})_3$	con catalizzatore da $\text{Al}(\text{Et})_3$	
9	I	17.428	17.500	I
14	0,460	7.835	7.765	0,460
2	0,135	2.360	2.324	0,134
1	0,089	1.548	1.532	0,088
12	0,080	1.391	1.387	0,079
8	0,022	384	387	0,022
15	0,012	219	216	0,012

(\*) Polimerizzazioni a temperatura ambiente di circa 100 cm<sup>3</sup> di etilene. Miscela catalitica: 0,28 m moli di  $\text{TiCl}_4$  e 0,68 m moli di composto alluminio-organico in 25 cm<sup>3</sup> di benzolo.

(a) Valori corretti.

(b) Dall'attività specifica sperimentale dei corrispondenti polimeri, come rapporto tra l'attività specifica del polimero dell'etilene diluita e l'attività specifica del polimero dell'etilene originale (di valore medio: 17.464 c/m).

Anche per quanto riguarda eventuali frazionamenti isotopici, dalla Tabella II risulta chiara l'assenza di un'influenza di tali processi, poiché le attività di polimeri ottenuti con etileni a diluizioni isotopiche molto diverse sono in ottimo accordo con i rapporti di diluizione. Inoltre, questi polimeri sono stati preparati a rese di conversione in alcuni casi assai differenti (da 60 % a 95 %), ciò che non ha portato ad influenze di sorta.

Una dimostrazione e conferma particolarmente significativa dell'assenza di tutte le influenze nocive di cui sopra, sulle misure di radioattività, è stata ottenuta con prove di combustione del monomero e del corrispondente polimero, con conteggio su  $\text{BaCO}_3$ . Etilene di uno stesso stock è stata bruciata in fornello ad ossido di rame, a 875°-900°, e la  $\text{CO}_2$  prodotta è stata assorbita su  $\text{NaOH}$  e quindi precipitata con  $\text{BaCl}_2$  in presenza di  $\text{NH}_4\text{Cl}$ ,



come  $\text{BaCO}_3$ . Da tre combustioni indipendenti si è ottenuta un'attività media di 187,0 c/m. Dai polimeri ottenuti con quattro polimerizzazioni indipendenti della stessa etilene, per combustione col metodo Van Slyke <sup>(7)</sup> si è ottenuto  $\text{BaCO}_3$  con attività media di 187,3 c/m. Come ulteriore controllo, da questi dati si è calcolata l'attività che doveva avere il polimero stesso, ottenendo rispettivamente 2.609 e 2.612. Il conteggio sperimentale su dischi di polimero ha dato un valore medio di 2.614, in ottimo accordo coi valori calcolati.

In base a tutti i dati che precedono si può ritenere dimostrata la validità del metodo proposto.

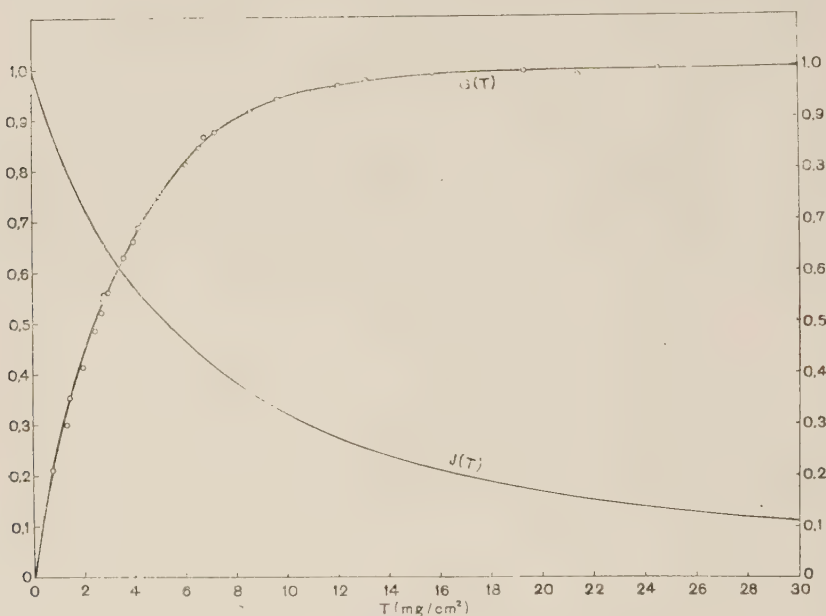


Fig. 1.

Per rendere possibili misure su campioni a spessore inferiore a quello di saturazione e per permettere di effettuare eventuali determinazioni di attività assolute, abbiamo studiato l'autoassorbimento dei polietileni altamente cristallini qui prodotti.

Nel diagramma di fig. 1 è riportata la curva di autoassorbimento ottenuta con misure ad efficienza geometrica del 30%, su dischi di polietilene a vari spessori, montati su alluminio. L'ordinata del diagramma è la frazione di massima attività  $G(T)$  <sup>(8)</sup>; l'ascissa lo spessore  $T$  del campione in  $\text{mg}/\text{cm}^2$ . Da questa curva sperimentale si è calcolata la funzione  $J(T)$  <sup>(9)</sup>, cioè la frazione di massima attività specifica, usando per il coefficiente di autoassorbimento il valore  $\mu = 0,294 \text{ cm}^2/\text{mg}$ , ottenuto per estrapolazione geometrica della tangente a  $G(T)$  per  $T = 0$ . La curva  $J(T)$  è rappresentata nella stessa figura 1.

(7) D. D. VAN SLYKE, J. FOLCH, « J. Biol. Chem. », 136, 509 (1940).

(8) W. D. ARMSTRONG, J. SCHUBERT, « Anal. Chem. », 20, 270 (1948).

(9) P. E. YANKWICH, T. H. NORRIS, J. L. HUSTON, « Anal. Chem. », 19, 439 (1947).

Nella Tabella III sono infine riportati i valori numerici di  $G(T)$  e di  $J(T)$  da noi ottenuti per il polietilene.

È interessante notare come detti valori siano molto simili a corrispondenti valori riportati da Yankwich <sup>(9)</sup> per il  $\text{BaCO}_3$ . Ciò può essere giustificato dal fatto, già osservato, che le curve di autoassorbimento dipendono dalla densità, effettiva o apparente, dei campioni esaminati. Differenze, ad esempio, esistono tra le curve di campioni diversamente preparati di  $\text{BaCO}_3$  e tra glucosio amorfo e cristallino <sup>(10)</sup>.

TABELLA III.

*Valori di autoassorbimento per il polietilene montato su alluminio.*

T (mg/cm <sup>2</sup> )	G (T)	J (T)	T (mg/cm <sup>2</sup> )	G (T)	J (T)
1	0,255	0,867	11	0,955	0,295
2	,435	,740	12	,964	,273
3	,565	,640	13	,972	,254
4	,670	,570	14	,980	,238
5	,750	,512	15	,985	,223
6	,813	,461	16	,988	,210
7	,865	,421	17	,990	,198
8	,900	,383	18	,992	,188
9	,925	,349	19	,994	,178
10	,942	,321	20	,996	,169

## CONCLUSIONI.

L'analisi di  $^{14}\text{C}$  in etilene marcata può essere effettuata in modo particolarmente rapido polimerizzando l'etilene con catalizzatori del tipo Ziegler (a base di  $\text{TiCl}_4$  e di alluminio alchili) e facendo il conteggio con contatore a finestra sottile su dischi del polimero stampato in foglio. La validità della tecnica complessiva è stata dimostrata in base ad opportune esperienze (tra cui analisi per combustione), da cui risulta che il contenuto in  $^{14}\text{C}$  non è influenzato in modo sensibile da eventuali processi secondari nel passaggio da monomero a polimero. Si è anche determinata la curva di autoassorbimento dei polietileni ottenuti col metodo proposto, per misure di attività assolute o conteggi in strato sottile.

L'applicazione di questa tecnica può interessare non soltanto l'analisi di etilene contenuta in miscele gassose, ma anche, studi su polimerizzazioni e copolimerizzazioni che comportano l'impiego di etilene come monomero.

(10) A. N. WICK, H. N. BARNET, N. ACKERMAN, « Anal. Chem. », 21, 1511 (1949).

**Chimica organica.** — *Sulla rigenerazione dei composti carbonilici dai loro dinitro-fenilidrazoni* <sup>(\*)</sup>. Nota di GIUSEPPE CASNATI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. QUILICO.

Nel corso della sintesi della diidroflavoglaucina <sup>(1)</sup> mi sono trovato nella necessità di purificare l'aldeide 2-ossi-3-isoamil-5-metossi-6-eptil-benzoica da prodotti non carbonilici. Detta aldeide allo stato grezzo non dà composto bisolfittico, ossima, idrazone e nessuno degli altri derivati facilmente idrolizzabili cui comunemente si ricorre quando si vuole rigenerare l'aldeide. Unico derivato ottenibile, che si forma anzi con ottime rese, è l'o·p-dinitro-fenilidrazone.

È noto che i fenilidrazoni (ed in particolare i p-nitro- e gli o·p-dinitro-) sono i derivati del gruppo carbonilico che si formano più facilmente e con le migliori rese. Purtroppo però se a tali derivati si può vantaggiosamente ricorrere per caratterizzare composti carbonilici, essi sono praticamente inutilizzabili allo scopo di purificare il composto carbonilico stesso, essendo molto difficile o addirittura impossibile effettuarne l'idrolisi.

La notevole stabilità del legame idrazonico nei dinitro-fenilidrazoni è evidentemente dovuta all'elevato effetto di risonanza che comporta la presenza di nitrogruppi in posizione orto e para. In pieno accordo con la progressiva minore energia di risonanza nei p-nitro-fenilidrazoni e fenilidrazoni è la loro crescente labilità.

Per il medesimo motivo la presenza nella molecola del composto carbonilico di gruppi elettronegativi, coniugati con il legame idrazonico, comporta una maggiore stabilità della struttura medesima. Su questo fatto si basa un metodo <sup>(2)</sup>, ampiamente usato per rigenerare i composti carbonilici dai corrispondenti fenilidrazoni e che consiste nello spostare l'aldeide o il chetone con 2,4-dinitro-benzaldeide, diacetile, glicosale ecc. <sup>(3)</sup>.

Tale metodo evidentemente non sarà applicabile né ai dinitro-fenilidrazoni, né ai p-nitro-fenilidrazoni in quanto stabilizzati da un'elevata energia di risonanza connessa con la presenza di gruppi elettronegativi coniugati.

Pertanto ho ritenuto che diminuendo l'azione positivante dei nitrogruppi, la stabilità dei fenilidrazoni sarebbe fortemente diminuita; tale risultato si sarebbe potuto facilmente ottenere per semplice riduzione.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) C. CARDANI e G. CASNATI, « Gazz. Chim. Ital. », 87 (1957) in corso di stampa.

(2) Tentativi da me effettuati, di spostamento dell'aldeide 2-ossi-3-amil-5-metossi-6-eptil-benzoica dal suo dinitrofenilidrazone, sia con dinitrobenzaldeide, sia con diacetile in varie condizioni, hanno avuto esito negativo.

(3) A questo proposito vedi anche trasformazione dei p-bromo-fenilidrazoni nei corrispondenti p-nitro e dinitro-derivati per azione della p-nitro o dinitro-fenilidrazina. J. MANDEL, « Arch. Biochem. », 25, 109 (1950).

A sostegno di tale ipotesi stanno anche i risultati ottenuti da Franzen e Steinführer <sup>(4)</sup> nella riduzione del p-nitro-fenilidrazone dell'acetofenone con idrosolfito sodico in soluzione alcoolica in presenza di ammoniacca. Il p-ammino-fenilidrazone ottenuto da tali Autori è risultato essere un prodotto instabile, nel giro di due settimane è completamente alterato, e con HCl a 0° si scinde in acetofenone e p. ammino-fenilidrazina.

Il riducente usato per la riduzione dei nitrogruppi non deve agire sul gruppo idrazonico. Come risulta dalla bibliografia tale gruppo viene ridotto da zinco e da acido acetico <sup>(5)</sup> o alcali, da lega Ni-Al ed alcali <sup>(6)</sup>, dalla amalgama di Al <sup>(7)</sup> ed anche per idrogenazione catalitica su Ni-Raney <sup>(8)</sup> ottenendosi a seconda degli agenti le idrazine o le ammine.

Ho ritenuto utile ricorrere ad un riducente classico dei nitrogruppi aromatici: il cloruro stannoso.

I primi tentativi di riduzione sono stati effettuati in mezzo anidro, onde evitare, per quanto possibile, la decomposizione del diammino-fenilidrazone durante la riduzione stessa. Essendo necessario che il solvente sia in grado di tenere in soluzione sia il dinitro-fenilidrazone che il cloruro stannoso, ho usato miscele di etere assoluto e cloroformio. Quando alla soluzione eterea di cloruro stannoso si aggiunge la soluzione cloroformica, colorata in rosso, del dinitro-fenilidrazone dell'aldeide 2-ossi-3-isoamil-5-metossi-6-eptil-benzoica, si ha viraggio al giallo. Versando poi la soluzione gialla in HCl diluito e freddo, si ha decolorazione quasi completa. Dallo strato organico viene recuperato il prodotto carbonilico con rese quasi quantitative.

Poiché nel caso in questione l'isolamento dell'aldeide rigenerata sarebbe stato molto più agevole se il solvente usato fosse miscibile con acqua, ho voluto vedere se, abbandonando il concetto iniziale di operare in ambiente anidro, fosse possibile usare come solvente l'acetone il cui dinitro-fenilidrazone si scioglie abbastanza bene. La riduzione e la scissione ha dato anche in tal caso buoni risultati.

Ho voluto applicare la reazione anche alla scissione dei dinitro-fenilidrazoni di qualche altro composto carbonilico che mi era capitato di usare di recente. Ho così potuto confermare che la reazione procede ugualmente bene anche nel caso del benzofenone e del 2,5-diossi-acetofenone <sup>(9)</sup>. Mi ripromettevo di estendere tale metodo e di generalizzarlo, quando sono venuto a conoscenza della nota di Demaecker e Martin <sup>(10)</sup> che sono riusciti a scindere i 2,4-dinitro-fenilidrazoni di alcuni chetosteroidi bollendoli prima a lungo in soluzione acetonica e trattandoli poi con cloruro stannoso. Il concetto

(4) H. FRANZEN e P. STEINFÜHRER, « Ber. », 54, 861 (1921).

(5) K. PFISTER e M. TISHLER, U. S. 2. 489. 927 (Merck) (1949).

(6) R. FUSCO e L. CANONICA, « Chim. e Ind. », 32, 2081 (1950).

(7) A. ROMEO e L. MAGNI, questi « Rend. », 14, 423 (1953).

(8) C. F. WINANS e H. ADKINS, « J. Am. Chem. Soc. », 55, 2051 (1933).

(9) Nel caso dell'aldeide enantica pur ottenendo completa scissione del dinotrofenilidrazone si sono avute scarse rese; si pensa che l'aldeide in ambiente acido abbia dato il trimero.

(10) J. DEMAECCKER e R. H. MARTIN, « Nature », 173, 266 (1954).



cui si sono ispirati i predetti Autori si discosta invero da quello da me esposto, perché parrebbe che essi intendano effettuare lo spostamento dal dinitro-fenilidrazoni del composto carbonilico con acetone prima di fare agire il cloruro stannoso. Nella citata Nota su « Nature » non è data alcuna spiegazione della reazione, rimandando ad un successivo lavoro che finora non è apparso <sup>(11)</sup>.

Ho interrotto a questo punto le ricerche in attesa di conoscere quanto già fatto dai predetti Autori, e le conclusioni, cui sono giunti.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Scissione del 2,4-dinitro-fenilidrazone dell'aldeide 2-ossi-3-isoamil-5-metossi-4-eptil-benzoica.* - Ad una soluzione di g 2,9 di  $\text{SnCl}_2$  anidro in  $\text{cm}^3$  20 di etere assoluto, saturato con HCl gassoso, si aggiungono g 0,6 di dinitro-fenilidrazone dell'aldeide 2-ossi-3-i.amil-5-metossi-6-eptil-benzoica sciolti in  $\text{cm}^3$  40 di  $\text{CHCl}_3$  anidro.

La soluzione che vira dal rosso al giallo, viene scaldata a ricadere per circa 1 ora. Dopo raffreddamento si aggiunge acqua acida per HCl e si osserva immediata decolorazione della soluzione. Dallo strato eterico, successivamente lavato con HCl dil., con  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  al 10 %, ed essiccato su  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ , si evapora il solvente ottenendo un residuo oleoso che è identificato nell'aldeide 2-ossi-3-i.amil-5-metossi-6-eptil-benzoica.

Il miglior modo per giudicare la purezza del prodotto e stabilire le rese, consiste nel trattarlo nuovamente con dinitro-fenilidrazina in soluzione alcoolica. Il dinitrofenilidrazone che così precipita, fonde solo 3-4° più basso del prodotto puro ed il suo peso è praticamente uguale a quello del prodotto di partenza. Se ne deduce che la scissione è stata quantitativa.

*Scissione del 2,4-dinitro-fenilidrazone del benzofenone.* - Si introducono g 6 di  $\text{SnCl}_2$  anidro in  $\text{cm}^3$  30 di etere anidro, saturando poi la soluzione con HCl gassoso fino a completa dissoluzione del sale.

Nella soluzione eterica calda si fanno gocciolare g 0,6 di dinitrofenilidrazone del benzofenone sciolto in  $\text{cm}^3$  60 di  $\text{CHCl}_3$  caldo.

Nella soluzione eterica si forma subito un precipitato giallo. Dopo aver bollito a ricadere per un'ora, si aggiungono  $\text{cm}^3$  30 di acqua acidulata con HCl, ottenendo quasi subito decolorazione e scomparsa del precipitato. Dallo strato eterico accuratamente lavato con  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  al 10 %, poi con acqua, ed infine essiccato, distillando via il solvente si ottiene un residuo solido riconosciuto per benzofenone.

Per determinare le rese lo si è trattato con dinitro-fenilidrazina in soluzione alcoolica ottenendo in tal modo g 0,45 di derivato che tal quale fonde a 242°C. La resa è di circa il 70 %.

(11) Tale lavoro dovrebbe apparire tra qualche mese (DEMAECKER, *comunicazione privata*).

Sul dinitro-fenilidrazone del benzofenone sono state effettuate anche operazioni in miscela etere-cloroformio non anidri con una resa di circa il 50 %, in acetone non anidro con una resa pure del 50 %.

*Scissione del 2,4-dinitro-fenilidrazone del 2,5-diossi-acetofenone.* — Si sciolgono parzialmente a caldo g 0,6 di dinitro-fenilidrazone del 2,5-diossi-acetofenone in cm<sup>3</sup> 200 di CHCl<sub>3</sub>; tale sospensione è introdotta in cm<sup>3</sup> 100 di etere bollente saturo di HCl gassoso, contenente sciolto circa g 8 di SnCl<sub>2</sub> · 2H<sub>2</sub>O.

Il tutto mantenuto all'ebollizione per 45 minuti; quasi subito la soluzione vira dal rosso al giallo, con la separazione di un precipitato oleoso brunastro. Si decanta poi lo strato etero-cloroformico dal precipitato. Tale precipitato risulta completamente solubile in HCl.

Lo strato etero-cloroformico trattato con HCl dil. a freddo, lavato successivamente con HCl dil., con acqua, ed essiccato su Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> viene evaporato dal solvente sotto vuoto. Si ottengono così g 0,2 di diossi-acetofenone p. f. 198°.

La resa è di circa il 70 %. Il prodotto cristallizzato una sola volta da acqua fonde a 202°.

**Zoologia.** — *Su un nuovo genere* (*Angulocirrus gen. nov.*) *e su due nuove specie di tricostrongilidi* (*Angulocirrus orycteropi sp. nov.*, *Angulocirrus minor sp. nov.*) *parassiti di mammiferi africani* (\*). Nota di ETTORE BIOCCA e PHILIPPUS LE ROUX (\*\*) presentata (\*\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nell'intestino tenue di mammiferi africani (*Orycteropus afer* e *Manis temminckii*) sono stati ripetutamente rinvenuti tricostrongilidi con caratteri morfologici che non permettono la loro classificazione in nessuno dei generi noti.

Tutti gli esemplari maschi esaminati, provenienti sia da *Orycteropus* che da *Manis* hanno gli spicoli chiaramente differenti tra loro; lo spicolo destro, molto più chitinizzato, possiede la porzione distale ripiegata ad angolo e terminante con un uncino. Siamo di opinione che questo carattere sia uno dei principali per la identificazione del genere e proponiamo perciò il nome di *Angulocirrus gen. nov.*

I parassiti trovati in *Orycteropus afer*, pur avendo gli stessi caratteri generici di quelli trovati in *Manis temminckii*, tuttavia ne differiscono per le dimensioni del corpo e degli organi e per altri caratteri morfologici. Noi riteniamo perciò che si tratti di due diverse specie appartenenti allo stesso genere *Angulocirrus*.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(\*\*) Professore della London School of Hygiene and Tropical Medicine.

(\*\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

*Angulocirrus* gen. nov.

Corpo lungo, cilindrico, sottile. Cuticola con strie trasversali molto ravvicinate e strie longitudinali. Estremità cefalica con dilatazione cuticolare. Bocca senza labbra nitide. Papille cervicali piccole. Ali cervicali assenti.

*Femmina* con la vulva nel terzo posteriore del corpo, a volte con salienza simmetrica e striata ai due lati. Apparecchio genitale anfidelfo. Coda conica con punta arrotondata e terminante con una spina. Uova con guscio sottile e trasparente.

*Maschio* con borsa copulatrice formata da due lobi ampi, riuniti da un piccolo lobo dorsale. Faccia interna della borsa munita di spine. Papille preborsali inapparenti e mancanza di ali preborsali. Membrana borsale accessoria piccola, ma presente e sorretta da due minuscole costole.

*Formula borsale*: costola dorsale biforcata nel suo terzo distale in due rami generalmente tridigitati: le costole dorsali esterne nascono dalla dorsale e terminano lontane dal margine della borsa. Costole laterali media e posteriore contigue solo nella parte prossimale, a decorso ondulato, raggiungono quasi il margine della borsa; costola laterale esterna corta, dritta, isolata; costole ventrali con corto tronco comune, divergono successivamente e raggiungono anch'esse quasi il margine della borsa. Spicoli diversi tra loro: spicolo destro più chitinizzato, con un tronco principale ripiegato ad angolo e terminante a gancio, accompagnato da un paio di esili filamenti con espansioni membranose; spicolo sinistro terminante con due o tre lunghi filamenti pieghevoli, con espansioni membranose. Gubernaculum ben chitinizzato di forma complessa e angolosa.

*Habitat*: tubo digerente di mammiferi (Nota).

*Specie tipo*: *Angulocirrus orycteropi* gen. nov. et sp. nov.

Questo nuovo genere è molto vicino ai due generi *Maciella* e *Delicata* descritti da Travassos<sup>(1)</sup> quali parassiti di sdentati americani.

Il genere *Maciella* può essere differenziato dal genere *Angulocirrus* perché possiede la dilatazione cefalica asimmetrica, la coda della femmina terminante in forma acuta e senza spina terminale, gli spicoli del maschio che si risolvono in due o tre lunghi processi paralleli, il gubernaculum in genere assente o di struttura semplice e la faccia interna della borsa caudale senza spine.

Il genere *Delicata*, a differenza di *Angulocirrus*, ha le papille cervicali inapparenti e le papille preborsali grandi, due piccole ali preborsali, le costole ventrali della borsa caudale di grandi dimensioni, la superficie interna della borsa non ricoperta da spine e gli spicoli e il gubernaculum di configurazione completamente diversa.

(1) L. TRAVASSOS, *Revisão da família Trichostrongylidae*, Leiper, 1912. Monografias do Inst. O. Cruz. Rio de Janeiro (1937):

(Nota) Nelle antiche classificazioni dei mammiferi il genere *Orycteropus* e il genere *Manis* venivano inclusi tra gli sdentati, mentre attualmente *Orycteropus* è considerato un tubulidentato e *Manis* un foliote.

Il genere *Molineus* non può essere confuso con *Angulocirrus* poiché ha un disegno di distribuzione delle costole nella borsa caudale alquanto diverso, gli spicoli e il gubernaculum di differente configurazione e perché manca di una membrana borsale accessoria.

Nella recente classificazione della famiglia *Trichostrongylidae* Leiper, 1912, riportata nel Trattato dell'Accademia delle Scienze dell'U.R.S.S. compilato sotto la direzione di Skryabin<sup>(2)</sup>, il genere *Maciella* viene classificato nella sottofamiglia *Cooperinae* perché la femmina possiede l'estremità caudale senza spina, mentre i generi *Delicata* e *Molineus* vengono riuniti nella sottofamiglia *Molineinae*. Volendo seguire questo schema di classificazione il genere *Angulocirrus* appartenerebbe alla famiglia *Trichostrongilidae* sottofamiglia *Molineinae*.

*Angulocirrus orycteropi* sp. nov. (Tavola I e II, figg. 1-7).

In due volte successive sono stati raccolti dall'intestino tenue di *Orycteropus afer*, provenienti dalla Somalia e venuti a morte nel Giardino Zoologico di Roma rispettivamente il 17 dicembre 1950 e il 4 ottobre 1951, numerosi esemplari di nematodi con i seguenti caratteri.

#### MORFOLOGIA.

Esemplari esaminati: 8 femmine e 8 maschi.

Vermi, prima della fissazione, di colorito roseo, dopo fissazioni in alcool o formalina, di colorito biancastro. Corpo sottile, cilindrico.

Cuticola con striature trasversali molto ravvicinate e con una ventina di striature longitudinali. Rigonfiamento cuticolare cefalico con striature trasversali. Esofago lungo, leggermente claviforme; anello nervoso situato in posizione anteriore rispetto alle papille cervicali e al poro escretore.

*Femmina*: lunghezza mm 8,2-12,2, larghezza mm 0,170-0,190; rigonfiamento anteriore lungo mm 0,091-0,110; esofago lungo mm 0,505-0,570; anello nervoso distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,240-0,350; poro escretore distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,330-0,410; papille cervicali distanti dall'estremità anteriore del corpo mm 0,340-0,440. Vulva situata a mm 2,450-3,100 dall'estremità posteriore; ovoidatore forte, vestiboli muscolosi e uteri divergenti. Uova, misurate nell'utero, di circa mm 0,52-0,068 × 0,029-0,034. Ano distante dall'estremità della coda mm 0,110-0,158. La coda è leggermente conica e termina in forma ottusa arrotondata, con una lunga spina di mm 0,012-0,015.

*Maschio*: lunghezza mm 5,1-8,4, larghezza mm 0,130-0,168; rigonfiamento anteriore lungo mm 0,078-0,110, esofago lungo mm 0,428-0,480; anello nervoso distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,235-0,260;

(2) K. J. SKRYABIN, *Opredelitel' parasiticheskikh nematod*. Ediz. Akad. Nauk Mosca, 3, 297 e sg. (1952).



poro escretore distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,305-0,390, papille cervicali distanti dall'estremità anteriore del corpo mm 0,310-0,390.

*Borsa caudale*: larghezza totale mm 0,360-0,490; lobi laterali voluminosi e piccolo ma evidente lobo dorsale; membrana borsale accessoria piccola, formata da due mammelloni contigui sostenuti da due raggi molto esili. Cono genitale debolmente prominente. Interno della borsa caudale con numerose piccole spine, soprattutto nel tratto prossimale delle costole. Papille preborsali non evidenti. Formula borsale: costola dorsale biforcata nel suo terzo distale; ogni ramo termina con tre digitazioni lunghe e sottili; è spesso apprezzabile una quarta digitazione rudimentale mediana simile a papilla. Le costole dorsali esterne nascono dalla dorsale in prossimità della sua origine e terminano a notevole distanza del margine della borsa caudale. Costole laterali media e posteriore, dirette in avanti, decorrono parallele e ravvicinate per circa la metà della loro lunghezza, successivamente si allontanano e poi si riavvicinano. La costola lateroposteriore è leggermente più lunga della lateromediana. La costola laterale esterna è molto più corta delle altre laterali e ventrali, ha un decorso quasi rettilineo e prende origine da un tronco comune con le altre due laterali, ma divide quasi simmetricamente le due ventrali dalle due laterali media e posteriore. Le due costole ventrali sono voluminose e leggermente arcuate verso l'avanti, la latero-ventrale soprattutto nel suo quarto distale, mentre la ventroventrale durante tutto il suo percorso; per circa la metà della loro lunghezza le due costole decorrono ravvicinate, per allargarsi e raggiungere quasi il margine della borsa; le loro papille terminali vengono a trovarsi così a notevole distanza l'una dall'altra. Le papille terminali delle costole dorsali esterne e delle costole laterali esterne sono molto più voluminose delle altre papille terminali.

*Spicoli* con i caratteri descritti per il genere: lunghi mm 0,200-0,240, robusti e di forma complessa nella parte prossimale munita di uno sperone chitinoso diretto caudalmente; si assottigliano rapidamente. Lo spiccolo destro nel suo terzo distale si piega quasi ad angolo retto e termina con un uncino; esso è accompagnato da un paio di esilissimi filamenti che sorreggono una membranella trasparente.

Lo spiccolo sinistro ha la parte prossimale di morfologia simile a quella dello spiccolo destro, mentre nella parte distale è meno chitinizzato, non è ripiegato ad angolo e possiede due o tre sottili e lunghi filamenti, accompagnati da espansioni membranose ialine.

Negli spicoli liberati dal corpo, l'estremità dello spiccolo destro mantiene la forma caratteristica angolare descritta, mentre la estremità dello spiccolo sinistro resta più o meno rettilinea, senza conservare una forma o una direzione costante.

*Gubernaculum*: lunghezza mm 0,090-0,105, larghezza massima mm 0,020-0,025. In posizione ventrale ha un aspetto irregolarmente ellissoidale con margini ondulati, mentre visto lateralmente ha un aspetto che ricorda la baionetta, rappresentato da tre parti circa della stessa lunghezza.

La forma doppiamente angolare del gubernaculum serve di guida alla parte terminale dello spicolo destro che in esso si inserisce.

*Habitat*: Intestino tenue di *Orycteropus afer*.

*Luogo di provenienza*: Giardino Zoologico di Roma, provenienza Somalia.

*Esemplari tipo*: presso Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

*Angulocirrus minor* sp. nov. (Tavola II, figg. 1-3).

Nel maggio 1953 sono stati raccolti nove nematodi (sei femmine e tre maschi) dall'intestino tenue di un mammifero africano (*Manis temmincki*) ucciso nelle vicinanze di Pienaar's River Station nel Transvaal. Numerosi parassiti identici sono stati ritrovati successivamente in un altro *Manis temmincki* ucciso a Mazabuka nella Rhodesia del Nord. Forniamo i caratteri e le misure di sei femmine e di sei maschi appartenenti a queste specie.

#### MORFOLOGIA.

Colorito roseo prima della fissazione in alcool, biancastro dopo. Corpo molto sottile, cilindrico; cuticola con strie trasversali molto riavvicinate e con circa 12-14 strie longitudinali. Rigonfiamento cuticolare cefalico con striature trasversali evidenti; esofago allungato leggermente claviforme; anello nervoso spostato anteriormente rispetto alle papille cervicali e al poro escretore, dislocati invece posteriormente.

*Femmina*: lunghezza mm 5-8, larghezza mm 0,084-0,104; rigonfiamento anteriore lungo mm 0,076-0,088; esofago lungo mm 0,364-0,440; anello nervoso distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,170-0,185; poro escretore distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,260-0,304; papille cervicali distanti dall'estremità anteriore del corpo mm 0,236-0,295.

Vulva situata a mm 1,125-1,650 dall'estremità posteriore; ovoeiettore forte, vestiboli muscolosi e uteri divergenti. Uova nell'interno dell'utero di mm 0,050-0,055  $\times$  0,028-0,032. Ano distante dall'estremità posteriore del corpo mm 0,052-0,097. Coda conica ottusa arrotondata all'estremità e terminante con una lunga spina di mm 0,010-0,015.

*Maschio*: lunghezza mm 4,6-5, larghezza mm 0,078-0,088; rigonfiamento anteriore lungo mm 0,070-0,084; esofago lungo mm 0,280-0,298; anello nervoso distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,156-0,160; poro escretore distante dall'estremità anteriore del corpo mm 0,248-0,260; papille cervicali distanti dall'estremità anteriore del corpo mm 0,250-0,260.

*Borsa caudale*: larghezza totale mm 0,240-0,320; lobi laterali riuniti da un piccolo ed evidente lobo dorsale; membrana borsale accessoria con due mammelloni sorretti da due piccoli raggi relativamente spessi. Cono genitale alquanto prominente. Superficie interna della borsa ricoperta abbondantemente da spine di dimensioni a volta considerevoli. Papille preborsali difficilmente apprezzabili. (Sono state osservate solo in un esemplare dal dott. Le Roux). Formula borsale: costola dorsale biforcata nel suo terzo

distale con rami terminanti in tre digitazioni lunghe e spesso con un rigonfiamento simile a papilla nella parte interna della digitazione mediana. Costole dorsali esterne nascono dalla dorsale vicino alla sua origine e terminano distanti dal margine della borsa. Costole laterali media e posteriore con decorso parallelo e ravvicinate all'inizio, si allontanano successivamente e si riavvicinano. Costola laterale esterna con decorso quasi rettilineo e originante da un tronco comune con le altre due laterali; essa è relativamente lunga, ma non raggiunge il margine della borsa. Le costole ventrali sono voluminose e arcuate verso l'avanti; soprattutto la ventroventrale la quale termina a notevole distanza dalla lateroventrale. Le due costole sono in contatto tra loro per un brevissimo tratto comune, per poi allontanarsi, prima lievemente poi fortemente; la costola ventroventrale sembra essere leggermente più lunga.

*Spicoli*: lunghi mm 0,135-0,145, robusti nella parte prossimale, la quale è munita di uno sperone laterale diretto caudalmente, vanno progressivamente attenuandosi. Lo spicolo destro, nel suo quarto distale, cambia bruscamente direzione assottigliandosi e terminando con un uncino rivolto all'indietro. Accompagnano questo processo più voluminoso uno o due esili filamenti i quali sorreggono guaine trasparenti.

Lo spicolo sinistro meno chitinizzato termina con due o tre lunghi e sottili filamenti molto pieghevoli e accompagnati da guaine membranose. Gubernaculum: lungo mm 0,055-0,065, larghezza massima mm 0,015-0,018; se osservato in posizione ventrale è di forma ellissoidale con margini ondulati, mentre assume l'aspetto di baionetta se osservato in posizione laterale.

*Habitat*: intestino tenue di *Manis temminckii*.

*Distribuzione geografica*: Sud Africa

*Esemplari tipo*: presso Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

#### *Diagnosi differenziale tra le specie A. orycteropi e A. minor.*

Le due specie *A. orycteropi* e *A. minor* differiscono profondamente nelle dimensioni generali e dei singoli organi (come può essere controllato nella seguente tabella comparativa) e in alcune particolarità morfologiche soprattutto a carico della borsa caudale.

Le differenze di misurazione si mantengono bene evidenti anche paragonando esemplari dello stesso sesso e della stessa lunghezza. Precisamente la diversità delle dimensioni dell'esofago, degli spicoli, della larghezza della borsa sono tali da non permettere l'ipotesi che possa trattarsi di variazioni di una stessa specie in ospiti diversi.

Inoltre in *Angulocirrus orycteropi* le striature longitudinali nel corpo sono più numerose; le spine esistenti nella faccia ventrale della borsa caudale sono più piccole e meno numerose; i due mammelloni della membrana borsale accessoria sono sostenuti da due costole proporzionalmente più esili. Così anche la distribuzione delle costole nella borsa caudale è alquanto diversa; la costola laterale esterna infatti in *A. orycteropi* termina con una grossa

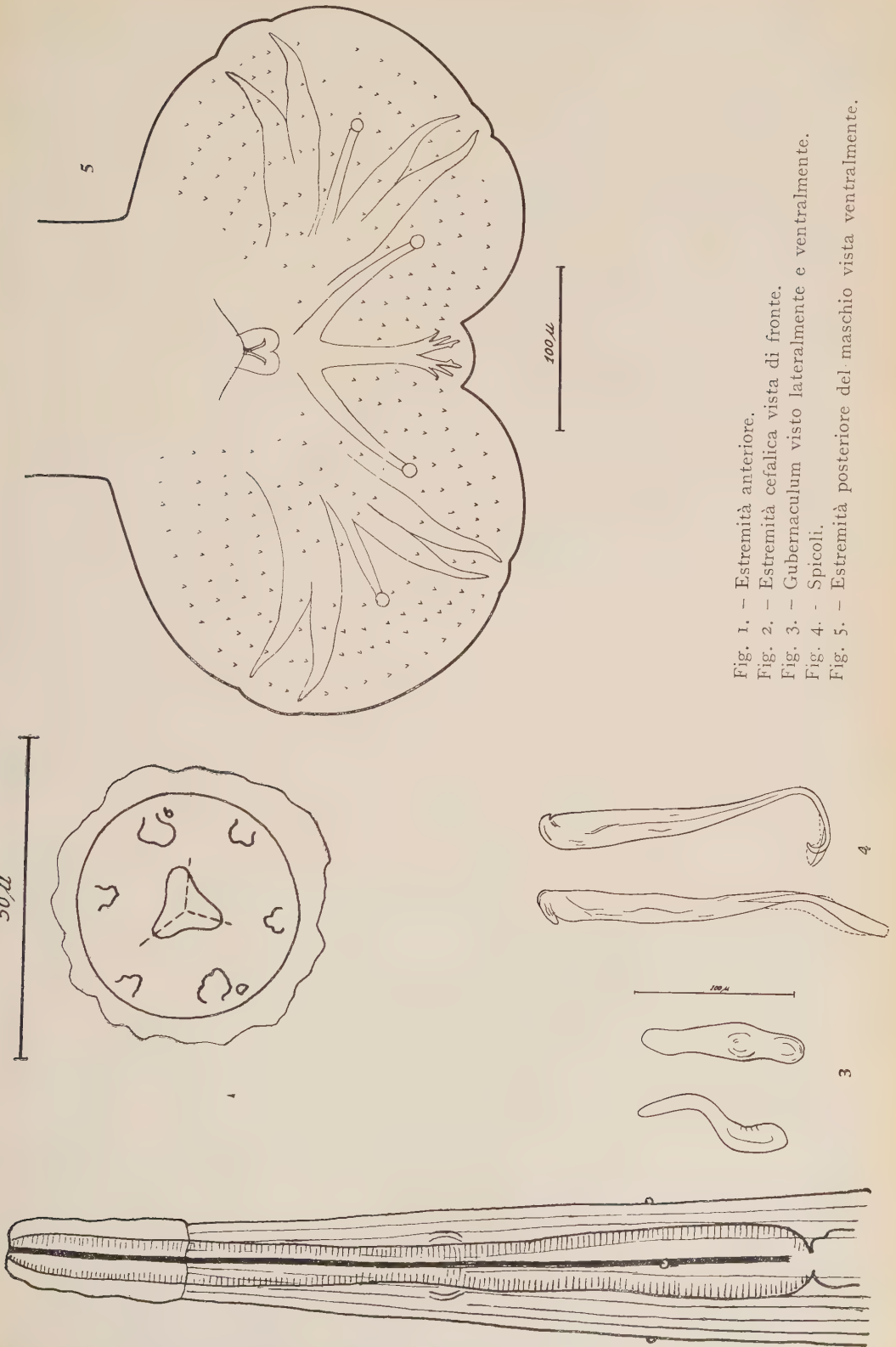


Fig. 1. - Estremità anteriore.  
Fig. 2. - Estremità cefalica vista di fronte.  
Fig. 3. - Gubernaculum visto lateralmente e ventralmente.  
Fig. 4. - Spicoli.  
Fig. 5. - Estremità posteriore del maschio vista ventralmente.





*Angulocirrus orycteropi* n. sp.

7

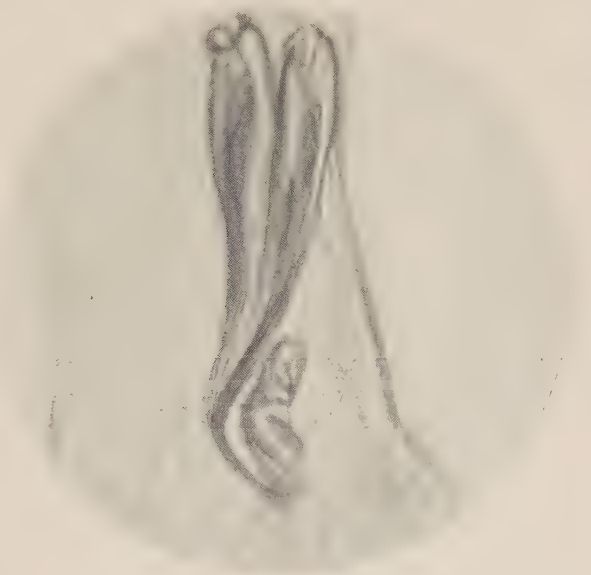


Fig. 6. - Estremità posteriore della femmina.

Fig. 7. - Spicoli e gubernaculum visti lateralmente (microfotografia).

*Angulocirrus minor* n. sp.

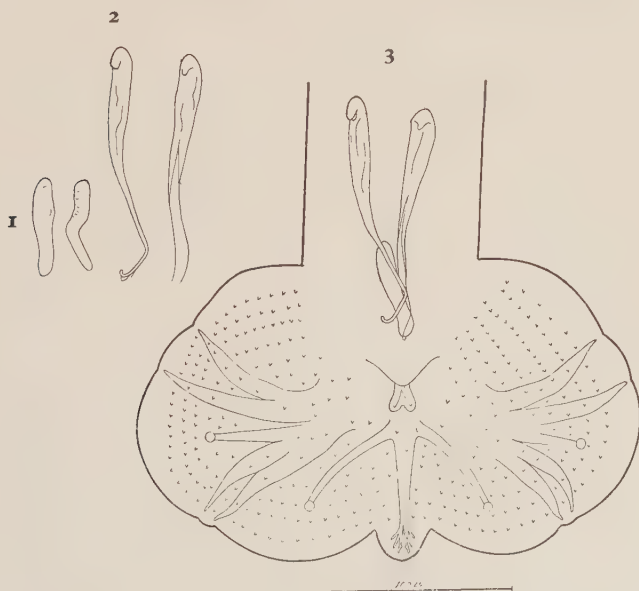


Fig. 1. - Gubernaculum visto ventralmente e lateralmente.

Fig. 2. - Spicoli.

Fig. 3. - Estremità posteriore del maschio vista ventralmente.



papilla che si trova meno situata verso il margine della borsa che non la corrispondente papilla terminale di *A. minor*, la quale appare più spostata verso l'esterno. Inoltre le costole ventrali si separano dopo un percorso comune chiaramente più lungo in *A. orycteropi* che in *A. minor*.

## TABELLA.

*Dimensioni in millimetri.*

	<i>A. orycteropi</i>	<i>A. minor</i>
	<i>Maschio</i>	<i>Maschio</i>
Lunghezza . . . . .	5,1-8,4	4,6-5
Larghezza . . . . .	0,130-0,168	0,078-0,088
Rig. anteriore . . . . .	0,078-0,110	0,070-0,084
Esofago . . . . .	0,428-0,480	0,280-0,298
Anello nervoso est. ant. . .	0,235-0,260	0,156-0,160
Poro escr. est. ant. . . . .	0,305-0,390	0,248-0,260
Papille cerv. est. ant. . . .	0,310-0,390	0,250-0,260
Spicoli . . . . .	0,200-0,240	0,135-0,145
Gubernaculum . . . . .	0,090-0,105 × 0,020-0,025	0,055-0,065 × 0,016-0,018
Apertura borsa . . . . .	0,360-0,490	0,240-0,270
	<i>Femmina</i>	<i>Femmina</i>
Lunghezza . . . . .	8,2-12,2	5-8
Larghezza . . . . .	0,170-0,190	0,084-0,104
Rig. anteriore . . . . .	0,091-0,110	0,076-0,088
Esofago . . . . .	0,505-0,570	0,364-0,440
Anello nerv. est. ant. . . .	0,240-0,350	0,170-0,185
Poro escr. est. ant. . . . .	0,330-0,410	0,260-0,304
Papille cerv. est. ant. . . .	0,340-0,440	0,236-0,295
Vulva estr. post. . . . .	2,450-3,100	1,125-1,650
Ano estr. post. . . . .	0,110-0,158	0,052-0,097
Uova . . . . .	0,052-0,068 × 0,029-0,034	0,050-0,055 × 0,028-0,032

Nel 1896 Mayer<sup>(3)</sup> descrisse col nome *Strongylus costatus* un tricostron-  
gilide rinvenuto nell'intestino tenue di *Manis pentadactyla* di Ceylon. Infe-

(3) A. MEYER, *Neue Nematoden aus Säugethieren und aus dem Julus*. « Arch. f. Naturg. », 62, 54 (1896).



licemente la descrizione fornita dall'A. è così sommaria che non permette alcun orientamento sul genere e sulla specie.

I disegni del Mayer inoltre mostrano nella borsa caudale la costola esternolaterale, che nei generi *Maciella*, *Delicata*, *Molineus* e *Angulocirrus* è la più corta, come la più voluminosa è lunga di tutte; inoltre gli spicoli vengono descritti e disegnati come uguali.

Il Baylis <sup>(4)</sup> ha espresso l'opinione che si possa trattare di una specie forse riportabile al genere *Trichohelix*, mentre Travassos <sup>(1)</sup> ritiene che si tratti di specie mal conosciuta, probabilmente riportabile al genere *Molineus*. Non è, secondo noi da escludere che invece possa trattarsi di specie riportabile al genere *Angulocirrus*.

Viene descritto un nuovo genere di tricostrongilide *Angulocirrus* gen. nov. e due nuove specie dello stesso genere *Angulocirrus orycteropi* sp. nov. e *Angulocirrus minor* sp. nov. parassiti dell'intestino tenue di mammiferi africani. Il nuovo genere è vicino ai generi *Maciella* e *Delicata* descritti da Travassos in sdentati americani, ma può essere facilmente da essi differenziato per numerosi caratteri, di cui il più evidente è rappresentato dalla forma ripiegata ad angolo dello spicolo destro, carattere scelto per il nome del nuovo genere *Angulocirrus*.

Le due specie *A. orycteropi* e *A. minor* parassiti rispettivamente di *Orycteropus afer* e di *Manis temmincki* sono chiaramente diverse tra loro nelle dimensioni del corpo e degli organi e nel numero delle strie longitudinali; differiscono anche lievemente nella distribuzione delle costole nella borsa caudale del maschio.

Viene infine discussa la posizione sistematica di *Strongylus costatus* descritto da Mayer nel 1896 in *Manis pentadactyla* di Ceylon.

**Citologia.** — *Sulla struttura e funzione della cromatina delle cellule nutrici e degli oociti nella oogenesi del baco da seta* («*Bombyx mori* L. », *Lepidoptera*)<sup>(\*)</sup>. Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Negli Insetti si hanno diversi tipi di ovari: panoistici, meroistici politrofici e meroistici acrotrofici. I meroistici sono provvisti di cellule nutrici che derivano da cellule germinali differenziate in direzione diversa da quella degli oociti. In alcuni casi, come nei Ditiscidi, divisioni eterogenee del citoplasma permettono di distinguere precocemente l'oogonio che diventerà

(4) H. A. BAYLIS, *Fauna of British India*, I, p. 305 (cit. TRAVASSOS) (1936).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata dall'Università di Padova, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

oocita dagli oogoni che diventeranno cellule nutrici (Giardina) 1901) [1]. In altri casi non è possibile distinguere precocemente i due tipi di cellule; nel baco da seta le cellule nutrici si formano da oociti già in meiosi (Machida 1926) [2].

Dalle descrizioni degli ovari meroistici di numerose specie di Insetti (cfr. Depdolla 1926) [3] risulta che le cellule nutrici hanno sempre nuclei molto grandi, poliploidi, o sono polinucleate.

Negli ovari meroistici politrofici e probabilmente anche in quelli acrotrofici queste cellule elaborano, attraverso un sistema nucleolare, ribonucleoproteine che passano nel citoplasma dell'oocita, dove intervengono nella sintesi di proteine durante il II periodo di accrescimento (Colombo 1956) [4].

Le ricerche sulle trasformazioni nucleari e sulla poliploidizzazione delle cellule nutrici sono piuttosto scarse. Bauer (1938) [5] ha descritto nelle cellule nutrici di Ditteri, *Lucilia*, *Pollenia* e *Musca*, fenomeni di politenia seguiti da poliploidia; Painter e Reindrop (1939) [6] hanno descritto cicli di endomitosi in quelle di *Drosophila melanogaster*.

Lo studio kariologico delle cellule nutrici presenta un interesse notevole; perché in queste cellule la differenziazione è tipicamente nucleare ed è caratterizzata dalla poliploidizzazione. Lo studio comparativo dell'evoluzione del nucleo, ed in particolare dei cromosomi e dei nucleoli, degli oociti e delle cellule nutrici può mettere in luce molti aspetti importanti dell'attività metabolica della cromatina nucleare e può portare un contributo alla conoscenza della fisiologia dei cromosomi.

Oggetto di questa Nota sono la descrizione e l'analisi delle trasformazioni dei nuclei, ed in particolare dei cromosomi e dei nucleoli, negli oociti e nelle cellule nutrici del baco da seta.

#### MATERIALE E METODO.

Sono stati esaminati principalmente ovari di larve di V stadio e di crisalidi, a età diverse dalla muta.

Gli ovari sono stati fissati nei liquidi di Carnoy o di Susa o di Dubosq-Brazil; sono stati quindi disidratati in alcool, schiariti in benzolo ed inclusi in paraffina. Le sezioni di 5 o 10 micron sono state colorate o con la reazione di Feulgen, per lo studio dell'acido desossiribonucleico, o con verde di metile e pironina in mezzo tamponato, per lo studio delle ribonucleoproteine, o con l'ematossilina ferrica per lo studio citologico generale.

Sono stati fatti anche preparati per schiacciamento, ponendo prima gli ovari in acido acetico al 45% per 20 minuti circa, quindi schiacciando su vetrino albuminato e fissando poi in alcool a 95° per alcune ore. I vetrini sono stati colorati quindi col metodo di Feulgen o con l'ematossilina ferrica.

I disegni sono stati fatti con camera chiara Leitz e con obiettivo ad immersione Zeiss, 100/I,30 Ph, ed oculare  $\times 10$  Zeiss Pol.

## RISULTATI.

*Cenni sulla struttura dell'ovario.* - Gli ovari delle larve al V stadio sono formati da 4 ovariooli, costituiti di una parte apicale, il germario, ed una prossimale più lunga, il vitellario, che si continua con l'ovidotto.

Nel germario si trovano oogoni ed oociti a vari stadi di maturazione assieme a cellule follicolari. Le cellule follicolari, disposte senza alcun ordine apparente, sono ben distinguibili perché hanno nuclei piccoli ed ovali. Le cellule germinali sono più grandi con nuclei sferici. Non sembra formino nidi; i vari stadi di maturazione sono seriatamente regolarmente lungo l'asse del germario. Nelle sezioni longitudinali del germario stesso si trovano, cominciando dalla parte apicale, prima gli oogoni, poi gli oociti in leptotene, a « bouquet » ed infine in pachitene; è così relativamente facile seguire le diverse fasi della meiosi.

Degli oociti in pachitene alcuni si differenziano in cellule nutrici. Avvenuta questa differenziazione le cellule follicolari si insinuano tra le cellule germinali formando dei setti che circondano ciascuna oocita assieme alle proprie cellule nutrici. Si costituiscono così i follicoli ovarici. L'oocita e le cellule nutrici aumentano notevolmente di volume ed i follicoli ovarici vengono così ad occupare tutto il lume dell'ovario. A questo punto comincia il vitellario che si allunga e si ingrossa perché sempre nuovi follicoli si isolano e si accrescono.

*Differenziazione delle cellule nutrici.* - Nei follicoli ovarici sufficientemente grandi si possono contare facilmente gli elementi cellulari che li compongono; di regola 1 oocita e 7 cellule nutrici.

Nei preparati per schiacciamento del germario, se le cellule non sono state troppo schiacciate e separate tra loro, si trovano frequentemente gruppi di 6 o 8 oociti uniti tra loro per una specie di peduncolo. Si tratta evidentemente di gruppi di cellule, che derivano da un oogonio attraverso 3 divisioni, come afferma Machida (1926) [2]; di queste cellule una sarà l'oocita e le altre le cellule nutrici. Ma la distinzione è possibile solo dopo che è avvenuta la differenziazione che è sostanzialmente una differenziazione nucleare degli oociti pachitenici.

La struttura nucleare di tutti gli oogoni e gli oociti fino al pachitene è quella comune alla maggior parte delle cellule germinali in meiosi e non mette conto descriverla in dettaglio.

Tra gli oociti in pachitene si distinguono due tipi di cellule: *a*) oociti, meno numerosi, con nucleo in normale evoluzione, oocitaria, cioè con lunghi bivalenti poco colorabili e con grosso nucleolo; *b*) oociti, più numerosi, nel cui nucleo i bivalenti si presentano invece più corti, più intensamente colorati, più contratti e con due o tre nucleoli piccoli (fig. 1, A, B, e B').

Ambedue questi tipi di oociti aumentano di volume. I nuclei degli oociti del primo tipo presentano i bivalenti più lunghi, sinuosi, meno colorabili ed il nucleolo ingrandito; i nuclei di quelli del secondo tipo presentano i biva-

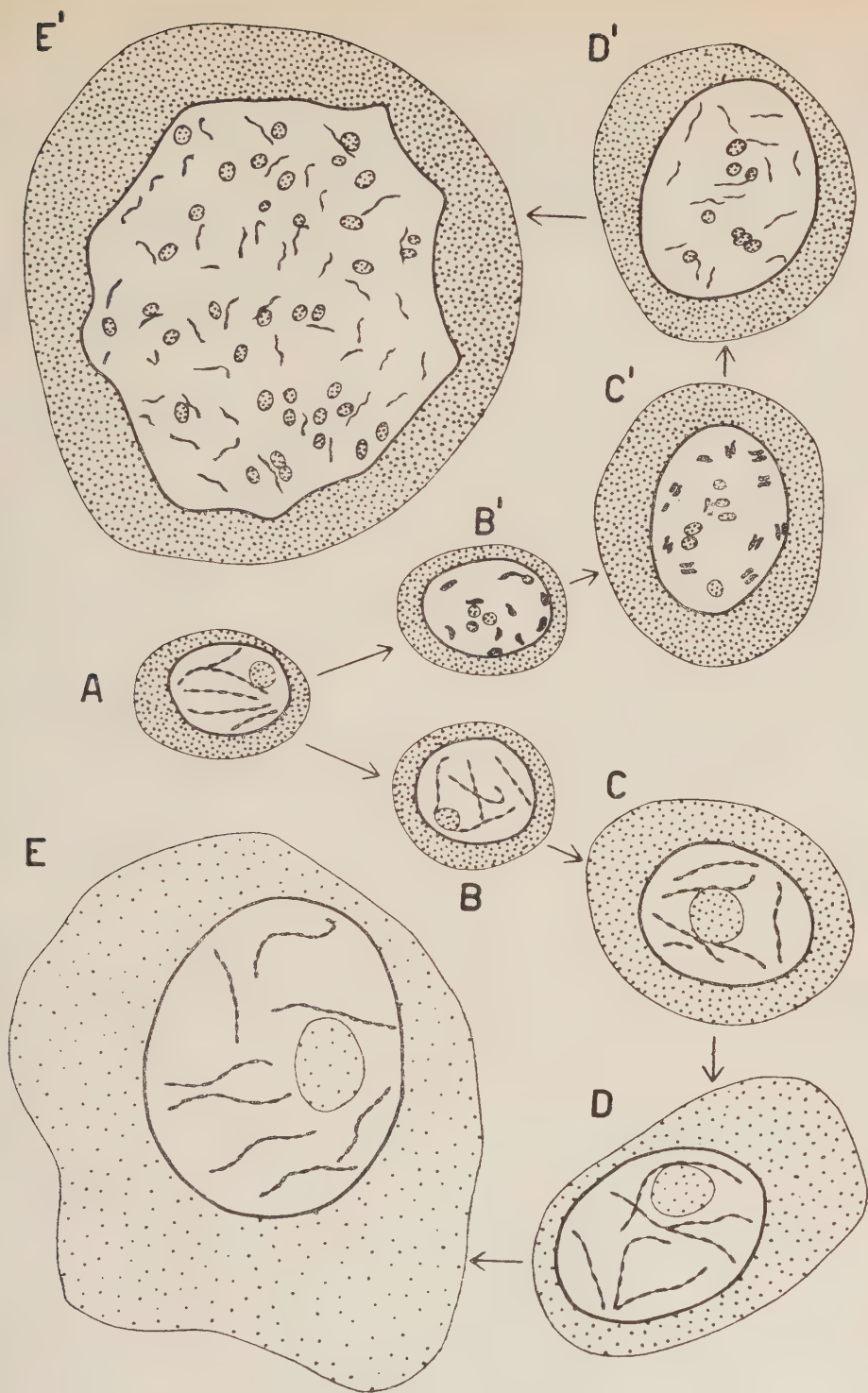


Fig. 1. — Disegni alla camera chiara di oociti e di cellule nutritrici, tutti allo stesso ingrandimento, 2200 volte circa, da un preparato per sezione di ovario di larva di V età.

A, oocita pachitenico; B, C, D, E, oociti in successive trasformazioni post-pachiténiche; B', C', D', E', cellule nutritrici in differenziazione e poliploidizzazione, adiacenti od appartenenti allo stesso follicolo degli oociti indicati colla stessa lettera. I cromosomi degli oociti e delle cellule nutritrici più grandi sono stati disegnati con un segno più intenso di quanto si vedano colorati in realtà, la lunghezza corrisponde approssimativamente a quella che si vede nel preparato. L'intensità della punteggiatura nel citoplasma e nei nucleoli indica l'intensità della colorazione colla pironina.



lenti ancor più contratti, più colorabili e con l'aspetto tipico di tetradi diacinetiche in cui sono spesso distinguibili i due omologhi. Queste ultime cellule diventeranno le cellule nutrici, delle quali è ormai avvenuta la prima differenziazione visibile al microscopio (fig. 1, C e C').

La formazione delle tetradi diacinetiche negli oociti che diventeranno cellule nutrici segna l'inizio delle loro successive trasformazioni nucleari, che consistono in un enorme accrescimento del nucleo con aumento del numero dei cromosomi, cioè in una poliploidizzazione per endomitosi (fig. 1, D' ed E').

Una prima divisione dei cromosomi si ha con la separazione degli omologhi di ciascuna tetrad; a questa seguono successive moltiplicazioni e divisioni.

Quando la poliploidizzazione non è ancora molto avanzata ed i cromosomi non sono molto numerosi, si può intravedere un ciclo di despiralizzazione e di spiralizzazione che accompagna le divisioni cromosomiche. I cromosomi despiralizzati non sono tuttavia lunghi quanto i cromosomi delle profasi mitotiche o di quelli meiotici; quando sono contratti hanno all'incirca le dimensioni dei cromosomi metafasici, cioè sono molto più piccoli, puntiformi.

Nei nuclei più grandi, dove i cromosomi sono numerosi è difficile poter seguire un ciclo di spiralizzazione, come pure non si riesce a determinare se le divisioni sono sincrone per tutti i cromosomi.

Nelle cellule nutrici molto grandi, al termine delle moltiplicazioni endomitotiche, quando appare più attiva la produzione di ribonucleoproteine che vengono immesse nell'oocita, i cromosomi sono relativamente lunghi.

*Comportamento dei nucleoli delle cellule nutrici.* - Negli oogoni e negli oociti fino al pachitene vi è un solo nucleolo, relativamente piccolo, pironinofilo. Nel postpachitene, mentre gli oociti veri e propri hanno sempre un unico nucleolo che si accresce, come descriverò più avanti, negli oociti che diventeranno cellule nutrici ne compaiono due o tre, che rimangono sempre piccoli (fig. 1, B e B').

Durante la poliploidizzazione i nucleoli aumentano notevolmente di numero; in molti casi sembra si formino per moltiplicazione di nucleoli preesistenti, in altri casi che si formino *ex novo*. Non si può dire se la loro moltiplicazione va di pari passo con la moltiplicazione dei cromosomi poiché è praticamente impossibile seguire i cicli di endomitosi. Essi sono sempre piccoli, sferici intensamente pironinofili e quasi sempre uniti a cromosomi.

Al termine della poliploidizzazione, quando i cromosomi appaiono più lunghi e sinuosi, si trovano nucleoli in gradi diversi di pironinofilia, alcuni rotondeggianti altri a semiluna. Sembra di intravedere un processo di carica e scarica di ribonucleoproteine che probabilmente passano nel citoplasma. Infatti il citoplasma delle cellule nutrici è sempre intensamente pironinofilo; sostanze pironinofile vengono immesse nell'oocita mentre il citoplasma delle cellule nutrici non aumenta relativamente molto di volume.

*Struttura del nucleo degli oociti.* — Le trasformazioni postpachiténiche degli oociti sono all'inizio praticamente simili a quelle che si osservano nella maggior parte degli oociti in secondo periodo di accrescimento delle altre specie animali. Si ha un accrescimento del nucleo e del citoplasma. Nel nucleo i bivalenti diventano sempre più lunghi e perdono progressivamente la loro Feulgen-positività; come è stato detto vi è un unico nucleo pironinofilo che si accresce. Il citoplasma è pure pironinofilo.

A differenza di quanto si osserva negli oociti senza cellule nutrici, nel baco da seta, quando si è formato il follicolo ovarico e entrano in funzione le cellule nutrici, il citoplasma pur aumentando ancora notevolmente di volume, prima di formare il tuorlo figurato, perde precocemente la generale pironinofilia. Il nucleo ed il nucleolo non presentano un accrescimento relativo cospicuo; il nucleolo perde pure l'affinità per la pironina e si colora intensamente solo coi coloranti acidi (verde luce, « cyanol green ») e nel suo interno compaiono dei vacuoli.

A questo stadio si vedono nel nucleo numerosi piccoli granuli aderenti ai cromosomi, colorabili intensamente solo coi coloranti acidi, molto debolmente colla pironina.

Sembra perciò che nel nucleo dell'oocita si esaurisca precocemente l'attività del nucleolo di formare ribonucleoproteine, mentre permane l'attività dei cromosomi di formare sostanze che si liberano nel karioplasma.

Si deve ricordare che l'accrescimento del citoplasma dell'oocita è regolato dalle ribonucleoproteine elaborate dalle cellule nutrici.

#### DISCUSSIONE E CONCLUSIONI.

Nell'ovario del baco da seta da un oogonio, attraverso 3 divisioni, si formano 8 oociti, dei quali 1 si differenzia in oocita vero e proprio e 7 diventano cellule nutrici.

Fino al pachitene gli 8 oociti non sono distinguibili tra loro; dopo questo stadio uno evolve in senso ovocitario e presenta le trasformazioni nucleari caratteristiche del II periodo di accrescimento, negli altri 7 oociti si osserva la contrazione dei bivalenti con la formazione di tetradi diacinetiche.

Questo è il primo segno di differenziazione delle cellule nutrici: successivamente si ha separazione intranucleare degli omologhi e moltiplicazione per endomitosi.

Un indice relativamente precoce della differenziazione degli oociti in senso oocitario o verso le cellule nutrici è dato dal comportamento dei nucleoli. Negli oociti veri e propri si ha sempre un unico nucleolo che aumenta di volume; negli oociti che diventeranno cellule nutrici si osservano precocemente due o tre nucleoli che poi aumenteranno di numero, rimanendo sempre piccoli.

Questo comportamento dei nucleoli, a parer mio, va messo in relazione con la differenziazione cellulare e nucleare ed indica che nell'oocita è esal-

tata l'attività trofica della cromatina, che si manifesta appunto con la despiralizzazione dei cromosomi e l'aumento di volume del nucleolo; nelle cellule nutrici si ha invece depressione di questa attività e quindi nucleoli piccoli e cromosomi contratti, in relazione alla loro successiva moltiplicazione e divisione.

Questo tipo di differenziazione nucleare con esaltazione o depressione della trofocromatina od eterocromatina è in un certo senso simile a quella messa in evidenza nella differenziazione sessuale delle cellule germinali degli Ortotteri (Colombo 1954) [7]: essa consiste essenzialmente in due stati funzionali antagonisti della cromatina.

Dopo la differenziazione delle cellule nutrici comincia la loro attività vera e propria. Oocita e cellule nutrici nel follicolo ovarico formano un'unità funzionale indirizzata alla sintesi di proteine nel citoplasma dell'oocita. Questa sintesi avviene attraverso un sistema in cui intervengono ribonucleoproteine (sistema di Caspersson) che in questo caso vengono fornite all'oocita dalle cellule nutrici (Colombo 1956) [4].

La produzione di ribonucleoproteine da parte delle cellule nutrici avviene per partecipazione attiva del nucleo e dei nucleoli i quali, molto numerosi, presentano delle variazioni di forma e di carica di ribonucleoproteine. Le cellule nutrici possono essere considerate un sistema vicariante di quello nucleolare dell'oocita, sistema che è invece particolarmente attivo ed evidente negli oociti senza cellule nutrici (cfr. Vannini 1954) [8].

Durante la fase di attività delle cellule nutrici il sistema nucleolare dell'oocita risulta poco o nulla attivo, infatti il nucleolo perde la pironinofilia e non procede nel suo accrescimento; il citoplasma dell'oocita è debolmente pironinofilo.

Dalle osservazioni fatte su materiale particolarmente favorevole, come i nuclei degli oociti degli Anfibi, risulterebbe che negli oociti i nucleoli si formano dalle zone nucleoloformatrici; da tutta la superficie dei cromosomi verrebbero formate altre sostanze, che al microscopio appaiono come granuli; che si dissolvono nel karioplasma. L'attività dei cromosomi si manifesterebbe morfologicamente con due strutture, una i nucleoli veri e propri, l'altra prodotti cromosomici meno ben definibili morfologicamente, come granuli, «loops» ecc. (Gall 1955) [9].

Negli oociti del baco da seta la distinzione dei due tipi di prodotti cromosomici è possibile dall'esame comparativo della struttura nucleare in stadi successivi del II periodo di accrescimento. Il nucleolo degli oociti, come ho detto sopra, presenta una depressione della sua attività che è vicariata da quella delle cellule nutrici; nel nucleo degli oociti si osservano tuttavia granuli, debolmente pironinofili, aderenti ai cromosomi che rappresentano l'altro prodotto dell'attività cromosomica.

I nucleoli delle cellule nutrici e quello dell'oocita si formano quasi sicuramente dalle zone nucleoloformatrici dei cromosomi; le ribonucleoproteine che regolano la sintesi proteica nel II periodo di accrescimento debbono essere considerate il prodotto di una regione determinata di un cromosoma.



Esse perciò non rappresentano i prodotti di tutti i loci cromosomici elaboranti sostanze altamente specifiche che si accumulano nell'uovo durante l'oogenesi.

Tali sostanze, prodotte da tutti i geni sono invece probabilmente i granuli o le altre strutture che si vedono aderenti ai cromosomi, fortemente despiralizzati in questo stadio dell'oogenesi, e che si dissolvono nel karioplasma e successivamente passano nel citoplasma dell'uovo. Ciò è in accordo con l'opinione che i geni in stato fisiologicamente attivo prendono la forma di fibre estese (Callan 1956) [10].

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. GIARDINA, *Origine dell'oocite e delle cellule nutrici nel «Dytiscus»*, «Intern. Monatsch. Anat. u. Phys.», vol. 18, 417-484 (1901).
- [2] J. MACHIDA, *The development of the ovary in the silkworm (Bombyx mori)*, «Jour. Coll. Agric. Univ. Tokio», vol. 7, 293-351 (1926).
- [3] Ph. DEPDOLLA, *Die Keimzellenbildung und die Befruchtung bei den Insekten*, in C. SCHRÖDER, *Handbuch der Entomologie*, vol. 1, 1021-1080 (1926).
- [4] G. COLOMBO, *Ricerche citologiche sull'oogenesi del Baco da seta (Bombyx mori L.) e considerazioni sull'oogenesi degli Insetti*, «Boll. di Zool.», in corso di stampa (1956).
- [5] H. BAUER, *Die polyploide Natur der Riesenchromosomen*, «Naturwiss.», vol. 26, 77 (1938).
- [6] T. S. PAINTER e E. C. REINDROP, *Endomitosis in the nurse cells of the ovary of «Drosophila melanogaster»*, «Chromosoma», vol. 1, 276-283 (1939).
- [7] G. COLOMBO, *Eterocromosomi e differenziazione del sesso. Osservazioni sulle cellule germinali di Anacridium aegyptium L. (Orth.)*, «Riv. di Biol.», vol. 45, 105-115 (1954).
- [8] E. VANNINI, *Il nucleolo nella vita della cellula*, «Boll. di Zool.», vol. 26, pp. 649-708 (1954).
- [9] J. G. GALL, *Problems of structure and function in the amphibian oocyte nucleus*, «Symp. Soc. Exp. biol.», vol. 9, pp. 358-371 (1955).
- [10] H. G. CALLAN e L. LOYD, *Visual demonstration of allelic differences within cell nuclei*, «Nature», vol. 178, pp. 355-357 (1956).

**Genetica.** — *Velocità di sviluppo e ritmicità di sfarfallamento in «Drosophila melanogaster»* (\*). Nota di BENEDETTO NICOLETTI e ANGELA SOLIMA, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Per lo studio di alcune caratteristiche fisiologiche di individui appartenenti a diverse popolazioni e linee di *Drosophila melanogaster* si è presentata la necessità di effettuare un'accurata determinazione della velocità di sviluppo.

Tale determinazione, ai fini del nostro lavoro <sup>(1)</sup>, doveva costituire la base per alcuni confronti, e possedere quindi il requisito della massima esattezza, intendendo per velocità di sviluppo il periodo medio intercorrente tra lo stadio di uovo fecondato e deposto e quello di adulto sfarfallato. Si è cercato infatti di mettere in evidenza alcune possibili diversità — riguardo a questo carattere — tra individui di un ceppo Oregon-R isogenico (fratello ×

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) B. NICOLETTI e A. SOLIMA, «Atti del XXVIII Congresso dell'Unione Zoologica Italiana», Napoli, 1956, in corso di stampa.



sorella alla 370<sup>a</sup> generazione), individui di una popolazione di massa Oregon-R, individui di una popolazione raccolta in natura a Perugia ed individui derivanti dagli incroci reciproci tra la popolazione selvatica Perugia e la popolazione Oregon-R massa.

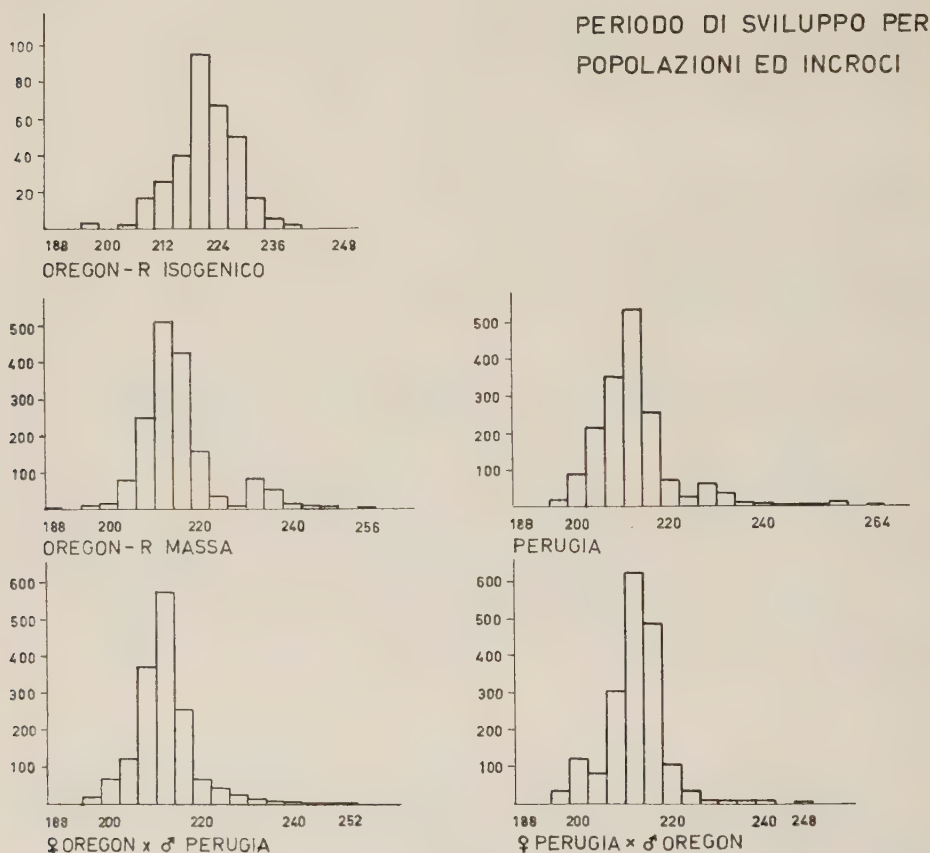


Fig. 1.

In ordinata il numero degli individui; in ascissa le ore dall'inizio dello sviluppo.

A tal fine è stata adottata la seguente tecnica: per ciascuna linea presa in considerazione, vennero posti insieme 10 femmine vergini della stessa età e provenienti da colture singole e 20 maschi. Dopo 48 ore, gli individui di ogni coltura così composta venivano travasati in nuove colture da 100 cc con fondo di carta nera disteso sul mezzo nutritivo. Ogni quattro ore si procedeva ad un nuovo trasferimento degli individui in colture dalle caratteristiche già indicate e si effettuava la raccolta delle uova deposte. Esse venivano messe a sviluppare in gruppi di 20 in colture di 100 cc, in camera termostatica a  $25^{\circ} \pm 1^{\circ}$ . Tale tecnica, salvo lievi varianti, è quella indicata da Buzzati-Traverso in un recente lavoro su popolazioni artificiali di drosofile <sup>(2)</sup>.

(2) A. A. BUZZATI-TRAVERSO, « Heredity », IX, pp. 153-186 (1955).

Per ciascuna linea e per ciascun incrocio venivano raccolte 2000 uova. Per il ceppo Oregon-R isogenico la determinazione della velocità di sviluppo veniva invece effettuata su sole 340 uova, dato l'alto grado di sterilità nelle femmine di questo ceppo inincrociato. La raccolta delle uova si è protratta per tre giorni.

Non appena sono stati osservati i primi individui sfarfallati (e ciò è avvenuto dopo circa sette giorni dal momento in cui le uova erano state messe a svilupparsi in camera termostatica), abbiamo iniziato dei turni per il conteggio dei nati, suddividendoli per sesso. Tali turni si sono susseguiti ogni quattro ore durante tutta la giornata e la notte.

La velocità media di sviluppo nei vari ceppi, popolazioni ed incroci, risulta dalla Tabella I, nella quale sono pure indicati i risultati dei confronti effettuati, verificati statisticamente con il  $t$  di Student.

Si può notare che la minore velocità di sviluppo è presentata dalla linea isogenica, mentre i valori maggiori si riscontrano, nell'ordine, per la popolazione Oregon-R massa e per la popolazione Perugia. Gli individui derivati dagli incroci reciproci tra le due popolazioni non mostrano sensibili diversità od aumenti nei confronti del valore rilevato per la popolazione selvatica Perugia. Tali risultati mostrerebbero una certa proporzionalità tra velocità di sviluppo e grado di eterozigosi.

Dagli istogrammi in figura 1 si può inoltre rilevare che non esistono notevoli asimmetrie nella distribuzione del carattere « velocità di sviluppo » per la linea inincrociata, le due popolazioni e gli incroci reciproci.

Come già osservato in precedenti Note <sup>(3)</sup>, <sup>(4)</sup>, le femmine mostrano una velocità di sviluppo sensibilmente maggiore di quella dei maschi; tale diversità, nelle condizioni in cui si è verificato il presente esperimento, e cioè di assenza di selezione larvale, non porta peraltro ad alterazioni nel rapporto sessi.

La variabilità – espressa come scarto quadratico medio ( $s$ ) e come coefficiente di variabilità (c. v.) – considerata per il carattere « velocità di sviluppo » è notevolmente maggiore nelle popolazioni Oregon-R massa e Perugia, rispetto a quella presentata dagli individui derivati dagli incroci reciproci. Tale dato è in accordo con le osservazioni di Robertson & Reeve e di Lerner <sup>(5)</sup>, <sup>(6)</sup>, sul tamponamento degli eterozigoti. Il ceppo Oregon isogenico, che per il suo carattere di alto grado di inincrocio, dovrebbe manifestare la più forte variabilità, non fa eccezione che apparentemente. Infatti i valori piuttosto bassi dello scarto quadratico medio e del coefficiente di variabilità si riferiscono alla sola variabilità di origine ambientale, non essendo possibile in tale ceppo alcuna variabilità di origine genetica. Tenendo presente questa considerazione, si può rilevare come la variabilità del ceppo risulti superiore a quella riscontrata nelle due popolazioni e negli incroci reciproci.

(3) G. MORPURGO, B. NICOLETTI, A. SOLIMA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, 347-351 (1955).

(4) G. MORPURGO, B. NICOLETTI, A. SOLIMA, « Atti II Congresso dell'Associazione Genetica Italiana ». Supplem. a « La Ricerca Scientifica », 26, 53-60 (1956).

(5) W. F. ROBERTSON & E. R. REEVE, « Nature », 170, 296 (1952).

(6) M. LERNER, *Genetic Homeostasis*, Edinburgh, 1955.

TABELLA I.

*Velocità di sviluppo in ore, nella popolazione isogenica Oregon-R, nella popolazione Oregon-R massa, nella popolazione sebatia Perugia e negli incroci reciproci tra Oregon-R massa e Perugia.*

MEDIE + e. s.			c. v.	Confronti con il $t$ di Student									
				Isogenico		Perugia		Perugia		$\varnothing$ Oreg. $\times$ $\delta$ Per.		$\varnothing$ Per. $\times$ $\delta$ Oreg.	
		s.		$t$	P	$t$	P	$t$	P	$t$	P	$t$	P
Oregon-R isogenico . . .	$\varnothing$	219,100 $\pm$ 0,46	5,922	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	$\delta$	229,737 $\pm$ 0,53	6,531	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	tot.	221,384 $\pm$ 0,33	6,521	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Oregon-R massa . . .	$\varnothing$	211,438 $\pm$ 0,22	6,359	14,409	< 0,001	—	—	—	—	—	—	—	—
	$\delta$	218,848 $\pm$ 0,29	8,579	6,799	< 0,001	—	—	—	—	—	—	—	—
	tot.	215,192 $\pm$ 0,20	9,446	9,790	< 0,001	—	—	—	—	—	—	—	—
Perugia . . .	$\varnothing$	208,856 $\pm$ 0,29	7,074	17,515	< 0,001	8,250	< 0,001	—	—	—	—	—	—
	$\delta$	215,139 $\pm$ 0,27	7,968	12,534	< 0,001	9,160	< 0,001	—	—	—	—	—	—
	tot.	211,923 $\pm$ 0,19	8,124	19,480	< 0,001	11,390	< 0,001	—	—	—	—	—	—
$\varnothing$ Oreg. $\times$ $\delta$ Per.	$\varnothing$	209,009 $\pm$ 0,19	5,531	20,863	< 0,001	8,350	< 0,001	0,49	< 0,7	—	—	—	—
	$\delta$	214,562 $\pm$ 0,18	5,105	19,075	< 0,001	12,010	< 0,001	1,70	< 0,1	—	—	—	—
	tot.	211,734 $\pm$ 0,16	6,357	24,369	< 0,001	13,300	< 0,001	0,07	> 0,9	—	—	—	—
$\varnothing$ Per. $\times$ $\delta$ Oreg.	$\varnothing$	209,036 $\pm$ 0,18	5,676	20,729	< 0,001	8,020	< 0,001	0,94	< 0,4	0,47	< 0,7	—	—
	$\delta$	214,873 $\pm$ 0,16	4,856	20,074	< 0,001	11,940	< 0,001	0,84	< 0,4	1,26	> 0,2	—	—
	tot.	211,859 $\pm$ 0,14	6,061	25,468	< 0,001	13,130	< 0,001	0,03	> 0,9	0,05	> 0,9	—	—

È noto agli studiosi che hanno compiuto osservazioni su *Drosophile* come nelle colture di laboratorio la maggior parte delle pupe mature si schiuda nelle ore del mattino. Da ciò deriva che la raccolta delle femmine vergini viene effettuata prevalentemente e con migliori risultati nelle ore del mattino, che consentono di disporre di un maggior numero di individui.

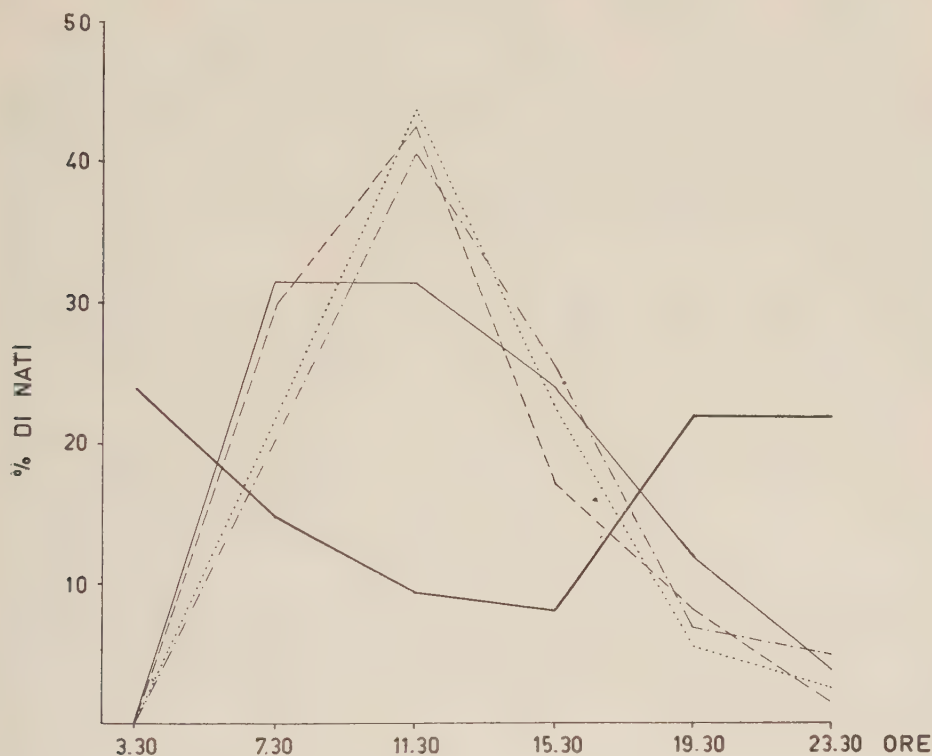


Fig. 2.

- Oregon-R isogenico
- - - Oregon-R massa
- ... Perugia
- · - · ♀ Perugia × ♂ Oregon-R massa
- - - - ♀ Oregon-R massa × ♂ Perugia.

Durante la schedatura degli individui, effettuata ogni quattro ore ininterrottamente per cinque giorni, abbiamo potuto osservare in maniera evidente il fenomeno dell'intensificarsi degli sfarfallamenti nelle prime ore della giornata. E questo in modo particolare per la popolazione Oregon-R massa, per la popolazione Perugia e per gli individui derivati dagli incroci reciproci tra tali popolazioni. Gli sfarfallamenti si sono distribuiti nel corso della giornata, secondo i dati seguenti:

Individui raccolti nelle ore diurne: n. 5968 (schede delle 7,30; 11,30 e 15,30).



Individui raccolti nelle ore notturne: n. 787 (schede delle 19,30; 23,30 e 3,30).

La linea inincrociata Oregon-R isogenica ha invece dato risultati notevolmente diversi: contro 101 individui nati durante le ore diurne, sono stati raccolti 211 individui nelle ore notturne. Comportamento quindi quasi opposto, del quale non sono affatto chiare le ragioni.

Il grafico in figura 2 mette chiaramente in evidenza tale andamento.

Dalla ritmicità nello sfarfallamento derivano possibilità di errore per una esatta determinazione della velocità di sviluppo: la sospensione dello sfarfallamento durante le ore notturne si ripercuote in diversa maniera sui diversi ceppi qualora la raccolta delle uova, anche se effettuata ogni 4 h, non avvenga per lotti parziali numericamente eguali. Tale difficoltà non era stata prospettata da nessun precedente lavoro, per quanto è a nostra conoscenza.

Studi sulla ritmicità delle nascite in *Drosophile* sono stati effettuati in questi ultimi anni da Kalmus<sup>(7)</sup>, Brett<sup>(8)</sup>, e Pittendrigh<sup>(9)</sup>,<sup>(10)</sup>: abbiamo preso ad esaminarne i risultati dopo aver compiuto queste nostre osservazioni.

La tesi del « sistema ad orologeria » relativa alla ritmicità nello sfarfallamento in *Drosophile*, quale viene sostenuta dal Pittendrigh, lascia oscura la ragione del diverso comportamento del ceppo isogenico. Le variazioni di luce e di temperatura, che possono incidere su tale ritmicità, non sono state da noi prese in esame durante il periodo di sviluppo in camera termostatica, dato che il fenomeno ci è apparso evidente soltanto durante la schedatura dei nati, a periodo di sviluppo ultimato. Comunque, le variazioni di luce e di temperatura sono state identiche per tutte le colture poste a sviluppare, comprese quelle del ceppo isogenico.

Queste osservazioni, di un certo interesse per quanto riguarda il particolare comportamento della linea isogenica, sono da considerarsi preliminari ad una successiva serie di indagini più complete e dettagliate, tendenti a chiarire le cause di tale fenomeno.

(7) H. KALMUS, « Nature », 147, 72 (1940).

(8) W. Y. BRETT, « Ann. Ent. Soc. of America », 48, 119-191 (1955).

(9) C. S. PITTENDRIGH, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 40, 1018-1028 (1954).

(10) C. S. PITTENDRIGH, in *Perspectives in Marine Biology*, La Jolla, in corso di stampa, 1956.

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XX. *Effetto dell'acido ascorbico e dell'acido deidroascorbico sull'attività fosfoglucomutasica* (\*). Nota di ORESTE ARRIGONI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

Numerosi lavori già da tempo effettuati in questo stesso Istituto hanno dimostrato come molti effetti fisiologici che conseguono alla somministrazione d'acido ascorbico e che, per esempio, riguardano la viscosità strutturale del plasma [1], la distensione cellulare [2], le curvature d'accrescimento [3], ecc., siano in netta opposizione — nella pianta — a quelli che possono essere ottenuti per trattamento auxinico. Lavori successivi hanno consentito di precisare queste conclusioni ed hanno fornito la dimostrazione che molti effetti antiauxinici dell'acido ascorbico sono da imputare al suo normale prodotto di ossidazione, l'acido deidroascorbico. Può essere citata, a sostegno di tale precisazione, tutta una serie di osservazioni eseguite *in vitro* e che si riferiscono alla capacità dell'acido deidroascorbico di legarsi alle proteine [4], di interagire con i gruppi sulfidrilici [5] e, finalmente, di agire come un efficace inibitore di diversi enzimi implicati nel metabolismo ossidativo come in quello energetico [6-7-8].

L'interesse di tali reperti appare ovvio quando si consideri che l'acido deidroascorbico (DHA) è, nelle piante, un normale metabolita di generale diffusione; cosicché l'averne rivelato una così determinante e multiforme capacità d'azione attribuisce un interesse del tutto particolare allo studio del suo significato fisiologico da un nuovo e doppio punto di vista: da quello cioè, della sua eventuale capacità di comportarsi come un regolatore dell'attività cellulare, e da quello — strettamente correlato al primo — dei fattori che ne controllano il metabolismo nella cellula. L'importanza di queste osservazioni si è ulteriormente accresciuta in seguito al conseguimento di altri risultati i quali suggeriscono che l'azione fisiologica degli ormoni di crescita possa essere spiegata, almeno in larga parte, come la conseguenza di un effetto inibente primario, degli ormoni stessi, sull'ossidazione dell'acido ascorbico [9-10-11]: compito almeno parziale dell'auxina sarebbe dunque quello di mantenere opportunamente basso, nella cellula, il livello di concentrazione del DHA [12].

In questa Nota, il cui fine generale è quello di ulteriormente approfondire la conoscenza del meccanismo d'azione dell'acido ascorbico — sia nella sua forma ridotta che in quella ossidata — io riferisco i risultati di una serie di esperienze che hanno dimostrato come sia opposta l'azione degli acidi AA e DHA su di un enzima, la fosfoglucomutasi, la cui attività io ho studiato *in vitro* e su preparati a grado notevole di purificazione.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

## MATERIALE E METODI.

La preparazione della fosfoglucomutasi è stata fatta partendo da semi di pisello (*Pisum sativum* v. Alaska) che venivano fatti rigonfiare in acqua distillata per circa 24 ore ed a temperatura ambiente, in modo che nei loro cotiledoni l'attività fosfoglucomutastica raggiungesse un elevato valore. Da tale materiale il preparato enzimatico veniva ottenuto seguendo, nelle sue linee generali, la tecnica suggerita da Najjar per la preparazione della fosfoglucomutasi da muscolo [13].

I piselli venivano ridotti ad una poltiglia omogenea tritrandoli in mortaio con sabbia di quarzo e con aggiunta d'un volume d'acqua distillata. Dopo spremitura attraverso garza e riestrazione del residuo, l'estratto veniva portato a pH 5 con acido acetico 1 M e lasciato per 4-5 ore a 5°C. Indi si centrifugava a  $7000 \times g$ . e si procedeva al frazionamento con solfato ammonico (omettendo peraltro i trattamenti termici suggeriti da Najjar avendo constatato che, nelle mie condizioni, essi avrebbero determinato una considerevole perdita dell'attività dell'enzima). Il successivo procedimento si uniformava a quello di Najjar tranne che per la natura del tampone nel quale venivano sospese le varie frazioni: io ho potuto constatare, infatti, una maggior stabilità delle mie frazioni enzimatiche se sospese in Tris 0,1 M, pH 7,2, anziché nel tampone all'acetato 1,5 M, pH 5 come indicato da Najjar [13]. Con tali modificazioni, e raccogliendo la frazione che precipita tra 58 e 63 % di saturazione di solfato ammonico, io ho potuto ottenere un'attività specifica quindici volte maggiore di quella dall'estratto grezzo (Tabella I).

TABELLA I.

*Purificazione della fosfoglucomutasi.*

Frazioni	mg proteine	attività specifica	ricupero %
grezzo . . . . .	11240	0,12	—
30-60 $(NH_4)_2SO_4$ % saturo .	949	0,84	59
50-65       " . . . . .	371	0,93	25
58-63       " . . . . .	28,8	1,81	8

Il dosaggio dell'attività fosfoglucomutastica veniva effettuato introducendo in tubi da centrifuga mantenuti a 30°C le soluzioni di  $MgSO_4$ , Gl-I-P, Tris, cisteina (sempre di fresco preparata) e, da ultimo, aggiungendo l'enzima in quantità tale da ottenerne 0,1 unità/cc. (1 unità d'enzima è quella che, nell'unità di tempo ed in condizioni standardizzate, converte 3,2  $\mu M$  di Gl-I-P). Va avvertito, infatti, che, nell'intervallo tra 0,0 e 0,28 unità, l'attività fosfoglucomutastica è risultata proporzionale alla quantità d'enzima. Quanto alla concentrazione del substrato i miei dati risultarono pienamente conformi a quelli già noti [14] e secondo i quali, raggiunta la conc. ottimale, un ulteriore aumento della concentrazione del substrato progressivamente inibisce l'attività dell'enzima (confermando dati già noti, io ho trovato che la conc. ottimale di Gl-I-P è di  $5 \times 10^{-3} M$ ; la conc. di  $8 \times 10^{-3} M$  è già leggermente inibente; mentre la conc. di  $10^{-2} M$  inibisce l'attività fosfoglucomutastica del 21 %). Il tempo di reazione è stato quello che permetteva di dosare il 40 % circa di Gl-I-P non convertito. Quanto al pH io ho operato a quello di 7,2 e non ho potuto prendere in considerazione le probabili stimolazioni a valori di pH lievemente più alti giacché tali valori avrebbero compromesso la stabilità dell'AA e soprattutto del DHA.

A tempo di reazione ultimato, la reazione veniva interrotta mediante aggiunta di 1 cc di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  5 N, dopo di ch  il volume finale veniva portato a 5 cc. Le provette venivano allora introdotte in bagno maria e idrolizzate per 5 min. pr.; infine il dosaggio del P inorganico veniva fatto col metodo di Briggs [15] mentre le proteine venivano dosate col metodo del biureto [16] e col metodo spettrofotometrico di Warburg e Christian modificato da Kalckar [17].

Il DHA veniva preparato ogni volta ossidando l'AA con bromo e, dopo eliminato l'eccesso di bromo con azoto, portando a pH 6,7 con Tris 0,2 M. La scelta del Tris   stata determinata dalla sua azione protettiva del DHA nei confronti della sua demolizione spontanea; non si   invece potuto ricorrere all'uso del versene di cui ho potuto constatare una energica azione inibente sull'attivit  fosfoglucomutaseica.

L'acido dichetogulonico (DKG) veniva preparato dal DHA elevando la soluzione di questo a pH sino ad 8 per 10 min. pr. e, successivamente, acidificando con HCl diluito fino a pH 6,7.

Sono stati usati: Tris della Sigma; Gl-I-P della Sigma;  $\text{MgSO}_4$  della Merck; cisteina cloridrato della Merck; EDTA della Merck;  $\text{ZnSO}_4$  della Merck.

Abbreviazioni usate: AA = acido ascorbico; DHA = acido deidroascorbico; DKG = acido dichetogulonico; Tris = triidrossiaminometano; Gl-I-P = glucosio-I-fosfato; EDTA = versene (sale sodico dell'ac. etilendiamminotetracetico).

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

I risultati fondamentali delle presenti ricerche sono compendati nella Tabella II e possono essere riassunti dicendo che l'AA ha dimostrato, sulla fosfoglucomutasi, un'azione nettamente attivante e il DHA una altrettanto chiara azione inibente; quanto al DKG (prodotto di decomposizione del DHA per rottura dell'anello lattonico), anche in questo caso - come gi  in altri - esso   risultato privo di un effetto significativo. Trascurando quindi il DKG, io mi soffermer  a illustrare con maggiori particolari quanto ho potuto constatare circa il comportamento dei due composti attivi, l'AA ed il DHA.

TABELLA II.

*Effetto degli acidi ascorbico, deidroascorbico e dichetogulonico sull'attivit  fosfoglucomutaseica.*

Condizioni sperimentali: Gl-I-P  $5 \cdot 10^{-3}$  M,  $\text{MgSO}_4$   $5 \cdot 10^{-3}$  M, Tris 0,1 M pH 7,2, enzima 0,1 unit . Tempo di reazione 12 minuti, temperatura 30 gradi C. Volume finale 1 cc.

	$\mu\text{M}$ Gl-I-P convertito	% stimolazione	% inibizione
Controllo . . . . .	0,509	—	—
AA $5 \cdot 10^{-4}$ M . . . . .	0,722	42	—
DHA $2 \cdot 10^{-3}$ M . . . . .	0,324	—	36
DKG $2 \cdot 10^{-3}$ M . . . . .	0,448	—	11



A) *Azione attivante sulla fosfoglucomutasi dell'acido ascorbico.*

Siffatta azione appare evidente dai dati contenuti nella Tabella II come anche dal grafico fig. 1. Le relative esperienze sono state eseguite su preparati nei quali risultò assente ogni attività enzimatica capace di ossidare quantità significative di AA. È da osservare come la curva d'azione dell'AA sulla mutasi appaia quanto mai caratteristica nel senso che solo concentrazioni d'ordine nettamente fisiologico si dimostrano pienamente attive con un massimo di stimolazione (circa 40 %) in corrispondenza ad una conc. d'AA di  $6 \times 10^{-4}$  M; le concentrazioni superiori, invece, non solo appaiono incapaci di un maggiore effetto ma, al contrario, risultano addirittura meno attive.

L'interpretazione forse più ovvia, del meccanismo dell'azione attivante dell'AA sulla fosfoglucomutasi, potrebbe essere quella che si basa sull'estrema sensibilità di quest'enzima ad una quantità di metalli quali lo Zn, il Cu, il Fe, ecc. [22]; cosicché l'effetto dell'AA potrebbe essere attribuito ad una sua azione chelante su qualche ione metallico ad azione inibente, eventualmente presente in tracce nei miei preparati. Allo scopo di controllare la validità di una tale ipotesi io ho fatto alcune esperienze atte a indicare se, e come, l'azione attivante dell'AA venga influenzata a) dalla presenza di cisteina la cui azione attivante sulla mutasi è comunemente attribuita alla sua capacità di sequestrare gli ioni di metalli pesanti; b) dalla presenza di versene di cui è nota la forte azione chelante; c) dalla presenza di ioni metallici a concentrazione tale che l'attività mutasica ne fosse inibita di circa il 50 %.

TABELLA III.

*Effetto dell'acido ascorbico sull'attività fosfoglucomutastica dosata in presenza di cisteina, sequestrane e Zn.*

Condizioni sperimentali: Gl-I-P  $5 \cdot 10^{-3}$  M, Tris 0,1 M, pH 7,2,  $\text{MgSO}_4$   $5 \times 10^{-3}$  M, enzima 0,1 unità, temperatura 30 gradi C., tempo di reazione 12 minuti. Volume finale 1 cc. Nelle prove con EDTA la concentrazione del  $\text{MgSO}_4$  è stata di  $6 \times 10^{-3}$  M.

	$\mu\text{M}$ Gl-I-P convertito	Variazioni % rispetto al controllo	$\mu\text{M}$ Gl-I-P convertito in presenza di AA	Variazioni % rispetto al con- trollo con AA.
Controllo . . . . .	0,523	—	0,720	—
Cisteina $6 \times 10^{-3}$ M .	0,644	+ 23	0,794	+ 18
$\text{ZnSO}_4$ $3 \times 10^{-5}$ M . .	0,022	— 96	—	—
» $10^{-5}$ M . .	0,283	— 46	0,321	— 55
EDTA $10^{-4}$ M . .	0,381	— 27	0,409	— 43

I risultati di queste esperienze, riassunti nella Tabella III, sembrano, nel loro insieme, sfavorevoli all'idea che l'attivazione da AA possa essere ricondotta ad un'azione chelante. Si constata, infatti, che l'azione attivante dell'AA non è soppressa dalla cisteina, come sarebbe da attendersi se l'azione dei due composti consistesse nel sequestro dello stesso tipo di ioni; per contro, l'azione dell'AA diminuisce nettamente in presenza di tracce di Zn, ciò che evidentemente esclude un'azione chelante dell'AA sullo Zn come causa del suo effetto di stimolo sulla fosfoglucomutasi. Di più difficile interpretazione appaiono i risultati dell'esperienza con versene: risulta infatti che, in presenza di questo chelante, l'azione dell'AA viene effettivamente e quasi totalmente soppressa; senonché la forte inibizione indotta dal versene, di per sé stesso, sull'attività mutasica dimostra come il meccanismo del fenomeno sia troppo complesso perché se ne possa trarre alcuna conclusione utile ai fini del problema qui considerato.

TABELLA IV.

*Effetto dell'acido deidroascorbico sull'attività fosfoglucomutasi nelle varie frazioni della purificazione.*

Condizioni sperimentali: tutte uguali a quelle della tabella IV, tranne che il volume nell'estratto grezzo è stato di 2 cc.

	Attività specifica	$\mu\text{M}$ Gl-I-P convertito	% inibizione
Estratto grezzo . . . . .	0,12	0,498	—
»    »    + DHA $2 \cdot 10^{-3}$ M .	—	0,414	17
Fraz. 30-65 $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ % saturo .	0,84	0,486	—
»    + DHA $2 \cdot 10^{-3}$ M . .	—	0,375	23
»    50-65 $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ % saturo .	0,93	0,501	—
»    »    + DHA $2 \cdot 10^{-3}$ M . .	—	0,351	30
»    58-63 $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ % saturo .	1,81	0,507	—
»    »    + DHA $2 \cdot 10^{-3}$ M . .	—	0,335	34

#### B) Azione inibente del DHA sull'attività fosfoglucomutasi.

I dati che illustrano l'azione del DHA sono pure reperibili nella Tab. II e nella fig. 1. Una prima osservazione ch'essi consentono è che il DHA esercita un'azione inibente, sull'enzima da me studiato, anche se usato a concentrazioni molto ridotte, ciò che suggerisce la probabilità che all'effetto da me constatato *in vitro* possa corrispondere, in vivo, una funzione del DHA come regolatore dell'attività fosfoglucomutasi. Parimenti degno di nota

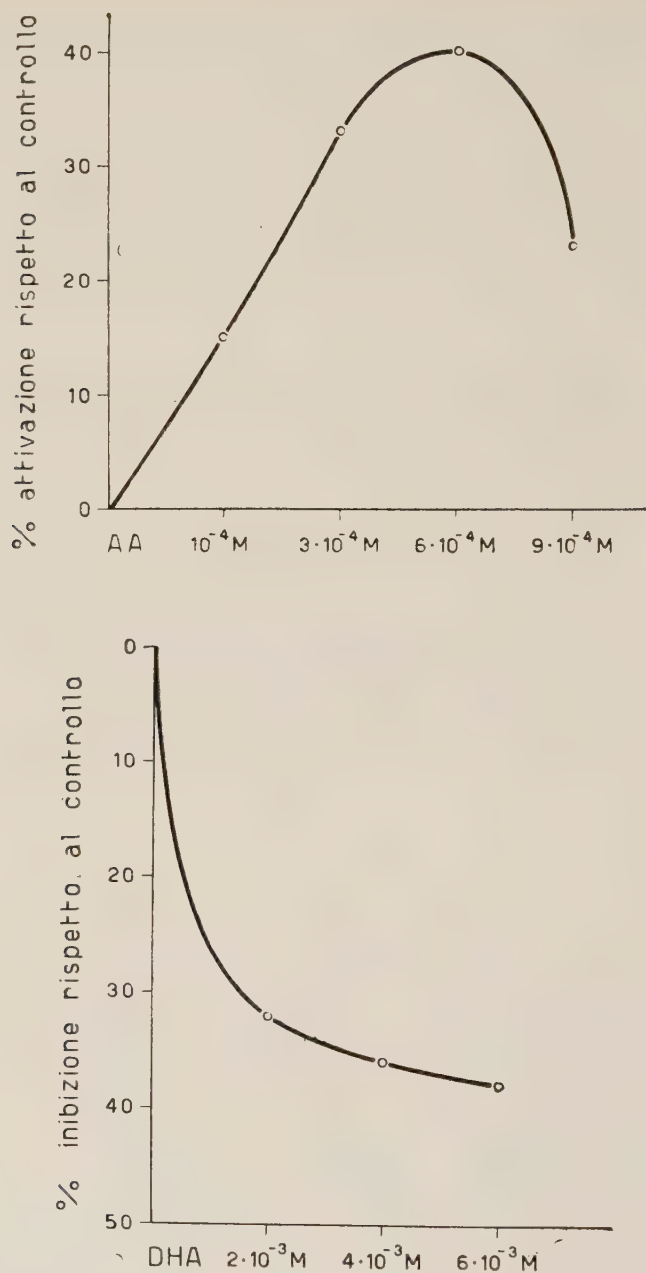


Fig. 1.

è il fatto che l'effetto inibente massimo del DHA viene raggiunto già ad una concentrazione intorno a  $6 \times 10^{-3}$  M e non aumenta per ulteriore aumento della concentrazione; ciò che permetterebbe di concludere che l'azione del DHA non si eserciti su gruppi di fondamentale importanza della molecola dell'enzima.

In una successiva esperienza, intesa a portare un chiarimento sull'azione inibente del DHA sulla mutasi, ho preso in considerazione l'idea che tale azione possa essere di tipo indiretto, vale a dire dovuta ad un'interazione del DHA con qualche composto diverso dall'enzima ed inizialmente presente nell'estratto grezzo. Per risolvere questa questione ho studiato l'azione del DHA su preparati di fosfoglucomutasi aventi diversa attività specifica, e ciò in base al concetto che, nel caso di un'azione indiretta, l'effetto inibitore avrebbe dovuto decrescere progressivamente col progredire del grado di purezza del preparato enzimatico. Ma i risultati di questa esperienza, riassunti nella Tabella IV, indicano come l'effetto del DHA non solo non diminuisca ma, al contrario, aumenti con l'aumentare del grado di purezza del preparato enzimatico: come, cioè, se l'allontanamento di impurità, proteiche o d'altra natura, lasciasse più libero il campo all'azione dell'inibitore. Siffatto rilievo appare dunque favorevole all'idea di un'azione diretta (o comunque non mediata da fattori dializzabili come, per esempio, il glutatone) del DHA sulla fosfoglucomutasi.

#### CONCLUSIONI.

1° Dai semi (cotiledoni) di pisello, e valendosi d'una assai semplice procedura, è possibile ottenere un preparato ad attività fosfoglucomutasi 15 volte superiore a quella dell'estratto grezzo (Tabella I).

2° L'enzima è attivato dalla cisteina ed inibito dallo zinco e dal versene. La sensibilità allo zinco è cinque volte superiore a quella dello stesso enzima preparato da tessuti animali.

3° L'AA attiva nettamente l'attività mutasica. Tale effetto non sembra riconducibile ad un'azione chelante del tipo di quella attribuita alla cisteina.

4° Il DHA inibisce chiaramente la fosfoglucomutasi. Non sembra che, in tale azione, sia interessato il sistema del glutatone.

5° Il DKG mostra soltanto un non significativo effetto inibente.

Il significato fisiologico di questi risultati appare essere di notevole interesse sotto due diversi punti di vista.

Anzitutto essi mettono ancora una volta in evidenza la capacità del sistema dell'ascorbico, nelle due sue forme ridotta ed ossidata, di intervenire in due opposte direzioni nella regolazione delle attività enzimatiche della cellula. A tale proposito, degno di particolare rilievo è il fatto che l'azione inibente del DHA sull'enzima qui studiato, la fosfoglucomutasi, sembra si espliciti – al di fuori di ogni ragionevole dubbio – indipendentemente dalla presenza di sistemi mediatori quali il glutatone.

In secondo luogo, l'aver rilevato che l'AA e il DHA sono capaci di influire in senso opposto (il primo attivando, il secondo inibendo) la fosfoglucomutasi, sembra offrire una chiave per la comprensione del ben noto effetto dell'auxina sul ricambio dell'amido [18, 19-20-21]. La fosfogluco-



mutasi, infatti, è uno degli enzimi che intervengono in maniera decisiva nel regolare il rapporto tra amido e glucidi solubili in quanto condiziona il passaggio dalla prima forma fosforilata del glucosio (Gl-6-P) a Gl-1-P che è l'immediato precursore dell'amido nella via della sintesi fosforilatica. Per suo conto, e come ho ricordato nell'introduzione, l'auxina esercita una ben significativa azione regolatrice sul rapporto AA/DHA.

Sembra quindi di dover concludere, dai dati presentati in questa Nota, che l'azione dell'auxina sul ricambio dell'amido rappresenta una conseguenza diretta della capacità, dall'auxina stessa posseduta, di influenzare il metabolismo dell'acido ascorbico.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] TONZIG S. e TREZZI F., «Nuovo Gior. Bot. It.», 57 515 (1950).
- [2] TONZIG S. e TREZZI F., «Nuovo Gior. Bot. It.», 57, 535 (1950).
- [3] TONZIG S. e TREZZI F., «Nuovo Gior. Bot. It.», 57, 549 (1950).
- [4] ARRIGONI O., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VII, 19, 156 (1955).
- [5] DRAKE B. B., SMYTHE C. V. and KING C. G., «J. Biol. Chem.», 143, 89 (1942).
- [6] TONZIG S., TREZZI F., MARRÈ E. e LAUDI G., «Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie Cl. Sc. Fis.», ser. VIII, 4, 109 (1955).
- [7] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 19, 460 (1955).
- [8] MARRÈ E., FORTI G. e PECE G., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 20, 646 (1956).
- [9] ARRIGONI O. e MARRÈ E., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 17, 390 (1954).
- [10] MARRÈ E. e ARRIGONI O., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 18, 539 (1955).
- [11] MARRÈ E. e ARRIGONI O., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 19, 320 (1955).
- [12] TREZZI F., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 21, 220 e 323 (1956).
- [13] NAJJAR V. A., «Jour. Biol. Chem.», 175, 281 (1948).
- [14] RAMASARMA T., SRI RAM J. and GIRI R. V., «Arch. of Bioch. and. Bioph.», 53, 167 (1954).
- [15] BRIGGS A. P., «Jour. Biol. Chem.», 56, 255 (1924).
- [16] NEUMANN S., «Jour. Biol. Chem.», 177 751 (1949).
- [17] KALCKAR H., «Jour. Biol. Chem.», 167, 461 (1947).
- [18] BAUSOR C., «Bot. Gaz.», 104, 1 (1942).
- [19] MITCHELL J. W. and WHITEHEAD M. R., «Bot. Gaz.», 102, 2 (1940).
- [20] MARRÈ E., «Boll. Soc. Biol. Sper.», 25, 1 (1949).
- [21] MARRÈ E. e PROFUMO P., «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, 11, 230 (1951).
- [22] SUTHERLAND E. W., «Jour. Biol. Chem.», 180, 1279 (1949).

**Fisiologia vegetale.** — *Reazioni metaboliche all'auxina.* — II. *Effetto di concentrazioni sopraottimali di auxina sui sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico, e sul metabolismo energetico in segmenti di internodio di pisello* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ, ORESTE ARRIGONI e GIORGIO FORTI, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

L'azione di stimolo dell'auxina sulla crescita di parti isolate di piante superiori si accompagna all'instaurazione di un quadro metabolico ben definito, caratterizzato da uno spostamento verso la forma ridotta dei rapporti tra glutatione ridotto e glutatione ossidato, e tra acido ascorbico ridotto e acido deidroascorbico [1-4], nonché da un rapido aumento del tenore in legami fosforici ad elevato contenuto energetico [4]. Il singolare parallelismo tra la comparsa di questo quadro e il manifestarsi dell'azione sull'accrescimento, il caratteristico effetto dell'acido ascorbico [5-6] e del glutatione [3] sulla crescita, la capacità delle auxine di influenzare, anche *in vitro*, l'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico [7, 8], l'azione dell'acido deidroascorbico, in preparati acellulari, sul metabolismo del glutatione [9-12] e sull'attività di diversi enzimi respiratori [13] e, in particolare, su quella di sistemi implicati nella sintesi dei legami fosforici ad alto contenuto energetico [14] ci hanno indotti alla convinzione che le reazioni metaboliche sopramenzionate siano tra loro strettamente interdipendenti, da un lato, e direttamente implicate nel determinare il manifestarsi della crescita, dall'altro [3-4].

I dati *in vivo* utilizzati per la costruzione di questa ipotesi sono stati finora tratti esclusivamente da esperienze in cui l'auxina era somministrata a concentrazione ottimale per quanto riguarda l'effetto di crescita. Il fatto ben noto che a concentrazioni più elevate questa azione dell'auxina non solo decresce, ma si trasforma, al limite, in un'azione inibente l'accrescimento, ci ha suggerito, come nuova linea d'attacco al problema, il rilevamento delle reazioni dei sistemi del glutatione, dell'acido ascorbico e del metabolismo energetico alla somministrazione di queste concentrazioni sopraottimali dell'ormone.

Le esperienze riferite in questa Nota permettono un primo confronto tra il comportamento del glutatione, dell'ascorbico e del tenore in legami fosforici ad alto livello energetico in funzione di concentrazioni di auxina rispettivamente stimolanti e inibenti. I risultati ottenuti sembrano portare un utile contributo ai fini della conoscenza sia dei rapporti reciproci delle singole reazioni metaboliche all'auxina, che del loro interessamento specifico nel fenomeno della crescita.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

## MATERIALI E METODI.

Per le procedure seguite nella preparazione del materiale (segmenti di 1 cm. tratti dalla parte apicale del terzo internodio di piantine eziolate di pisello - *Pisum sativum*, var. Alaska - coltivate per 7 giorni a 25°C) e nella determinazione del contenuto in glutatione (metodo amperometrico [15]), in acido ascorbico (metodo al 2,6-diclorofenolindofenolo) e in legami fosforici ad alto livello energetico (metodo di Crane e Lippmann, 16, modificato da Forti [17] rimandiamo a precedenti pubblicazioni [3,4]. Il contenuto in acido deidroascorbico è stato qui per la prima volta dosato seguendo una nuova procedura, che appare di, molto preferibile a quella usualmente adottata, per specificità come per sensibilità. Questa si basa sulla possibilità di seguire spettrofotometricamente, nell'ultravioletto, il forte aumento di densità ottica che accompagna la riduzione dell'acido deidroascorbico ad opera dell'omocisteina, e viene dettagliatamente descritta in altra sede [18].

Le abbreviazioni qui usate sono: AA, acido ascorbico; DHA, acido deidroascorbico; GSH e GS-SG, glutatione ridotto e ossidato;  $\sim P$  legami fosforici ad alto contenuto energetico.

## ESPERIENZE E RISULTATI.

L'azione dell'auxina, a concentrazioni che variano da  $10^{-5}$  a  $3 \times 10^{-3}$ , sulla crescita, sul tenore in glutatione ridotto e ossidato, in acido ascorbico e in acido deidroascorbico, e sul livello dei legami fosforici ad alto contenuto energetico è illustrata nella Tabella I. Come risulta dalla tabella, le variazioni a carico delle forme rispettivamente ridotta e ossidata del glutatione e dell'acido ascorbico avvengono senza che i valori delle somme GSH+GS-SG (glutatione totale) e AA+DHA (ascorbico totale) subiscano significativi spostamenti e sono quindi imputabili esclusivamente a corrispondenti variazioni dello stato di ossidoriduzione dei due sistemi: il che rende legittimo considerare l'azione dell'auxina sui medesimi come un'azione sui due rapporti GSH/GS-SG e AA/DHA, semplificando così alquanto l'analisi dei risultati (fig. 1).

L'esame delle singole curve della fig. 1 mostra come il progressivo aumento della concentrazione in IAA nel mezzo induca, sulle componenti del fenomeno qui considerate, i seguenti effetti:

a) *Crescita*. - L'azione di massimo stimolo corrisponde ad una concentrazione in IAA di  $10^{-5}$ , mentre concentrazioni maggiori inducono una stimolazione progressivamente minore che si trasforma alla fine, per la massima concentrazione usata ( $3 \times 10^{-3}$ ), in un lieve effetto inibente, con un comportamento che è in pieno accordo con i dati della letteratura [19].

b) *Tenore in legami fosforici ad alto contenuto energetico*. - La curva del tenore in  $\sim P$  segue fedelmente quella della crescita: una lieve divergenza (peraltro statisticamente non significativa) potendosi riscontrare solo per le concentrazioni in IAA  $10^{-3}$ , per la quale si osserva, accanto ad un ancor sensibile stimolo della crescita, un livello in  $\sim P$  praticamente uguale a quello dei controlli in acqua, e  $3 \times 10^{-3}$ , per cui la diminuzione del tenore in  $\sim P$  sembra nettamente più severa di quella osservabile per quanto riguarda la crescita.

TABELLA I.

*Azione di concentrazioni crescenti di IAA sui contenuti in legami fosforici ricchi di energia, in acido ascorbico, in acido deidroascorbico, in glutatione ridotto e in glutatione ossidato, e sulla crescita di segmenti del terzo internodio di piantine eziolate di pisello. Durata del trattamento: 1 vra, temperatura 25 C. Dati come medie di tre esperienze.*

	Concentrazione acido indolacetico				
	0	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-3</sup>	3·10 <sup>-3</sup>
Crescita come aumento percentuale in lunghezza rispetto alla lunghezza iniziale . . . . .	2	16	12	4	1
Contenuto in ~ P γ/gr. p. f. iniziale . .	23,2	26,9	24	21,6	20,2
AA γ/gr. p. f. iniziale . . . . .	403	429	415	391	381
DHA γ/gr. p. f. iniziale . . . . .	78	56	63	89	99
AA+DHA γ/gr. p. f. iniziale . . . . .	481	485	478	480	480
GSH μM/gr. p. f. iniziale . . . . .	1,74	2,15	—	2,37	2,45
GS·SG μM/gr. p. f. iniziale . . . . .	0,86	0,62	—	0,51	0,47
GSH+(GS·SG×2), μM/gr. p. f. iniziale	3,46	3,50	—	3,40	3,40

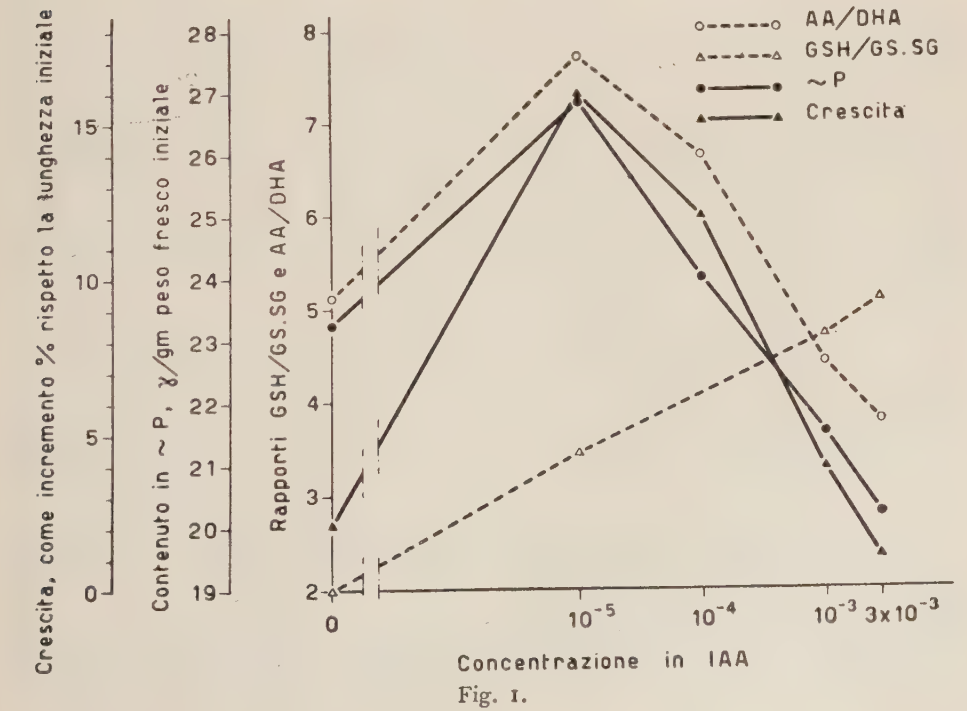


Fig. 1.



c) *Rapporto AA/DHA*. - Anche questa curva segue, nell'insieme, quella della crescita. Una divergenza significativa compare peraltro alle due concentrazioni più alte in auxina, che determinano una caduta del rapporto AA/DHA distintamente maggiore di quella osservata per la crescita. Il fatto è particolarmente evidente in presenza di IAA  $10^{-3}$ , che stimola ancora, seppure di poco, l'accrescimento, mentre abbassa di circa il 15% rispetto ai controlli in acqua, il rapporto tra acido ascorbico e acido deidroascorbico.

d) *Rapporto GSH/GS·SG*. - La curva di questo rapporto segue un andamento completamente diverso da quello della crescita, del tenore in  $\sim P$  e del rapporto AA/DHA. Non solo è del tutto assente, in questo caso, il massimo in corrispondenza della concentrazione di IAA  $10^{-5}$ , ma l'equilibrio tra GSH e GS·SG continua a spostarsi a favore della forma ridotta (anche se con ritmo progressivamente rallentato) per ogni aumento della concentrazione dell'auxina nel mezzo. Il contrasto tra il comportamento del sistema del glutatione e quello, pure ad esso così strettamente legato, del sistema dell'ascorbico è veramente singolare, e si esprime in tutta la sua evidenza nell'ambito di concentrazione in IAA tra  $10^{-5}$  e  $3 \times 10^{-3}$ , in cui il rapporto GSH/GS·SG sale da 3,4 a 6,2, mentre quello AA/DHA scende da 8 a 4.

#### DISCUSSIONE E CONCLUSIONI.

Riassumendo:

1° La stessa concentrazione di auxina che induce il massimo effetto di stimolo sulla crescita, induce pure il massimo effetto per quanto riguarda l'aumento del livello in legami fosforici ricchi in energia e del rapporto AA/DHA.

2° Concentrazioni sopraottimali in auxina, per le quali l'azione sulla crescita progressivamente declina fino a trasformarsi in lieve ma significativa inibizione, inducono effetti analoghi sul tenore in  $\sim P$  e sul valore del rapporto AA/DHA, che scendono entrambi fino a valori significativamente inferiori a quelli osservati in assenza di auxina. La caduta del rapporto AA/DHA per queste concentrazioni sopraottimali risulta peraltro alquanto più rapida di quella della crescita.

3° Il sistema del glutatione risponde al trattamento con concentrazioni crescenti di IAA con un continuo, progressivo spostamento dell'equilibrio tra GSH e GS·SG a favore della forma ridotta. La curva del rapporto GSH/GS·SG risulta quindi parallela a quelle della crescita, del tenore in  $\sim P$  e del rapporto AA/DHA solo per concentrazioni in IAA inferiori a quelle ottimali, mentre segue un comportamento del tutto opposto per quelle sopraottimali.

L'interesse di questi dati investe diversi aspetti non soltanto del problema del meccanismo d'azione dell'auxina, ma anche di quello, più generale, della regolazione del metabolismo cellulare.

In primo luogo vengono confermate, per una via del tutto nuova, le conclusioni precedentemente raggiunte circa l'importanza dello stato di ossi-

doriduzione del sistema ascorbico-deidroascorbico per la crescita, dimostrandosi qui, ancora una volta, come l'aumento di questo rapporto sia strettamente associato all'attivazione dell'accrescimento ad opera dell'auxina. Analogamente, viene confermato da queste ricerche quello stretto grado di correlazione tra stato di ossidoriduzione del sistema dell'acido ascorbico e metabolismo energetico, da noi precedentemente rilevato in base a risultati ottenuti « *in vivo* » come in *vitro*. Sembra del resto opportuno ricordare, a questo proposito, come dati di altri Autori [19] dimostrino, per l'azione di stimolo dell'auxina sull'attività ossidativa, un comportamento in funzione della concentrazione dell'ormone nel mezzo del tutto simile a quello da noi rilevato per il metabolismo energetico: cosicché crescita, variazioni a carico del sistema dell'ascorbico e reazioni del metabolismo ossidativo e energetico risulterebbero fenomeni strettamente correlati, per tutta l'estensione della curva d'azione dell'auxina in funzione della sua concentrazione.

Ma l'interesse maggiore di questi dati non va, a parer nostro, cercato tanto nel loro valore di conferma, anche se preziosa, di conclusioni precedentemente raggiunte, quanto nei nuovi angoli visuali che essi vengono ad aprire.

Uno dei risultati più inaspettati e di più difficile interpretazione della presente ricerca è dato, in questo senso, dalla singolare divergenza, che da essi emerge, tra il comportamento del glutatione e quello degli altri fattori sopra ricordati, nella reazione alle concentrazioni sopraottimali di auxina.

Il fatto che concentrazioni in auxina così elevate da apparire inibenti per quanto riguarda crescita e metabolismo ossidativo e energetico esplicino ancora un immutato effetto positivo nello spostare verso la forma ridotta l'equilibrio tra GSH e GS-SG sembra in primo luogo dimostrare come l'ormone investa, nella sua azione, sistemi nettamente distinti a diversa soglia di sensibilità, e come la sua azione possa contemporaneamente esprimersi come attivante, su alcuni di essi, e inibente, su altri. Interpretazione che ci sembra del resto più adatta a spiegare l'estrema varietà di effetti dell'auxina, in funzione della sua concentrazione, come pure della natura e dello stato fisiologico del tessuto su cui essa agisce, di quanto non lo sia, sotto questo aspetto, la classica teoria dell'« attaccamento su due punti » [20].

Per quanto riguarda il compito del glutatione nella regolazione della crescita, i dati qui riferiti completano e parzialmente rettificano alcuni concetti da noi precedentemente sostenuti. I risultati finora ottenuti erano tutti in accordo con l'ipotesi che l'effetto sul glutatione rappresentasse un passaggio obbligato nella catena di reazioni metaboliche per cui l'azione di stimolo dell'auxina si propaga dal suo punto primario d'azione fino alle sue manifestazioni ultime [1,3,6]. Il fatto, qui posto in luce, che per concentrazioni sopraottimali in ormone, l'effetto sul glutatione si dissocia dalla crescita, dimostra in modo definitivo come sia impossibile ricondurre tutta l'azione dell'auxina al suo effetto su questo pur così importante sistema. Il che, si badi, non toglie nulla, in vigore alla dimostrazione da noi precedentemente fornita della fondamentale importanza del glutatione nei fenomeni auxinici (difatto, in base a dati recentissimi, gli effetti rispettivamente stimolante e

inibente delle due forme ridotta e ossidata del glutatione sulla crescita risultano particolarmente imponenti proprio in presenza di concentrazioni sopraottimali di auxina [18]); ma semplicemente dimostra come l'azione dell'auxina e quella dell'acido deidroascorbico sulla crescita e sui metabolismi ossidativo e energetico non debbano intendersi come necessariamente ed esclusivamente mediate da variazioni del metabolismo del glutatione.

La divergenza, per concentrazioni sopraottimali in auxina, tra la curva del rapporto GSH/CG·GS e quella del rapporto AA/DHA porta, d'altra parte, a interessanti considerazioni circa il grado di associazione dei due sistemi. Un collegamento diretto tra i medesimi appare provato dalla costante presenza, nei tessuti vegetali, di enzimi catalizzanti il trasporto di idrogeno dal glutatione ridotto all'acido deidroascorbico [9-12] nonché dal fatto che l'aumento, sperimentalmente indotto, del tenore in DHA nei tessuti è immediatamente seguito da uno spostamento del rapporto GSH/GS·SG a favore della forma ossidata [3]. Ora, il dato dell'opposta reazione dei due sistemi alle concentrazioni sopraottimali in auxina viene, per contro, a illustrare una possibilità di notevole indipendenza tra lo stato di ossidoriduzione del glutatione e quello dell'ascorbico: il che suggerisce, come ipotesi più probabile, che il rifornimento di idrogeno al sistema a potenziale più positivo (quello AA/DHA) possa svolgersi, oltre che attraverso il glutatione, anche per una via che non implichi questo sistema. Ipotesi che appare del resto in pieno accordo con i recenti dati di Beevers [21] circa la presenza, nelle piante superiori, di un enzima capace di trasferire elettroni direttamente dai piridin-nucleotidi ridotti a un composto di ossidazione dell'acido ascorbico; e con altri nostri [21] che dimostrano come lo stesso enzima si presenti, con elevata attività, proprio nel materiale qui preso in esame.

Concludendo, i risultati della presente ricerca confermano le conclusioni precedentemente raggiunte circa la stretta correlazione e interdipendenza tra le reazioni all'auxina del sistema dell'acido ascorbico, del metabolismo ossidativo e energetico e della crescita. Essi dimostrano, d'altra parte come i due sistemi del glutatione e dell'ascorbico, pur essendo entrambi soggetti all'azione dell'auxina, e capaci a loro volta di influenzare profondamente la crescita, possano d'altra parte rivelare, in condizioni particolari, un notevole grado di indipendenza reciproca in queste loro reazioni ed azioni. Gli stessi risultati suggeriscono, inoltre, la probabilità della coesistenza, nella cellula vegetale, di due distinte linee ossidoriduttive, delle quali una soltanto comprende il glutatione, capaci di trasferire elettroni dai substrati respiratori al sistema dell'acido ascorbico.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 638 (1956).
- [2] F. TREZZI, *Ibid.*, in corso di stampa.
- [3] E. MARRÈ and O. ARRIGONI, « Phys. Plantarum », 10 (1957).
- [4] E. MARRÈ, G. FORTI e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, (1956).
- [5] S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s., 57, 535 (1950).



- [6] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 77 (1956).
- [7] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, *Ibid.*, 18 539 (1955).
- [8] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, *Ibid.*, 19, 320 (1955).
- [9] M. YAMAGUCHI and M. A. JOSLIN, « Plant. Phys. », 26, 757 (1951).
- [10] L.W. MAPSON and D. R. GODDARD, « Bioch. Jour. », 49, 592 (1951).
- [11] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 649 (1954).
- [12] E. MARRÈ e G. LAUDI, *Ibid.*, 20, 206 (1956).
- [13] E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, *Ibid.*, 19, 460 (1955).
- [14] E. MARRÈ, G. FORTI e G. PECE, *Ibid.*, 20, 646 (1956).
- [15] W. STRICKS and I. M. KOLTHOFF, « Anal. Chem. », 25, 1050 (1953).
- [16] R. CRANE and F. LIPMANN, « Jour. Biol. Chem. », 201, 235 (1953).
- [17] G. FORTI, « Giorn. Bioch. », 6 (1957).
- [18] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, in corso di stampa.
- [19] R. C. FRENCH and H. BEEVERS, « Am. Jour. Bot. », 49, 660 (1953).
- [20] R. J. FOSTER, D. H. McRAE and J. BONNER, « Proc. Nat. Acad. Sci. », 38, 1012 (1952).
- [21] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, dati non pubblicati.
- [22] H. BEEVERS, « Plant. Phys. », 29, 265 (1954).

**Fisiologia vegetale.** — *Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termo-resistenti.* — II. *Sulla termoresistenza « in vitro » del sistema citocromo riduttasico di Cianofcee termali* (\*). Nota di ERASMO MARRÈ e ORIETTA SERVETTAZ, presentata (\*\*) dal Socio S. TONZIG.

I risultati di una precedente ricerca sui limiti di resistenza all'inattivazione termica dei sistemi fotosintetico e respiratorio di alghe ambientate a temperature varianti tra 20° e 60° C. suggerivano che il fattore principale della termoresistenza dovesse consistere in una particolare stabilità delle strutture macromolecolari [1].

Un'ulteriore precisazione del fenomeno presupponeva il passaggio dal piano delle esperienze su organismi vivi a quello su sistemi acellulari: tali da permettere, attraverso l'isolamento dei fattori in gioco, una prima discriminazione tra le diverse possibili vie per cui questi singolari organismi possono conseguire un così elevato grado di stabilizzazione strutturale.

Nelle esperienze qui riferite abbiamo studiato comparativamente il comportamento e le caratteristiche, per quanto riguarda la termoresistenza come per altri fattori, di una proteina enzimatica, la trifosfopiridinucleotide-citocromo C riduttasi, estratta da due diverse specie di Cianofcee, ambientate l'una (*Anabaena cylindrica*) a temperatura normale, e l'altra (*Aphanocapsa thermalis*) a temperatura di 55°C.

I risultati ottenuti confermano ed estendono quelli della ricerca precedente dimostrando (nei limiti in cui essi sono generalizzabili) come la ter-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.



termoresistenza effettivamente corrisponda ad una maggior stabilità strutturale dei singoli sistemi proteici isolatamente considerati, indipendentemente dalla loro organizzazione e coordinamento nella cellula viva, e come la termostabilità delle proteine delle forme in esame derivi da caratteristiche intrinseche di queste macromolecole, e non dalla presenza nel plasma di sostanze ad azione stabilizzatrice generica.

#### MATERIALI E METODI.

a) *Materiali*. - Quale rappresentante delle Cianoficee ambientate a temperature normali abbiamo scelto (come sopra s'è detto) *Anabaena cylindrica* Lemm. coltivata in cultura pura; mentre come specie termoresistente abbiamo utilizzato un ceppo di *Aphanocapsa thermalis* Brügg. originariamente prelevata dalle acque termali di Abano (Padova) e da oltre due anni coltivata in questo laboratorio, in apposite vasche aeree e termoregolate a 55°C.

b) *Preparazione dell'enzima solubile*. - Mentre l'estrazione di sistemi enzimatici attivi dalle Cianoficee ambientate a temperatura normale non presenta ostacoli di particolare rilievo, notevoli difficoltà abbiamo incontrato nello stabilire una procedura adatta all'estrazione di enzimi solubili dalle forme termali. Dopo alcuni insuccessi la procedura risultata più soddisfacente, e quindi adottata per entrambi i tipi di alghe, è apparsa la seguente: le alghe venivano separate mediante centrifugazione dalla soluzione nutritizia; il materiale centrifugato, lavato con acqua distillata, era sottoposto a congelamento a -30°C., scongelamento a temperatura ambiente, e triturazione in mortaio con sabbia di quarzo in presenza di tampone al triidrossimetilaminometano (Tris) 0,1 M, pH 8, contenente un largo eccesso (fino al 20 %) di alcool butilico normale. La sospensione ottenuta veniva centrifugata a 6000 × g per 30 minuti primi. il residuo insolubile scartato e il soprannatante, raffreddato a 0°C, trattato con 4 volumi di acetone prerrefrigerato a -30°C, aggiunto molto lentamente. Il precipitato proteico veniva separato su filtro di Buchner, lavato con acetone puro a -30°C, seccato sotto vuoto e immagazzinato a -30°C. Tutte le operazioni successive allo scongelamento venivano eseguite in camera fredda, a temperatura fra 1° e 2°C.

I preparati enzimatici solubili venivano ottenuti dalla polvere acetonica estraendo aliquote della medesima con Tris 0,1 M, pH 7,5 (20 cc. di Tris per 1 grammo di polvere acetonica; estrazione mediante agitazione meccanica per 10 minuti), e allontanando il residuo insolubile mediante centrifugazione a 10000 × g per 20 minuti primi.

c) *Determinazione dell'attività enzimatica*. - Le attività di aliquote dei preparati solubili (ottenuti come detto sopra e convenientemente diluiti) nell'ossidare i coenzimi ridotti e nel ridurre il citocromo C, sono state determinate seguendo allo spettrofotometro di Beckmann (mod. D.U.) i cambiamenti nel tempo della densità ottica a lunghezze d'onda caratteristiche per i diversi fattori (340 mμ per i coenzimi piridinici [2], 550 mμ per il cit. C [3]).

d) *Reagenti*. - Come reagenti abbiamo usato: Glucosio-6-P (Gl-6-P), trifosfopiridinucleotide ridotto (TPNH), difosfopiridinucleotide ridotto (DPNH), tampone al Tris e citocromo C «Sigma»; glutatione ossidato (GS-SG) «Schwarz»; versene (EDTA, etilendiamino-tetraacetato di Na) «BDH»; come sorgente di Gl-6-P deidrogenasi abbiamo usato un estratto di polvere acetonica di tubero di patata, preparato che si è dimostrato contenere una notevole attività Gl-6-P deidrogenasica.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

a) *Dimostrazione della presenza di alcuni enzimi ossidativi negli estratti di Cianoficee termali*. - Data la notevole scarsità di dati circa i sistemi enzimatici di questi organismi, ci è parso in primo luogo interessante dimostrare la presenza, negli estratti da polvere acetonica di questo materiale, di alcuni

sistemi largamente diffusi nei tessuti clorofilliani di piante superiori, e in particolare delle TPNH e DPNH ossidasi [4], della TPNH-glutatione riduttasi [5] e della TPNH-cit. C riduttasi [6] [7].

I dati della fig. 1 illustrano la presenza nei preparati da *Aphanocapsa* di enzimi capaci di ossidare sia DPNH che TPNH, in assenza di accettori diversi dall'ossigeno atmosferico. Che la reazione sia ossidativa, e cioè dovuta alla reazione  $TPNH + 1/2 O_2 \rightarrow TPN^+ + H_2O$  e non all'azione di TPNasi del tipo di quella descritta da Vennesland [8] risulta dal fatto che l'aggiunta di un sistema attivamente capace di ridurre il TPN ossidato a TPNH (e cioè glucosio-6-P e glucosio-6-P deidrogenasi), effettuata quando la caduta della d. o. a 340-m $\mu$  dimostra che buona parte del TPNH è scomparso, ripristina quasi totalmente la densità ottica iniziale; il che non avverrebbe nel caso di demolizione nucleotidasica del coenzima piridinico.

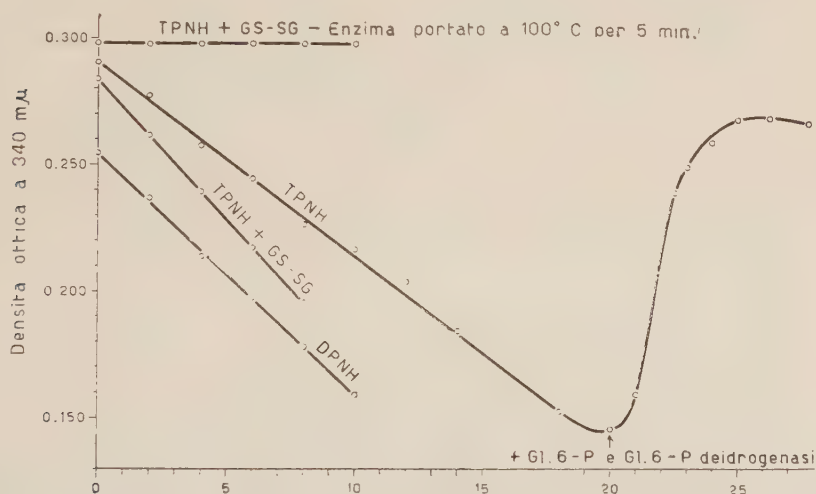


Fig. 1. — Attività TPNH e DPNH ossidasica e TPNH-glutatione riduttasica in estratti di *Aphanocapsa*. In ascissa il tempo di incubazione, in minuti primi. Al ventesimo minuto sono stati aggiunti 2 mg. di glucosio-6-fosfato di potassio (Gl-6-P) e 0,05 cc. di un attivo preparato di Gl-6-P deidrogenasi. Conc. finale dei reagenti: TPNH o DPNH 200  $\gamma$ , GS-SG 500  $\gamma$ , Tris 0,1 M. Enzima: 0,1 cc. Volume finale 3 cc. Temperatura 20°C.

L'attività, nello stesso estratto, di una TPNH-Glutatione riduttasi, attività significativa anche se non molto intensa, è dimostrata dall'acceleramento indotto sulla caduta della densità ottica a 340 m $\mu$ , e quindi sull'ossidazione del TPNH, dall'aggiunta di glutatione ossidato.

Infine, la presenza di TPNH-citocromo C riduttasi risulta dal rapido aumento della densità ottica a 550 m $\mu$  in presenza di TPNH e Citocromo ossidato, aumento che corrisponde al passaggio del citocromo C alla forma ridotta (Tabella II). L'azione attivante del FMN su questa reazione ricorda quella analoga osservata per l'enzima delle piante superiori [9] e dei cloroplasti [10].

Ci sembra opportuno rilevare, a questo proposito, la possibilità che anche in queste Cianoficee, come sembra assodato per l'enzima da cloroplasti di spinacio e da foglie di pisello, un unico enzima sia responsabile per le due attività TPNH ossidasi e TPNH-cit. C riduttasi: il che, se dimostrato, stabilirebbe una singolare omogeneità di comportamento nell'ambito di organismi da un punto di vista sistematico così lontani tra loro.

TABELLA I.

*Assenza negli estratti di alghe termali («Aphanocapsa», 55° C) di sostanze capaci di proteggere la citocromo C riduttasi di un'alga ambientata a temperatura normale («Anabaena», 20° C).*

Composizione dell'incubato: estratto cc. 0,4, Tris 0,1 M, pH 7,3 cc. 2,6, citocromo C mg. 1 TPNH 200  $\gamma$ . Temperatura, 20° C.

	$\mu\text{M} \times 10^{-2}$ Citocromo C ridotto per minuto primo	
	estratto non trattato	estratto trattato 1 minuto primo a 92° C.
<i>Anabaena</i> . . . . .	0,59	0,03
<i>Aphanocapsa</i> . . . . .	0,19	0,10
<i>Anabaena</i> + <i>Aphanocapsa</i> . .	0,78	0,09

b) *Resistenza all'inattivazione termica.* - La TPNH-cit. C riduttasi, l'enzima più interessante tra quelli sopra rilevati, è stata presa come *test* della resistenza dei nostri preparati solubili all'inattivazione termica.

La profonda differenza di comportamento dell'enzima da alghe termali rispetto a quello dalla specie ambientata in condizioni normali risulta chiaro dalla fig. 2. L'attività cit. C riduttasi di *Aphanocapsa* resiste pressoché intatta a trattamento per un minuto primo a 85° C, quando l'attività dell'estratto di *Anabaena* è ormai caduta di circa il 55%. La denaturazione termica totale si ottiene, per l'enzima di *Aphanocapsa*, solo per trattamento per 5 minuti primi a 100°, mentre 92° C per un minuto distruggono totalmente l'enzima di *Anabaena*.

c) *Assenza nel preparato da alghe termoresistenti di sostanze protettive ad azione generica.* - Una volta stabilito il diverso grado di termo-stabilità dei nostri preparati, abbiamo preso in considerazione la probabilità che nei preparati stessi fossero contenute sostanze, distinte dalle macromolecole enzimatiche, ma capaci di influenzarne la resistenza di fronte all'inattivazione termica (probabilità per altro ridotta al minimo dalla stessa procedura

di estrazione da noi seguita, che implica la rimozione della maggior parte dei composti idrosolubili a basso peso molecolare, come pure dei composti liposolubili). È noto infatti come la stabilità di proteine, enzimatiche o meno, *in vitro* possa essere di molto aumentata dalla presenza di sostanze della più varia natura, come la sieroalbumina per l'ascorbico ossidasi [11], il DPN per la 3-P-glicerolaldeide deidrogenasi [12]; il glucosio per l'esochinasi [13], acidi grassi per la sieroalbumina umana [14] ecc. La maggior resistenza della cit. C. riduttasi di *Aphanocapsa* all'inattivazione termica avrebbe quindi potuto dipendere dalla presenza, nel preparato, di sostanze stabilizzatrici assenti nel preparato di *Anabaena*. Che questa possibilità sia da escludere risulta chiaro dai dati della tabella I. Essi dimostrano infatti che quando

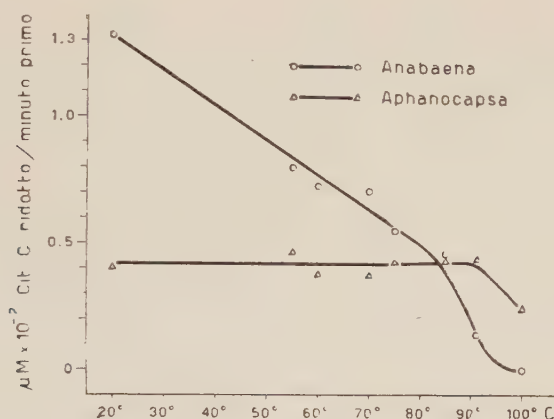


Fig. 2. - Effetto del pretrattamento per 1 minuto pr. a temperature diverse (ascissa) sull'attività citocromo riduttasica dell'alga termale (*Aphanocapsa*) e di quella dell'alga ambientata a temperatura normale (*Anabaena*). Condizioni sperimentali come alla Tabella I.

l'enzima di *Anabaena* viene sottoposto al trattamento termico dopo aggiunta di una corrispondente aliquota del preparato da *Aphanocapsa*, la caduta di attività risultante dal trattamento non è per nulla inferiore a quella osservabile per l'enzima trattato da solo. Il preparato di *Aphanocapsa* non contiene quindi sostanze ad azione aspecificamente protettiva, o, se ne contiene, esse sono da intendere come strettamente legate e associate all'enzima della forma termoresistente formando con questo un aggregato molecolare unico, e comunque non suscettibile di influenzare l'enzima della forma ambientata a temperatura normale.

d) *Inattivazione termica e potere attivante del FMN.* 3 Come sopra rilevato (tabella II) l'attività Cit. C. riduttasica dei nostri preparati è significativamente aumentata dall'aggiunta di FMN, il che costituisce un buon argomento a favore della natura flavoproteica di questa cit. C. riduttasi,



in pieno accordo con quanto noto per le altre citocromo riduttasi descritte nella letteratura (15). Poiché un meccanismo probabile dell'inattivazione termica potrebbe consistere nel distacco, sotto l'azione del calore, di un gruppo prostetico di natura flavinica, sostituibile almeno parzialmente dall'aggiunta di FMN all'estratto, abbiamo ritenuto interessante studiare come variasse il potere attivante del FMN in estratti ottenuti dalle due forme, sia non trattati, sia sottoposti a trattamento termico a temperature tali da indurre una inattivazione parziale proporzionalmente uguale per i due tipi di estratti (un minuto primo a 85° C per *Anabaena*, e a 93° C per *Aphanocapsa*).

TABELLA II.

*Diverso effetto del trattamento termico sulla capacità di attivazione da FMN dell'attività citocromo C riduttasica in Cianoficce ambientate in condizioni normali (20° « Anabaena ») e in acque termali (55° « Aphanocapsa »).*

Composizione dell'incubato come in Tabella I.

	Pretrattamento	FMN	$\mu\text{M} \times 10^{-2}$ Citocromo C ridotto in un minuto primo	Inibizione da trattamento termico	Attivazione da FMN
<i>Anabaena</i>	—	—	0,24	—	—
»	—	$10^{-4}$ M	0,83	—	246 %
»	1 minuto a 85°C	—	0,16	33 %	—
»	1 minuto a 85°C	$10^{-4}$ M	0,21	75 %	31 %
<i>Aphanocapsa</i>	—	—	0,17	—	—
»	—	$10^{-4}$ M	0,32	—	88 %
»	1 minuto a 92°C	—	0,11	35 %	—
»	1 minuto a 92°C	$10^{-4}$ M	0,19	40 %	72 %

I risultati di queste esperienze riassunti nella tabella II appaiono di notevole interesse. In primo luogo l'attivazione da FMN in estratti non trattati risulta di gran lunga maggiore per l'enzima di *Anabaena* (246 %) che per quello dell'alga termoresistente (88 %), comportamento che pur non escludendo altre interpretazioni, potrebbe riferirsi ad una maggiore stabilità del legame gruppo prostetico flavinico-apoenzima nella forma termoresistente, e quindi ad una minor esigenza di rimpiazzamento con flavinnucleotidi sintetici.

Un aspetto anche più interessante è fornito dal comportamento dei preparati trattati termicamente, in cui l'attività in assenza di FMN è caduta di circa  $2/3$  dell'iniziale. Si osserva come, mentre per l'enzima termoresistente la capacità attivante del FMN rimane pressoché invariata (caduta dall'88 al 72 %) per contro essa viene praticamente soppressa per la riduzione della forma termolabile (caduta dell'azione attivante dal 246 al 31 %). La più semplice e probabile interpretazione di tale comportamento sembra quella che indica, in quella parte della molecola proteica dell'enzima della forma termolabile che è implicata nell'associazione con il FMN, un punto di particolare labilità; labilità per contro assente, o superata in forza di condizioni strutturali sconosciute, nell'enzima della forma termoresistente.

#### RIASSUNTO E CONCLUSIONI.

I risultati di queste esperienze possono essere così riassunti:

I. — È possibile isolare da *Cianoficee* termali, sottoposte a trattamento con butanolo e successiva preparazione di polvere acetonica e estrazione in tampone, preparati enzimatici solubili che dimostrano le seguenti attività enzimatiche: DPNH e TPNH ossidasi, TPNH-glutatione riduttasi e TPNH-citocromo C riduttasi.

II. — In questi preparati solubili la resistenza all'inattivazione termica della citocromo C riduttasi isolata da *Cianoficee* termoresistenti (*Aphanocapsa termalis*) è di gran lunga maggiore che per il corrispondente enzima estratto da una forma termolabile (*Anabaena cylindrica*).

III. — La termoresistenza dell'enzima isolato da alghe termali non può attribuirsi a sostanze ad azione genericamente protettiva, presenti nel preparato enzimatico; e appare quindi riconducibile a caratteristiche particolari della struttura molecolare dell'enzima stesso.

IV. — L'attività citocromo riduttasica dei preparati della *Cianoficea* termoresistente si differenzia da quella della *Cianoficea* termolabile per una molto minore attivabilità da FMN, forse interpretabile nel senso di una maggior stabilità del legame tra gruppo prostetico flavinico e apoenzima.

D'altra parte trattamenti termici tali da ridurre di circa un terzo l'attività dei due enzimi (dosati in assenza di FMN), mentre aboliscono quasi totalmente la suscettibilità di attivazione dell'enzima della forma termolabile da parte del FMN, non influenzano sensibilmente quella dell'enzima della forma termale. Questo comportamento è interpretato come indicativo di una particolare stabilità, in quest'ultimo, del gruppo implicato nell'associazione con il FMN.

Complessivamente considerati i risultati di questa ricerca, nel limite in cui essi sono generalizzabili, indicano in una particolare configurazione strutturale delle singole macromolecole proteiche la causa prima della capacità delle forme termoresistenti di sopravvivere a temperature eccezionalmente elevate.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. 20, 72 (1956).
- [2] B. L. HORECKER and A. KORNBERG, « J. Biol. Chem. », 175, 385 (1948).
- [3] B. L. HORECKER and L. A. HEPPEL, « J. Biol. Chem. », 178, 683 (1949).
- [4] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Memorie Acc. Naz. Lincei » 5, 207 (1956).
- [5] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 18, 402 (1955).
- [6] H. J. EVANS, « Plant Phys. », 30, 437 (1955).
- [7] O. SERVETTAZ, « Giorn. di Bioch. ».
- [8] E. E. CONN, B. VENNESLAND and L. M. KRAIMER, « Arch. Bioch. », 23, 179 (1949).
- [9] E. MARRÈ, O. SERVETTAZ e G. ROSSI, « Giorn. di Bioch. ».
- [10] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, in corso di stampa.
- [11] W. H. POWERS, S. LEWIS and C. R. DAWSON, « J. Gen. Phys. », 27, 167 (1944).
- [12] J. F. TAYLOR, S. F. VELICK, G. T. CORI, C. F. CORI and M. W. SLEIN, « J. Biol. Chem. », 173, 619 (1948).
- [13] L. BERGER, M. W. SLEIN, S. P. COLOWICK and C. F. CORI, « J. Gen. Phys. », 29, 347 (1946).
- [14] F. E. KENDALL, « J. Biol. Chem. », 138, 97 (1941).
- [15] H. R. MAHLER, « Advances in Enzymology », vol. 17, 233 (1956).

**Fisiologia.** — *Modificazioni dell'attività di singole unità nel nucleo del tetto per stimolazioni della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva* <sup>(\*)</sup>. Nota di ARNALDO ARDUINI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Recenti ricerche [Moruzzi e Pompeiano <sup>(1)</sup>, Batini e Pompeiano <sup>(2)</sup>] hanno localizzato nelle porzioni rostro-mediale e rostro-laterale del nucleo del tetto le sedi di influenze opposte, rispettivamente facilitanti ed inibenti, esercitate sui meccanismi posturali antigravitari. Abbiamo ritenuto opportuno indagare il comportamento di singole unità di queste due limitate zone del nucleo del tetto, sotto l'influenza di stimolazioni della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva.

Gli esperimenti sono stati condotti su Gatti decerebrati con sezione mesencefalica pre- o intercolliculare. Sono stati utilizzati microelettrodi rigidi di acciaio, isolati ovunque salvo alla punta, il cui diametro era di 10-30  $\mu$ ; essi venivano introdotti e orientati mediante micromanipolatore adattato sull'apparecchio di Horsley-Clarke. L'elettrodo indifferente era posto nella fossa cranica anteriore e ricoperto con cotone imbevuto di Ringer. La punta del microelettrodo veniva localizzata mediante microelettrolisi (100  $\mu$ A per 10 sec.). La registrazione era fatta con un oscillografo a raggi catodici. Gli

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXX, 493 (1954).

(2) C. BATINI and O. POMPEIANO, « Proc. XX int. physiol. Congress, Bruxelles » (1956), in corso di stampa.

stimoli utilizzati per influenzare l'attività del nucleo del tetto erano: *a*) corrente continua a lento incremento (polarizzazione), applicata sulla corteccia del *lobus anterior* (emiverme nel tratto corrispondente al *culmen*: lobuli IV e V di Larsell), attraverso un sistema bipolare di elettrodi impolarizzabili disposti sagittalmente e distanti tra loro da 2 a 4 mm; *b*) polarizzazione monopolare catodica dei labirinti (elettrodo indifferente, anodo, nella fossa cranica anteriore); *c*) singoli impulsi rettangolari di 1 msec, applicati alle branche cutanee e muscolari dei nervi radiali; *d*) brusche stimolazioni degli arti posteriori e del muso.

1° Le unità del terzo rostrale del nucleo del tetto presentavano una attività spontanea, anche nell'animale curarizzato<sup>(3)</sup>; la loro frequenza di scarica oscillava, in genere, da 10 a 30 per secondo.

2° La scarica di alcune unità fastigiali veniva accelerata, quella di altre rallentata e anche bloccata dalla polarizzazione liminale (0,1–0,7 mA) dell'emiverme del *culmen* ipsilaterale. Gli effetti inibitori erano spesso seguiti da un aumento di rimbalzo della scarica; questo fenomeno si osservava anche dopo curarizzazione profonda. I fenomeni da noi riscontrati erano certamente dovuti all'attivazione di neuroni della corteccia vermiana perché: 1) l'applicazione locale di cocaina al 5% sulla superficie del verme innalza di 5–7 volte la soglia degli effetti vermiani, inibitori ovvero eccitatori; 2) la stimolazione con gli stessi parametri, od anche con parametri superiori, della corteccia della *pars intermedia* del *lobus anterior* non aveva influenza sulla scarica fastigiale; 3) era spesso possibile trovare una lamella della corteccia vermiana la cui soglia era minore rispetto a tutte le altre.

3° La polarizzazione catodica del labirinto ipsilaterale ed anche di quello contralaterale produceva quasi sempre aumento della frequenza di scarica; un'inibizione venne ottenuta solo in pochi casi, in seguito a stimolazione del labirinto contralaterale. La risposta si rovesciava quando s'invertiva la polarità dello stimolo.

4° La scarica delle unità del nucleo del tetto di cui a 1°, 2° e 3°, era sempre aumentata dalla stimolazione, effettuata con singoli impulsi elettrici, del moncone centrale del nervo radiale ipsi- e contralaterale. Se contemporaneamente si registravano le risposte elettriche della corteccia del *culmen*, si osservava che l'aumento della scarica dei neuroni fastigiali compariva con un ritardo variabile tra 12 e 20 msec rispetto all'inizio dell'onda corticale. Nella grande maggioranza dei casi le unità fastigiali erano influenzate, pressoché nello stesso modo, da stimoli naturali applicati agli arti posteriori ed al muso. Gli effetti prodotti dalle stimolazioni sensitive erano presenti, immutati, anche dopo asportazione cronica (2–4 giorni) del *culmen* e delle lamelle posteriori del *lobulus centralis*; l'esame istologico per altro accertò che l'ablazione del *culmen* risparmiava in genere la parte più profonda delle lamelle. Sulla corteccia del *lobulus centralis* era possibile registrare risposte alla stimolazione del nervo radiale.

(3) Ringraziamo la Farmitalia che ci ha gentilmente donato la Sincurarina.



5° Il metodo delle microelettrolisi [Mollica, Rossi e Venturelli <sup>(4)</sup>] permetteva di localizzare con accuratezza la posizione delle cellule da cui veniva registrata la scarica. Tutte le unità del nucleo del tetto che venivano influenzate dalla stimolazione del *culmen*, erano localizzate nel terzo rostrale del nucleo dello stesso lato, mentre le unità dei due terzi caudali non venivano influenzate anche per alte intensità di stimolazione. Ciò è in accordo coi risultati dell'indagine anatomica [Jansen e Brodal <sup>(5)</sup>]. I neuroni fastigiali situati nella parte rostro-mediale erano in prevalenza inibiti dalla polarizzazione vermiana, mentre i neuroni della parte rostro-laterale erano in prevalenza facilitati. In entrambe le zone tuttavia erano presenti neuroni che si comportavano in modo reciproco rispetto alla polarizzazione del cervelletto, come pure un certo numero di unità che non era affatto influenzato dalla stimolazione vermiana. Di queste ultime solo il 50% circa veniva modificato dalla stimolazione labirintica.

In base ai dati ottenuti con lesioni localizzate [Moruzzi e Pompeiano <sup>(1)</sup>, Batini e Pompeiano <sup>(2)</sup>] è possibile assegnare ai neuroni della parte rostro-mediale, che vengono inibiti dalla polarizzazione vermiana, e a quelli della parte rostro-laterale, che vengono facilitati, una posizione rispettivamente nel sistema facilitatore e nel sistema inibitore cortico-fastigio-bulbare. Non è tuttavia altrettanto agevole spiegare il comportamento dei neuroni rostro-mediali e rostro-laterali, che rispondono in modo opposto alle stesse stimolazioni vermiane; e tanto meno il giustificare la presenza di unità fastigiali, dotate di attività spontanea, ma non influenzate da stimolazione della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva.

**Fisiologia.** — *Analisi degli effetti della stimolazione elettrica del nucleo rosso nel Gatto decerebrato* <sup>(\*)</sup>. Nota di OTTAVIO POMPEIANO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Negli esperimenti di stimolazione elettrica del mesencefalo finora eseguiti venivano utilizzate principalmente tre tecniche: *a*) stimolazione della regione mesencefalica mediante applicazione diretta degli elettrodi sulla superficie di sezione del tronco dell'encefalo in animali decerebrati [Thiele <sup>(1)</sup>, Weed <sup>(2)</sup>, Környey <sup>(3)</sup>, Hinsey, Ranson e Dixon <sup>(4)</sup>, Graham Brown <sup>(5,6)</sup>];

(4) A. MOLLIKA, G. F. ROSSI e E. VENTURELLI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXX, 272 (1954).

(5) J. JANSEN a. A. BRODAL, « J. comp. Neurol. », LXXIII, 267 (1940).

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) F. H. THIELE, « J. Physiol. », XXXII, 358 (1905).

(2) L. H. WEED, « J. Physiol. », XLVIII, 205 (1914).

(3) S. KÖRNYEY, « Arb. neurol. Inst. Univ. Wien », XXX, 120 (1927).

(4) J. C. HINSEY, S. W. RANSON a. H. H. DIXON, « Arch. Neurol. Psychiat., Chicago », XXIV, 966 (1930).

(5) T. GRAHAM BROWN, « Proc. roy. Soc. », London (B), LXXXVII, 145 (1913).

(6) T. GRAHAM BROWN, « J. Physiol. », XLIX, 180, 185 e 195 (1915).

b) stimolazione del mesencefalo in animali a cervello integro e narcotizzati, mediante elettrodi guidati con l'apparecchio stereotassico [Ingram, Ranson, Hannett, Zeiss e Terwilliger <sup>(7)</sup>, Ingram, Ranson e Hannett <sup>(8)</sup>, Monnier <sup>(9,10,11)</sup>]; c) stimolazione delle stesse strutture in animali normali, non narcotizzati e in completa libertà [Mussen <sup>(12)</sup>, Hess <sup>(13)</sup>, Bartorelli <sup>(14,15)</sup>, Bürgi <sup>(16)</sup>, Hess, Bürgi e Bucher <sup>(17)</sup>, Monnier <sup>(9,10,11)</sup>]. Si rimanda a Ingram, Ranson, Hannett, Zeiss e Terwilliger <sup>(7)</sup>, Bartorelli <sup>(14)</sup> e Monnier <sup>(11)</sup> per quanto concerne la letteratura.

Le nostre ricerche vennero eseguite complessivamente su 40 Gatti decerebrati, in narcosi eterica, a un livello precolliculare. Le buone condizioni del preparato erano documentate dalla presenza di una miosi bilaterale fissurata. Gli animali venivano quindi fissati all'apparecchio di Horsley-Clarke. La stimolazione dell'interno del mesencefalo era eseguita 1-2 h dopo la fine della narcosi, con elettrodi unipolari o bipolari concentrici. Venivano utilizzati impulsi rettangolari di frequenza, durata e voltaggio variabili. La localizzazione anatomica dei punti stimolati era controllata istologicamente su sezioni seriate colorate coi metodi di Weil e Nissl.

1) La stimolazione stereotassica della metà caudale del nucleo rosso di un lato con impulsi rettangolari a 300/sec, 1 msec, di 0,15 - 0,25 V (voltaggi liminali) produce costantemente, negli arti contralaterali, inibizione dell'ipertono estensore, accompagnata da flessione attiva. Queste risposte flessorie crociate si accompagnano ad aumento del tono estensore negli arti ipsilaterali. Quest'ultimo effetto si osserva però per stimoli leggermente superiori a quelli liminali (0,25-0,30 V). Queste modificazioni del quadro posturale, di segno opposto a quelle della classica reazione tegmentale (cfr. 7), interessano non soltanto gli arti anteriori ma anche gli arti posteriori.

Nei casi in cui le soglie risultano particolarmente basse (0,10-0,15 V), la stimolazione stereotassica di punti situati 1 mm dorsalmente al nucleo rosso non produce alcuna risposta. Stimolando con le stesse intensità il contorno dorsale del nucleo rosso, si ha elettivamente una flessione attiva nell'arto anteriore contralaterale; un piccolo abbassamento della punta dell'elettrodo

(7) W. R. INGRAM, S. W. RANSON, F. J. HANNETT, F. R. ZEISS a. E. H. TERWILLIGER, « Arch. Neurol. Psychiat., Chicago », XXVIII, 513 (1932).

(8) W. R. INGRAM, S. W. RANSON a. F. J. HANNETT, « J. Neurol. Psychopath. », XII, 219 (1932).

(9) M. MONNIER, « Ergebn. Physiol. », XLV, 321 (1944).

(10) M. MONNIER, « Arch. suisses Neurol. Psychiat. », LVI, 233 (1946); LVII, 325 (1946).

(11) M. MONNIER, « Revue neurol. », LXXVIII, 422 (1946).

(12) A. T. MUSSEN, « Arch. Neurol. Psychiat., Chicago », XXXI, 110 (1934).

(13) W. R. HESS, « Pflügers Arch. », CCXLIII, 634, 678 (1940); CCXLIV, 767 (1941).

(14) C. BARTORELLI, « Schweiz. Arch. Neurol. », XLVIII, 3 (1941).

(15) C. BARTORELLI, « Arch. Fisiol. », XLII, 384 (1942).

(16) S. BÜRG, « Helv. physiol. Acta », I, 3 (1943).

(17) W. R. HESS, S. BÜRG u. V. BUCHER, « Mschr. Psychiat. Neurol. », CXII, (1946).

produce risposte flessorie non solo nell'arto anteriore, ma anche in quello posteriore contralaterale. Un ulteriore spostamento in basso dell'elettrodo, sempre nella regione del nucleo, produce soltanto una flessione attiva dell'arto posteriore contralaterale; quest'ultima risposta è assente stimolando con gli stessi voltaggi la regione situata 1 mm ventralmente al nucleo rosso.

La soglia per le risposte flessorie crociate ottenute stimolando il nucleo rosso di un lato, è più bassa per impulsi rettangolari a 300/sec, 1 msec (0,25 V) che per impulsi a 300/sec, 0,1 msec (0,50 V). Nessun effetto poi si ottiene mediante la stimolazione della stessa struttura con stimoli a 10/sec, 1-3 msec, anche per voltaggi elevati.

2) Le risposte flessorie crociate alla stimolazione del nucleo rosso non sono dovute a diffusione di corrente a strutture contigue, perché: *a*) si manifestano per basse intensità di stimolazione; *b*) possono interessare elettivamente gli arti anteriori o quelli posteriori per stimolazione di punti limitrofi nella regione del nucleo rosso; *c*) la stimolazione di punti localizzati nella regione del tegmento mesencefalico, 2-3 mm dorsalmente o lateralmente al nucleo rosso, produce effetti opposti a quelli della stimolazione del nucleo rosso corrispondente, vale a dire inibizione del tono estensore con flessione attiva degli arti ipsilaterali e aumento del tono estensore negli arti contralaterali, a conferma dei risultati di Graham Brown <sup>(5,6)</sup> e di Hinsey, Ranson e Dixon <sup>(4)</sup>.

3) Le risposte flessorie crociate alla stimolazione del nucleo rosso si ottengono ancora: *a*) dopo ablazione bilaterale cronica della corteccia motrice eseguita 27-28 giorni avanti la decerebrazione; *b*) dopo decerebellazione bilaterale cronica, eseguita 14-21 giorni prima della decerebrazione. Nelle condizioni sperimentali di cui ad *a*) il fascio piramidale è degenerato, e pertanto gli effetti motori da noi osservati non possono spiegarsi con una sua attivazione per « riflesso assonico », dovuta a stimolazione antidromica di eventuali collaterali di fibre cortico-spinali, a destinazione rubrica. Gli esperimenti di cui a *b*) escludono una mediazione delle risposte flessorie da parte di fibre rubro-cerebellari [Brodal e Gogstad <sup>(18)</sup>]. Infine, nelle condizioni sperimentali di cui a *b*), sono degenerate tutte le fibre efferenti del *brachium conjunctivum* e pertanto gli effetti da noi osservati non possono attribuirsi a stimolazione antidromica di fibre cerebello-rubriche e a conseguente attivazione, sempre per « riflesso assonico », delle collaterali discendenti da loro emesse prima e dopo la decussazione di Wernicke [cfr. Jansen e Brodal <sup>(19)</sup>].

4) Le risposte flessorie crociate ottenute con la stimolazione del nucleo rosso di un lato rimangono immutate dopo emisezione trasversa completa del mesencefalo localizzata tra i *colliculi anteriores* e i *posteriores* ipsilaterali al lato stimolato. Esse sono invece abolite: *a*) da una emisezione del tronco dell'encefalo contralaterale al lato stimolato e interessante il tratto rubro-

(18) A. BRODAL a. A. C. GOGSTAD, « Anat. Rec. », CXVIII, 455 (1954).

(19) J. JANSEN a. A. BRODAL, *Aspects of cerebellar anatomy*. Oslo, Johan Grundt Tanum, 1954.



spinale al di sotto della decussazione; *b*) da una sezione mediana sagittale del mesencefalo, che interessi i tratti rubro-spinali a livello della decussazione di Forel. Pertanto l'effetto da noi descritto appare trasmesso dal fascio rubro-spinale.

I rapporti tra queste risposte del nucleo rosso e quelle ottenute stimolando elettricamente la parte intermedia del *lobus anterior* del cervelletto sono stati trattati in un'altra Nota [Pompeiano <sup>(20)</sup>].

**Fisiologia.** — *Analisi elettroencefalografica dell'effetto Rossi ottenuto in Cani predisposti e non predisposti alla epilessia riflessa* <sup>(\*)</sup>.  
Nota di EDELWEISS COTTI, PAOLO CREPAX e BRUNO SILVESTRINI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

Com'è noto, la prima dimostrazione delle correlazioni funzionali esistenti tra cervelletto e corteccia cerebrale è stata data dal Rossi <sup>(1)</sup>, il quale ha osservato come la stimolazione faradica ovvero chimica di alcuni lobuli cerebellari (*lobulus ansiformis*, *lobulus paramedianus*) renda efficace una eccitazione concomitante d'intensità infraliminale della corteccia motrice contralaterale. Ai rapporti tra *neocerebellum* e corteccia cerebrale è stata poi data evidenza in modi diversi [letteratura in Moruzzi <sup>(2)</sup> e Walker <sup>(3)</sup>].

Sotto l'aspetto morfologico si è generalmente ritenuto che il sostrato odologico delle correlazioni funzionali riferite sia costituito dalle fibre cerebelli-fughe che dagli emisferi cerebellari, per il *brachium conjunctivum* e il nucleo *ventralis lateralis* del talamo, si portano alla corteccia motrice contralaterale. Sulla scorta dei risultati di diversi esperimenti fisiologici si può tuttavia rilevare come anche nel caso presente sembri valida la conclusione che Henneman, Cooke e Snider <sup>(4)</sup> hanno formulata, riguardo al problema generale delle proiezioni cerebello-corticali: «Conventional neuroanatomy falls short of delimiting the extent of cerebello-cerebral projections». Le modificazioni dell'attività elettrica cerebrale, provocate dalla stimolazione elettrica [Walker <sup>(3)</sup>] o chimica [Crepax e Fadiga <sup>(5)</sup>] del *neocerebellum*, infatti si palesano spesso oltre i confini delle aree motrici: nel Gatto «encefalo isolato», per esem-

(20) O. POMPEIANO, «Rend. Acc. naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., in corso di stampa.

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) G. ROSSI, «Arch. Fisiol.», X, 389 (1912).

(2) G. MORUZZI, «Arch. Fisiol.», XLI, 87 (1941).

(3) A. E. WALKER, «J. Neurophysiol.», I, 16 (1938).

(4) E. HENNEMAN, P. M. COOKE a. R. S. SNIDER, «Res. Publ. Ass. nerv. ment. Dis.», XXX, 317 (1952).

(5) P. CREPAX e E. FADIGA, «Arch. Sci. biol.», XL, 66 (1956).



pio, Walker <sup>(3)</sup> ha osservato che la stimolazione faradica del *neocerebellum* provoca un effetto circoscritto nelle aree motrici, quando s'impieghino stimoli d'intensità liminale, mentre per stimoli più intensi gli effetti sono palesi anche in altre aree corticali. Gli esperimenti, di cui riferiamo nella presente Nota, dimostrano come a determinare l'estensione delle modificazioni elettroencefalografiche provocate dalla stimolazione chimica della corteccia del *lobulus ansiformis* intervenga, nel Cane, anche la particolare reattività dell'animale in esperimento.

Abbiamo preso in esame le modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale provocate nel Cane mediante l'applicazione di soluzioni di prostigmina di diversa concentrazione, sulla superficie del *lobulus ansiformis*: negli animali che hanno servito per tali prove, abbiamo indagato lo stato di predisposizione alla epilessia riflessa [Amantea <sup>(6,7)</sup>]. I primi esperimenti ci avevano infatti mostrato come le modificazioni elettroencefalografiche prodotte da stimolazioni cerebellari effettuate con le soluzioni di prostigmina di concentrazione minima efficace fossero in alcuni Cani costantemente circoscritte entro le aree motrici e in altre estese anche ad altre aree corticali; era perciò sembrato conveniente accertare se i fattori costituzionali che determinano la maggiore o minore estensione delle modificazioni stesse, fossero in qualche modo collegati con quelle proprietà dei centri nervosi che condizionano il manifestarsi o non della epilessia riflessa.

La preparazione dell'animale e la registrazione dell'attività elettrica corticocerebrale erano effettuate con la tecnica impiegata in precedenti ricerche concernenti la stimolazione chimica del cervelletto <sup>(5)</sup>. Il trattamento della corteccia del *lobulus ansiformis* col farmaco utilizzato, è stato messo in atto secondo il procedimento di Baglioni e Magnini <sup>(8)</sup>. La prostigmina era sciolta al momento dell'uso in una soluzione di NaCl al 9 p. 1000 e la serie delle concentrazioni saggiate è la seguente:  $3 : 10^5$ ;  $5 : 10^5$ ;  $1 : 10^4$ ;  $2 : 10^4$ ;  $2,5 : 10^4$ ;  $4 : 10^4$ ;  $1 : 10^3$ ;  $2,5 : 10^3$ . S'iniziava l'esperimento effettuando la stimolazione con la soluzione più diluita per passare poi a quelle di maggiore concentrazione, esaminando in un singolo animale solo gli effetti di alcune delle soluzioni della serie indicata.

Sull'area cortico-cerebellare prescelta era posto un dischetto di carta bibula del diametro di 5 mm, imbevuto della soluzione: se non si era osservata nessuna modificazione dell'elettroencefalogramma, il trattamento della medesima area veniva rinnovato due volte a intervalli di 3 min, lasciando i dischetti *in loco* per un tempo complessivo massimo di 10 min. Si procedeva quindi al lavaggio delle lamelle trattate, mediante batuffoli di ovatta imbevuti di liquido di Ringer tiepido. Le applicazioni di soluzioni di diversa concentrazione venivano distanziate l'una dall'altra di almeno 20 min, sebbene il tracciato riprenda di regola il suo aspetto normale in un tempo più breve.

(6) G. AMANTEA, « Boll. Acc. Med. Roma », XLVI, 121 (1920).

(7) G. AMANTEA, « Pflüger's Arch. », CLXXXVIII, 287 (1921).

(8) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

In tutti i Cani, terminate le osservazioni concernenti gli effetti della stimolazione cerebellare, lo stato di predisposizione alla epilessia riflessa è stato indagato con un medesimo procedimento, i cui dettagli sono riportati in un lavoro precedente [Crepax e Infantellina <sup>(9)</sup>].

Le modificazioni dell'elettroencefalogramma che si fanno manifeste per il trattamento della superficie del *lobulus ansiformis* <sup>(10)</sup> con prostigmina, consistono essenzialmente in un aumento del voltaggio delle onde elettriche cerebrali; tale aumento, che non si accompagna a variazioni della frequenza delle onde stesse, generalmente è massimo in corrispondenza delle aree motrici.

I Cani predisposti e quelli non predisposti alla epilessia riflessa si differenziano tra loro rispetto: *a*) alla concentrazione di prostigmina minima sufficiente a provocare alterazioni manifeste dei potenziali cerebrali («concentrazione soglia»); *b*) alla estensione delle modificazioni elettroencefalografiche che compaiono per il trattamento della corteccia del *lobulus ansiformis* con la soluzione di concentrazione soglia; *c*) agli effetti di stimolazioni cerebellari attuate con soluzioni di prostigmina di concentrazione progressivamente crescente. Facciamo presente che la costanza del livello della pressione arteriosa, secondo quanto abbiamo osservato, permette di escludere la natura circolatoria dei fenomeni in esame.

Negli esperimenti su Cani non predisposti alla epilessia riflessa, la concentrazione soglia è generalmente compresa tra  $1 : 10^4$  e  $2 : 10^4$ . Il trattamento della corteccia del *lobulus ansiformis* con la soluzione di prostigmina di concentrazione minima efficace, in tali animali provoca un aumento di ampiezza dei potenziali cerebrali, che generalmente è circoscritto nell'area motrice contralaterale rispetto al *lobulus* stimolato; in modo meno costante e rilevante, il fenomeno si manifesta anche nell'area omonima ipsilaterale (fig. 1 B). Quando si stimola la corteccia cerebellare con soluzioni di prostigmina di concentrazione superiore a quella minima efficace, modificazioni compaiono non soltanto nell'elettrogramma del giro sigmoideo, con quelle differenze d'importanza e costanza che tra i due lati si notano per l'impiego di soluzioni di concentrazione soglia, ma pure nei tracciati ottenuti dalla corteccia del lobo parietale e di quello temporale e frequentemente anche del lato occipitale dell'emisfero del lato opposto alla sede di stimolazione; nel tracciato elettrico registrato da quelle aree della corteccia cerebrale dello stesso lato che sono aborali rispetto alla zona motrice, di rado si osservano gli effetti della stimolazione neocerebellare e per lo più essi appaiono di scarso rilievo (fig. 1 C).

Negli esperimenti su Cani predisposti alla epilessia riflessa, la concentrazione soglia del farmaco risulta più bassa che in quelli eseguiti su animali

(9) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, «Arch. Sci. biol.», in corso di stampa.

(10) La zona stimolata è stata nel più dei casi il *crus secundum*, ma il trattamento del *crus primum* non provoca effetti diversi. Conviene effettuare l'applicazione sulle parti più laterali dei *crura* <sup>(5)</sup>.

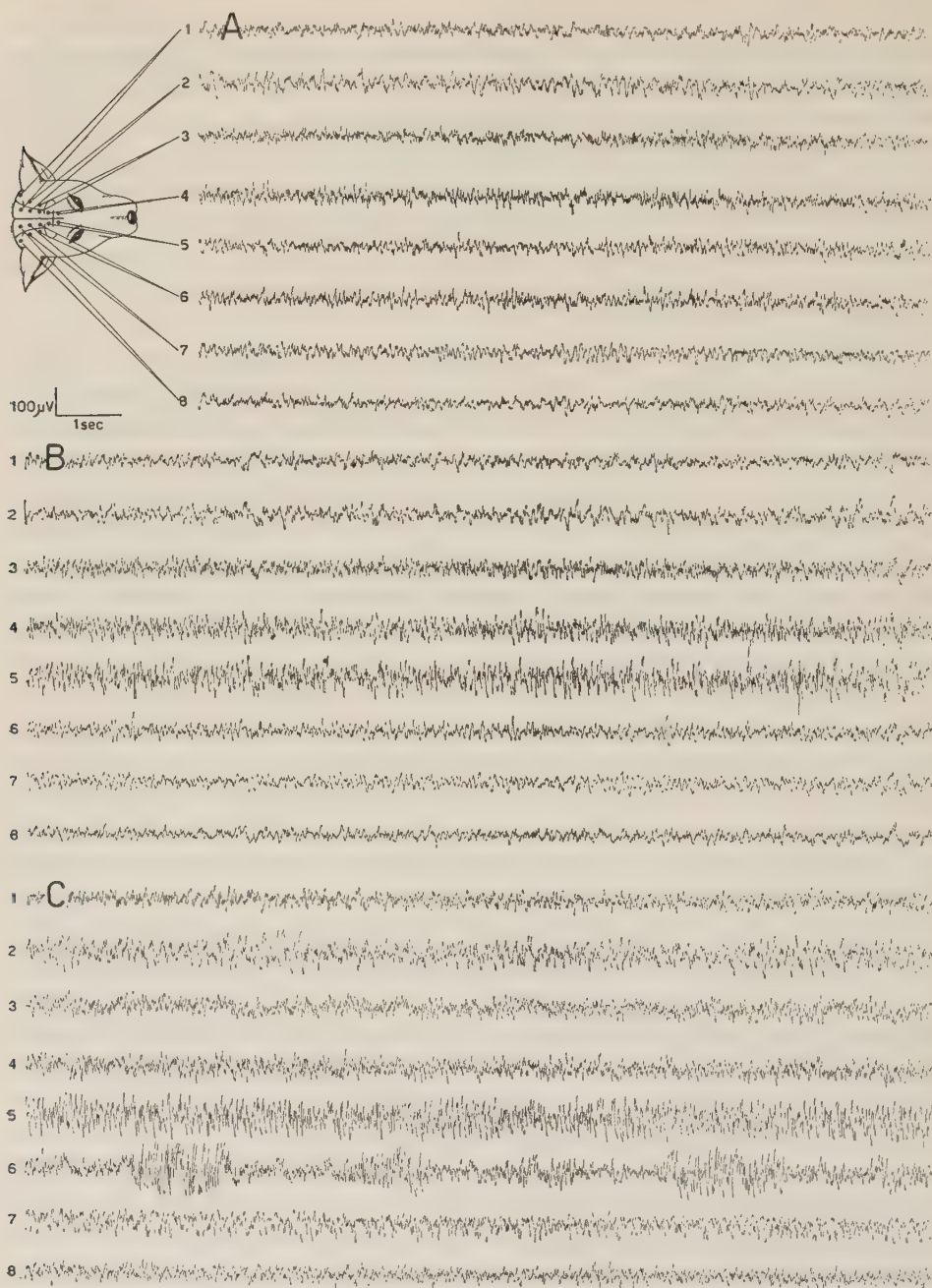


Fig. 1. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale di un Cane non predisposto alla epilessia riflessa, provocate dal trattamento con soluzioni di prostigmina di diversa concentrazione di un medesimo punto del *crus secundum* di sinistra.

A: attività elettrica cerebrale 3 h dopo la fine della narcosi eterica. B: 1 min dopo il trattamento della superficie cerebellare con una soluzione di prostigmina  $1 : 10^4$  (concentrazione soglia). C: 25 min ca. dopo B e 3 min e 30 sec dopo il trattamento del medesimo punto della superficie cerebellare trattato in B con una soluzione di prostigmina  $2 : 10^4$ . Tra B e C, la superficie cerebellare trattata era stata lavata con liquido di Ringer tiepido e il tracciato elettrico cerebrale aveva ripreso i caratteri manifesti in A.



non predisposti ( $5 : 10^5$ ); inoltre, le modificazioni dell'elettroencefalogramma provocate dal trattamento della corteccia del *lobulus ansiformis* con la soluzione di concentrazione soglia si estendono a una più vasta superficie degli emisferi cerebrali, la quale comprende generalmente le aree motrici di entrambi i lati e la corteccia parietale, temporale e occipitale dell'emisfero contralaterale (fig. 2). Né i limiti della superficie corticocerebrale in cui compaiono gli effetti della stimolazione neocerebellare, variano sensibilmente per l'impiego di soluzioni di prostigmina di concentrazione progressivamente crescente (fig. 2 C); in tal caso si fa solo più cospicuo, più pronto e più duraturo l'aumento di ampiezza dei potenziali corticali.

In alcuni degli animali predisposti, la stimolazione della corteccia cerebellare con la soluzione di concentrazione soglia ha provocato modificazioni elettroencefalografiche ancor più estese: anche nell'elettrogramma della corteccia parietale, temporale e occipitale dello stesso lato della stimolazione si è osservato un aumento di ampiezza delle oscillazioni spontanee di potenziale, aumento che è apparso per altro notevolmente minore che nelle aree omonime contralaterali. In questi casi, effettuando la stimolazione cerebellare con soluzioni di prostigmina più concentrate, le modificazioni dell'elettroencefalogramma si sono fatte più importanti e la differenza di ampiezza tra i potenziali derivabili dai due emisferi è diminuita.

L'estensione delle modificazioni elettroencefalografiche provocate dalla stimolazione chimica della corteccia del *lobulus ansiformis* risulta quindi determinata nel Cane, oltre che dalla concentrazione della soluzione impiegata per la stimolazione stessa, anche dalla particolare reattività dell'animale in esperimento. Il carattere di fenomeno circoscritto ovvero ampiamente diffuso delle modificazioni stesse rappresenta, per così dire, l'impronta stereotipa che la reattività dell'animale conferisce agli effetti della stimolazione cerebellare; e le condizioni costituzionali che determinano l'estensione degli effetti provocati da tale stimolazione, risultano costantemente collegati con quelle proprietà dei centri nervosi dalle quali dipende il manifestarsi o non della epilessia riflessa, giacché tra i Cani predisposti e quelli non predisposti si notano costanti differenze per ciò che concerne la estensione dei fenomeni elettrici provocabili nella corteccia cerebrale mediante la stimolazione chimica neocerebellare.

Vi è ragione di ritenere che la particolare reattività degli aggregati neuronici corticocerebrali intervenga effettivamente nel determinare il carattere diffuso delle modificazioni elettroencefalografiche che la stimolazione cerebellare provoca in animali predisposti alla epilessia riflessa. A questo proposito facciamo presente come nella corteccia cerebrale isolata del Cane predisposto la stimolazione iterativa desti un'attività ritmica autointrattenuta, la quale attività fa difetto nel lembo corticale dell'animale non predisposto [Crepax e Infantellina <sup>(9)</sup>]. D'altra parte, mentre la stimolazione della corteccia dei *crura* mediante stimoli elettrici isolati non desta risposte *point-to-point* nella corteccia degli emisferi cerebrali [Henneman, Cooke e Snider <sup>(4)</sup>], la stimolazione faradica effettuata nella medesima sede cerebellare provoca



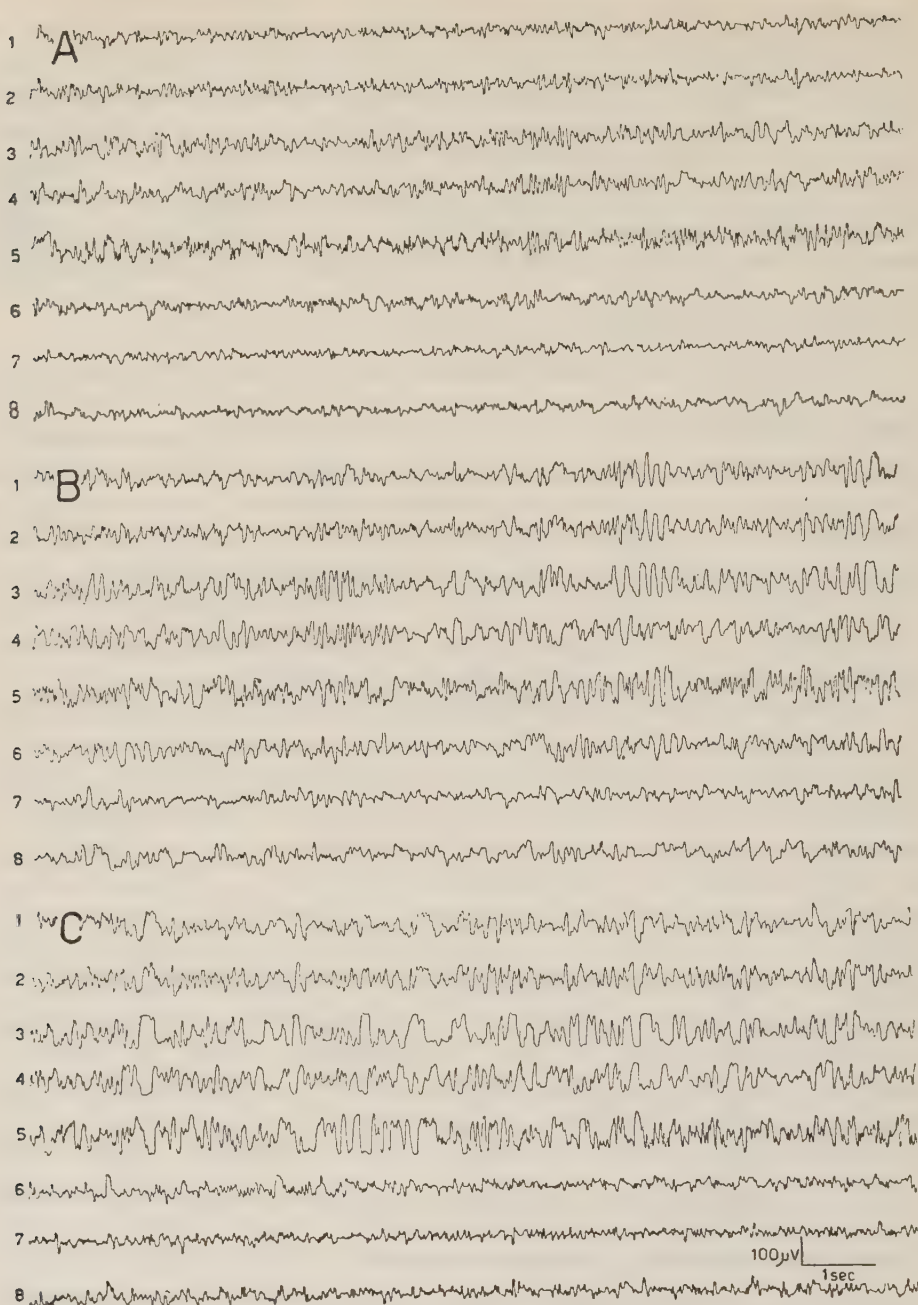


Fig. 2. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale di un Cane predisposto alla epilessia riflessa, provocate dal trattamento con soluzioni di prostigmina di diversa concentrazione di un medesimo punto del *crus secundum* di destra.

Le derivazioni utilizzate erano le seguenti: 1 = area occipito-temporale sinistra (S); 2 = area parieto-temporale S; 3 = area parieto-frontale S; 4 = area motrice S; 5 = area motrice destra (D); 6 = area parieto-frontale D; 7 = area parieto-temporale D; 8 = area occipito-temporale D.

A: attività elettrica cerebrale 2 h dopo la fine della narcosi eterica e 2 min avanti B. B: 25 sec dopo l'applicazione di prostigmina 1 :  $10^4$ . C: 25 min ca. dopo B e 2 min dopo l'applicazione di prostigmina 2 :  $10^4$ . Tra B e C la superficie cerebellare trattata è stata lavata con liquido di Ringer tiepido e il tracciato elettrico cerebrale aveva ripreso i caratteri manifesti in A.

un aumento dell'ampiezza e della frequenza dei potenziali derivabili dalle aree motrici e dalla corteccia parietale e temporale [Walker <sup>(3)</sup>].

Le modificazioni dell'elettroencefalogramma provocate dalla stimolazione del *neocerebellum*, appaiono quindi subordinate al carattere ripetitivo degli impulsi che dal cervelletto giungono alla corteccia cerebrale. E poiché la diversa reattività degli aggregati neuronici della corteccia cerebrale nel Cane predisposto rispetto a quella del non predisposto si manifesta con l'impiego di stimolazioni iterative [Crepax e Infantellina <sup>(9)</sup>], può credersi che ad essa sia verosimilmente riferibile la diversa estensione delle modificazioni elettroencefalografiche destinate dalla stimolazione chimica del cervelletto.

**Biologia.** — *L'attività mitotica durante la morfogenesi cerebellare in un Anfibio anuro.* Nota <sup>(\*)</sup> di GIORGIO M. BAFFONI e EMILIA ELIA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

Mentre sono molto numerose le ricerche compiute sulla morfogenesi e sulla istogenesi del sistema nervoso centrale, poca attenzione invece hanno richiamato i processi proliferativi che si verificano durante la morfogenesi nelle diverse parti del neurasse, specialmente definiti da un punto di vista quantitativo.

Oltre a incidentali rilievi sulla presenza di episodi mitotici, le osservazioni più complete ed accurate sull'andamento dell'attività mitotica del tubo neurale durante lo sviluppo, sono quelle compiute da Milone (1923) <sup>(1)</sup> e da Hamburger (1948) <sup>(2)</sup> su embrioni di pollo e da Coghill (1924, 1933) <sup>(3)</sup>, da Detwiler (1925) <sup>(4)</sup> e da Burr (1932) <sup>(5)</sup> su embrioni di Anfibi; questi Autori hanno constatato che l'attività proliferativa è più accentuata nella regione dorsale (*piastra alare*) che in quella ventrale (*piastra basale*) del tubo neurale; tale fatto è stato interpretato in diversa maniera: da Prénant (1894) <sup>(6)</sup>, che per primo l'ha osservato, è stato messo in rapporto con i processi morfogenetici di saldatura del tubo neurale, da Coghill <sup>(3)</sup> invece è stato attribuito al tardivo sviluppo dell'area sensoria (Maclean 1932 <sup>(7)</sup>) ed alla formazione delle intumescenze degli arti, da Hamburger <sup>(2)</sup> infine esso è stato ritenuto dovuto a fattori estrinseci, quali l'arrivo dei nervi da placodi, da altri centri, ecc.

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) S. MILONE, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 20, p. 417 (1923).

(2) V. HAMBURGER, « Journ. Comp. Neurol. », 88, p. 221 (1948).

(3) G. E. COGHILL, « Journ. Comp. Neurol. », 37, p. 71 (1924); *ivi*, 57, p. 327 (1933).

(4) S. R. DETWILER, « Journ. Experim. Zool. », 42, p. 333 (1925).

(5) H. S. BURR, « Journ. Comp. Neurol. », 56, p. 347 (1932).

(6) A. PRÉNANT, « Intern. Monatschr. Anat. u. Physiol. », 11, p. 281 (1894).

(7) B. L. MACLEAN, « Journ. Experim. Zool. », 64, p. 71 (1932).

Va osservato che l'esame degli Autori citati è stato compiuto in precoci stadî di sviluppo; a quanto ci è noto, assai poco si conosce circa l'andamento delle mitosi che si verificano a stadî di sviluppo avanzati, a parte alcune osservazioni sul cervelletto dei Mammiferi <sup>(8)</sup>, ed alcuni rilievi in regioni del sistema nervoso centrale di larve di Anfibi anuri (Weiss e Rossetti 1951 <sup>(9)</sup>, Kollros 1953 <sup>(10)</sup>).

Essendo noto che nel neurasse degli Anfibi anuri si verificano episodi mitotici anche a stadî avanzati di sviluppo <sup>(9,10)</sup>, nel nostro Istituto sono iniziate ricerche allo scopo di precisare l'andamento dell'attività proliferativa nelle due regioni del tubo neurale (dorsale e ventrale) a varî livelli del neurasse; in questa Nota riferiamo i dati ottenuti dall'esame di una zona del neurasse nella quale l'attività mitotica è risultata particolarmente imponente: si tratta cioè della porzione in cui avviene la morfogenesi cerebellare, che negli Anfibi anuri si verifica in stadî molto avanzati dello sviluppo larvale (Larsell 1923, 1925 <sup>(11)</sup>, Herrick 1924 <sup>(12)</sup>); l'interesse di questa ricerca è dato dal fatto che i suoi risultati si prestano ad una discussione sui fattori dell'attività mitotica del neurasse.

Le osservazioni sono state condotte su una serie di lotti di allevamento di uova di rospo (*Bufo bufo* L.); oltre a qualche stadio embrionale, sono stati fissati sei animali (due in Sanfelice, due in Helly e due in Bouin) per ognuno dei dodici stadî larvali prescelti (I, II, IV, VI, VII, IX, XI, XIII, XV, XVII, XX e XXIII secondo Taylor e Kollros <sup>(13)</sup> in *Rana pipiens*) ed a cinque periodi diversi dopo la metamorfosi (a 5, 7, 10, 15 e 20 giorni). Al fine di ottenere un eguale orientamento delle superfici delle due piastre (dorsale e ventrale), ogni individuo è stato sezionato inclinato all'indietro (di circa 20°) sul piano trasversale; i preparati (sezioni seriali di 5 o 8  $\mu$  di spessore) sono stati trattati con il reattivo di Schiff secondo il metodo di Feulgen standardizzato da Stowell (1945) <sup>(14)</sup>, o con il Bleu di toluidina (a  $10^{-4}$  ed a pH 4,5 per 3<sup>h</sup> a 25°C), o colorati con emallume di Mayer - eosina o impregnati con argento colloidale secondo il metodo di Lugaro modificato da Bodian.

Le mitosi (stadî di prometafase-anafase) sono state computate su tutte le sezioni comprendenti le labbra romboidali (fino allo stadio XI) o la lamina cerebellare (stadî seguenti); onde avere risultati comparabili, si è proceduto al computo della densità mitotica (numero di mitosi nell'unità di superficie); per ciò i contorni della piastra alare, disegnati alla camera lucida, sono stati misurati con un curvimetro onde avere la larghezza media; questa, multipli-

(8) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (ser. VIII), 16, p. 798 (1954); « Arch. Zool. Ital. », 41, p. 1 (1956).

(9) P. WEISS e F. ROSSETTI, « Proc. Nat. Ac. Sci. », 37, p. 540 (1951).

(10) J. J. KOLLROS, « Journ. Experim. Zool. », 123, p. 153 (1953).

(11) O. LARSELL, « Journ. Comp. Neurol. », 36, p. 89 (1923); *ivi*, 39, p. 249 (1925).

(12) C. J. HERRICK, « Arch. Neurol. u. Psychiatr. », 11, p. 621 (1924).

(13) A. C. TAYLOR e J. J. KOLLROS, « Anat. Record », 94, p. 7 (1946).

(14) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », 20, p. 45 (1945).

cata per la lunghezza (prodotto del numero di sezioni per lo spessore) ha dato lo sviluppo in superficie dell'ependima della piastra alare; i valori di densità si sono ottenuti dividendo il numero delle mitosi per i valori di superficie (in decimillimetri quadrati). Analoga procedura è stata impiegata per la piastra basale. Ogni valore della tabella rappresenta la media aritmetica dei valori ottenuti.

Rispetto agli stadî embrionali, i primi stadî larvali presentano una progressiva diminuzione dell'attività proliferativa sia nella piastra alare che in quella basale al livello del metencefalo, il quale però in questo periodo è mal delimitabile; pertanto i risultati più interessanti, ai fini della nostra indagine, sono quelli rappresentati nella Tabella I e nel grafico (fig. 1) e che riguardano la seconda metà del periodo larvale ed i primi venti giorni dopo la metamorfosi.

TABELLA I.

Stadio	Età	Piastra alare			Piastra basale		
		n. mitosi	area	densità	n. mitosi	area	densità
IV	10 gg	19	3,27 dmm <sup>2</sup>	5,8	16	2,76 dmm <sup>2</sup>	5,8
VI-VII	30	40,5	4,18	9,6	7	2,09	3,0
IX-XI	45	54	5,31	10,1	6	4,9	1,2
XV	50	39	2,84	13,5	3	3,3	0,9
XVII	53	63	3,08	20,0	8	4,0	2,0
XX	57	75	3,30	23,0	20	5,2	3,8
XXIII	60	126	3,79	30,0	15	2,88	5,2
dopo 5-7 gg.	66	63	5,59	11,3	8	3,75	2,1
dopo 10 »	70	33	8,33	4,0	5	5,19	0,8
dopo 15 »	75	36	9,45	3,8	12	7,98	1,5
dopo 20 »	80	43	14,64	3,4	17	11,49	1,5

Dai risultati ottenuti (v. Tabella I e fig. 1) è evidente che l'attività mitotica nella piastra alare del metencefalo presenta un iniziale incremento dallo stadio IV allo stadio XV; questo prosegue e si intensifica dopo la fusione delle labbra romboidali e la formazione della lamina cerebellare, raggiungendo i più elevati valori al termine della metamorfosi (stadio XXIII); quindi l'attività mitotica decresce rapidamente precipitando a valori molto bassi.

Mentre l'attività mitotica della piastra alare aumenta fin dallo stadio IV, quella della piastra basale, invece, in un primo tempo continua a diminuire



(fino allo stadio XV) e solo per un breve periodo si accentua (dallo stadio XVII a XXIII) senza peraltro sorpassare i valori iniziali (dello stadio IV); infine, entro pochi giorni dopo la metamorfosi, ritorna ai valori di partenza (dello stadio XV).

Il confronto tra l'andamento dell'attività mitotica al livello del metencefalo nella piastra alare e quello nella piastra dorsale dell'Anfibio anuro esa-

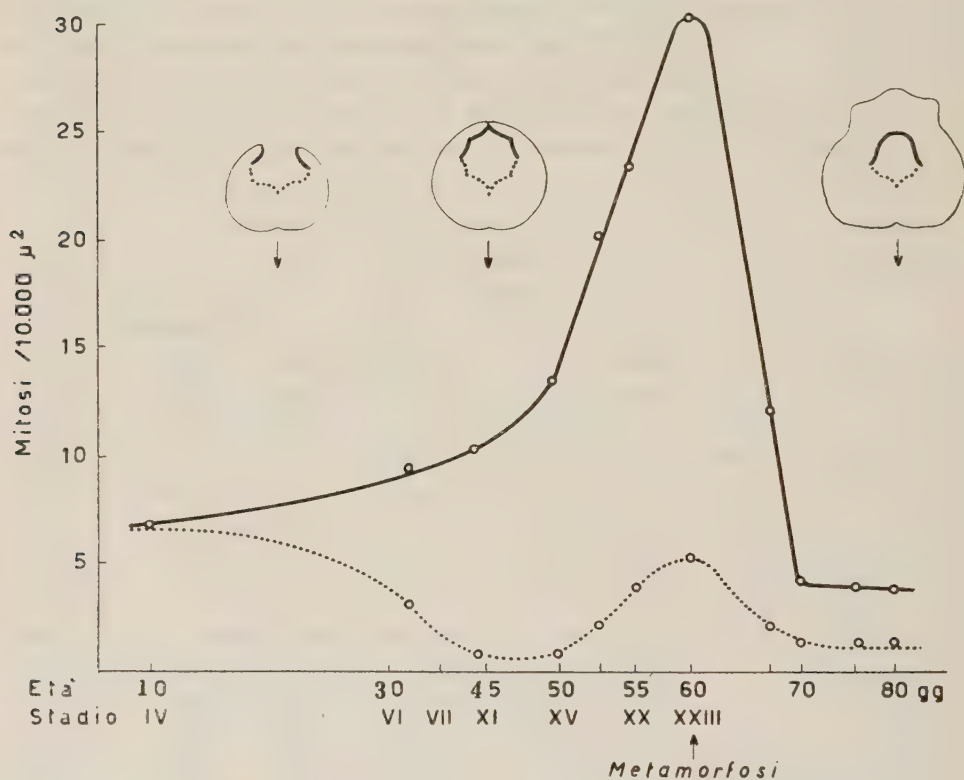


Fig. 1. - Andamento dell'attività mitotica nell'ependima della piastra alare (tratto *pieno*) e della piastra basale (tratto *punteggiato*) all'altezza del metencefalo durante e dopo la metamorfosi di *Bufo bufo* L. (il tempo sull'ascissa è in scala logaritmica).

minato, dimostra non soltanto una differenza quantitativa, ma una diversità di comportamento che è espressione di una differenza anche qualitativa.

Il notevole aumento delle mitosi nella piastra alare è in evidente rapporto di causa con la formazione degli elementi cerebellari, i quali, come sarà documentato da ulteriori lavori, si differenziano molto tardi (alcuni di essi solo dopo la metamorfosi); ne consegue che anche negli Anfibii anuri, come è stato dimostrato nei Mammiferi da uno di noi <sup>(8)</sup>, gli elementi cerebellari si determinano numericamente in stadî molto avanzati dello sviluppo in rapporto con la tardiva acquisizione dell'abilità locomotoria dei tetrapodi.

Per quanto riguarda l'aumento mitotico riscontrato nella piastra basale agli ultimi stadî della metamorfosi, poiché esso esorbita i limiti della fluttuazione statistica (casuale), va ritenuto come un avvenimento reale che può essere messo in relazione con il tardivo differenziamento di alcuni centri rombencefalici; ricordiamo in proposito che i centri vestibolari degli Anfibi anuri adulti non provengono dalla trasformazione di quelli della linea laterale (Larsell, 1924<sup>(15)</sup>), ma, come di recente è stato dimostrato da osservazioni ecologico-comparative (Stefanelli e Zacchei, 1949<sup>(16)</sup>), essi si differenziano *ex novo* prima del termine della metamorfosi; l'incremento dell'attività mitotica nella piastra basale degli Anfibi anuri, è pertanto da riferirsi alla tardiva determinazione ed al tardivo differenziamento di quei centri rombencefalici correlati funzionalmente alla condizione tetrapoda (terrestre).

Le considerazioni che emergono da questi risultati, possono illuminare sulla causa del diverso andamento dell'attività mitotica tra la porzione dorsale e quella ventrale del tubo neurale. Infatti l'aver osservato che l'attività mitotica della piastra alare metencefalica continua, anzi si accentua, dopo la fusione delle labbra romboidali e che quella della piastra basale persiste a lungo, esclude che il determinismo delle mitosi consista esclusivamente nel compimento dei processi morfogenetici del tubo neurale; in accordo con Hamburger<sup>(2)</sup>, pertanto, non riteniamo sufficientemente provata la relazione sostenuta da Prénant<sup>(6)</sup>. D'altra parte l'attività mitotica della piastra alare del metencefalo non sembra in rapporto con l'arrivo di fasci nervosi da placodi, poiché questi sono già da tempo formati e connessi, né con le intumescenze degli arti, che si formeranno più tardi; inoltre da preparati trattati con metodi argentici non si osserva l'arrivo di cospicui fasci nervosi in corrispondenza del massimo aumento dell'attività mitotica; perciò non possiamo ritenere sufficiente, per l'esplicazione dell'aumento dell'attività mitotica nella piastra alare del metencefalo, l'azione determinante dei fattori estrinseci supposta da Hamburger; più fondata, invece, appare la concezione di Coghill e di Detwiler, i quali hanno ritenuto che l'attività mitotica fosse regolata dallo sviluppo di altre zone del neurasse, ed in particolare da fattori di natura temporale (precoce o tardivo differenziamento). Riteniamo che oltre a questi fattori, l'attività mitotica del sistema nervoso centrale è condizionata anche da fattori topografici (di sede), cioè da tutti quei fattori che dirigono i processi della determinazione e del differenziamento nelle diverse regioni del neurasse a differenti epoche di sviluppo.

Concludendo: l'attività mitotica nel neurasse non si esaurisce ovunque precocemente, ma presenta un peculiare comportamento ai diversi livelli

(15) O. LARSELL, « Journ. Comp. Neurol. », 60, p. 473 (1934).

(16) AL. STEFANELLI e A. M. ZACCHEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (ser. VIII), 7, p. 358 (1949).

del neurasse in rapporto alla maggiore o minore precocità del differenziamento dei singoli centri nervosi; nella regione del metencefalo di Anfibi anuri il notevole aumento dell'attività proliferativa nella porzione dorsale (piastra alare) a stadî larvali molto inoltrati non può essere riferito ai soli processi morfogenetici del tubo neurale, né alle sole cause estrinseche, ma risulta condizionato soprattutto da quei fattori intrinseci che regolano nel tempo e nello spazio i processi della determinazione e del differenziamento dei diversi centri nervosi e persino dei singoli neuroni (cfr. Stefanelli 1945-55 <sup>(17)</sup>).

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Socio Guido Vernoni

tenuta (\*) dal Corrisp. MASSIMO ALOISI

Alla persona di Guido Vernoni, al suo spirito fine, alla sua sottile e sempre mobile intelligenza conviene una commemorazione sommessa, ma calda di quell'affetto filiale che egli non ebbe, se non per quel tanto che di filiale vi è nell'affetto dei discepoli.

Nè altro io saprei o potrei fare, di fronte a tanti amici e colleghi suoi, che ebbero con lui in vita dimestichezza e comunità di interessi intellettuali e morali, e lo conobbero schivo di ogni futile vanità e pur quasi sempre gaio, in un mondo che anche nella sua faccia più triste egli sapeva giudicare con naturale serenità.

Era nato ad Alessandria di Egitto nel 1881 da Alfonso Vernoni, anch'egli medico, e da Elvira Prinoth, la madre a cui, dopo la precoce perdita del genitore, rimase vicino per tutta la vita, fino alla tarda e venerata vecchiezza di lei. Ebbe la sua prima educazione in Toscana e si iscrisse all'Università di Bologna, prima volgendosi agli studi di Matematica e Fisica, ma passando poco dopo a quelli di Medicina. Conseguì la Laurea in quella Facoltà nel 1906.

Dotato di un acuto spirito di osservazione, naturalista nella sua più recondita struttura intellettuale, anche se allo stesso tempo vivamente interessato ai problemi medici, egli divenne assistente nell'Istituto di Anatomia Comparata di Bologna, allora diretto da Ercole Giacomini, e lì cominciò i suoi studi, e lì fece le sue prime ricerche, ponendosi a una disciplina di lavoro a cui i giovani oggi amano volentieri sottrarsi, e non sanno che è proprio quel primo generoso contributo che, se razionalmente vissuto, li forgia per il lavoro futuro e dà loro poi il diritto morale di insegnare agli altri.

(17) Ved.: AL. STEFANELLI, «Mem. Acc. Naz. Lincei», (ser. VIII), I, p. 27 (1947); «Quart. Rev. Biol.», 26, p. 17 (1951); «La Ricerca Sci.», 25, p. 2778 (1955).

(\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.



Sono infatti di questo periodo gli studi che furono poi pubblicati in due memorie, quella sulla istofisiologia del villo intestinale e quella sullo sviluppo del cervello di *Muletia*.

Lasciò il Laboratorio bolognese di Anatomia Comparata con una esperienza già consolidata nella pazienza dell'osservazione e nel rigore delle deduzioni. All'attivo aveva anche l'amicizia fraterna con un altro giovane dell'Istituto, Alfredo Corti, amicizia che egli conservò intatta per tutta la vita.

Dal 1909 fu assistente e successivamente aiuto di Guido Tizzoni, professore di Patologia generale nella Università di Bologna. Comincia dunque qui la sua carriera di patologo e qui egli si formò non solo come ricercatore nel campo della fisiopatologia, della immunologia e dell'istologia patologica, ma si formò anche come organizzatore del funzionamento di un laboratorio e di un istituto didattico; fu appunto in quella fucina che forgiò la sua inarrivabile sapienza didattica che divenne poi una delle sue doti più singolari.

Di quel laboratorio dal quale poco avanti era uscito il Centanni, Guido Vernoni divenne ben presto l'elemento produttivo e organizzatore cui degnamente appariva affidato il compito di portare ulteriormente avanti la scuola. Ma le vicende accademiche successive non si svolsero così pianamente, come purtroppo capita di frequente da noi, e nonostante il grande prestigio che nei 10 anni successivi il Vernoni si andò conquistando nello Studio bolognese, egli dovette poi tener conto non soltanto della sua produzione scientifica, che pur andava consolidandosi e arricchendosi, ma anche della sua concreta possibilità di carriera accademica, poichè al maestro suo, il Tizzoni, venivano sempre più mancando le forze necessarie per sostenerlo nella difficile competizione e molte delle energie dell'allievo erano impiegate nel coadiuvare alla attività didattica e direzionale.

Fu così che dopo la 1<sup>a</sup> guerra mondiale, nel 1920, il Vernoni decise di passare nell'Istituto di Patologia generale della Università di Firenze, sotto la direzione del Lustig. Vi portava una buona esperienza scientifica, documentata da molte pubblicazioni. Tra queste ricorderemo i suoi contributi sull'azione del radio nell'embrione di pollo e le sue osservazioni sull'automatismo della contrazione del cuore embrionale, lo studio delle minute alterazioni degenerative degli epiteli renali nell'idronefrosi sperimentale, i lavori immunologici, in particolare rivolti allo studio della immunizzazione antitetanica (atteso il grande contributo che il Tizzoni e la Cattani avevano dato a questo argomento), lo studio istopatogenetico della influenza epidemica e, infine, i due argomenti principali sui quali egli volle ulteriormente ritornare in seguito, quello della patogenesi del processo febbrile e quello della fisiologia dei vasi sanguiferi. Nel primo campo — ove si scorge anche l'influenza dell'insegnamento del Murri — egli cominciò col dimostrare un incremento, negli animali febbricitanti, dei processi ossidativi (respirazione sopravvitale) nei tessuti, fegato e muscoli, isolati *in vitro*, e ciò a sostegno dell'esistenza e della genesi autoctonamente « periferica » dell'aumentata produzione di calore nell'organismo febbricitante.



Nel secondo campo egli osservò importanti proprietà fisiologiche della intima arteriosa, variabili a seconda della composizione chimica del liquido di scorrimento endovasale, della sua viscosità, della direzione del moto ecc.

Fu mobilitato nella 1<sup>a</sup> guerra mondiale e in qualità di capitano medico, collaborò col Tizzoni nella preparazione del siero antitetanico e si occupò, anche con ricerche originali, dei congelati, degli incidenti da siero, della genesi del tetano postsierico.

Nella scuola fiorentina egli proseguì questi studi (tra l'altro scrisse, col Lustig, il capitolo sulla febbre di Malta per il grande trattato di Kolle e Wassermann) e vi aggiunse quelli sull'influenza dell'incroto tiroideo e della via di introduzione dei veleni sulla sensibilità degli animali all'effetto di questi e cominciò ad occuparsi di un altro dei problemi che lo terrà in pieno combattimento scientifico fino alla fine della sua vita, cioè il problema della etiopatogenesi dei tumori.

Fu incaricato di Microbiologia a Firenze nel periodo 1919-24, incaricato di Patologia generale e supplente nell'insegnamento di Fisiologia umana a Sassari, nel 1925-26 e fu ternato, in questo stesso 1926, nel concorso per la cattedra di Cagliari. Così a 45 anni di età, si coronò, con questo primo risultato accademico, la sua prima fatica; ed in effetti fu assai più tardivamente di quanto il suo ingegno non meritasse.

A Cagliari stette solo un anno per passare poi a Catania dove rimase due anni e vi ebbe anche l'incarico dell'insegnamento dell'Anatomia patologica. Infine fu chiamato a Roma per l'anno 1929-30 e quivi chiuse la sua carriera didattica nel 1952. In effetti egli aveva raggiunto una formazione culturale molto vasta che andava dal campo biologico a quello più strettamente medico, passando attraverso la fisiologia, la patologia generale e l'anatomia patologica, ritenendo di queste discipline, tra loro variamente affini, i concetti generali ed essenziali.

Gli argomenti di ricerca originale da lui preferiti divengono ora essenzialmente tre: uno, che lo occupa solo per un determinato periodo di tempo, in collaborazione con Agrippina Nakonetschnii-Pirone, ed è quello dell'importanza degli organi emopoietici nel determinare il livello opsonico del sangue e la resistenza alle malattie infettive, gli altri due, che lo occuperanno per il resto della vita, e che sono i già ricordati temi della patogenesi della febbre e della patogenesi dei tumori.

Nel primo egli prosegue a raccogliere, e a farli raccogliere dai suoi allievi, quei dati che fossero dimostrativi della partecipazione biochimica del tessuto muscolare nella genesi del calore febbrile, fenomeno che egli in contrapposizione alle meccanicistiche vedute del Liebermeister, vede come essenzialmente reattivo e difensivo.

Nel campo dei tumori egli svolge una costante e alacre attività di studioso: padrone della diagnostica istopatologica, egli non mancava mai di ripetere che il dato di osservazione morfologica, pur nei suoi limiti evidenti, non può e non deve esser trascurato in ogni ipotesi patogenetica. E ciò vale sia per il

problema di caratterizzare la così detta atipia tumorale, sia per quello di depistare i primi passi della cancerizzazione.

Da siffatte osservazioni e meditazioni egli arrivò alla conclusione che il processo della cancerizzazione è un lento e progressivo adattamento cellulare a condizioni ambientali abnormi, le quali consistono essenzialmente in uno spostamento dell'equilibrio nutrizionale. A questa sua assolutamente non conformistica sul principio (egli aveva sempre un lieve gusto verso tali posizioni a cui lo portava la sua chiara e ben consapevole intelligenza), e pertanto combattuta posizione, si dovettero avvicinare poi alcuni fra i più autorevoli cancerologi stranieri e ciò fu per lui motivo di vera e legittima soddisfazione.

Intanto egli si era accinto alla difficile fatica di preparare un grande Trattato di Patologia Generale, per la Casa Editrice Sansoni. Si era messo al lavoro con un impegno quale alcuni forse potevano non sospettare in lui. Era come se istintivamente sentisse di aver la vita assediata da un male che non gli avrebbe permesso di portare a termine l'opera intrapresa. In realtà era e appariva nel pieno della salute, ma purtroppo ebbe solo la fortuna di vedere uscire il primo volume del suo Trattato. Il secondo era già tutto in bozze quando, la sera del 20 febbraio 1956, non più improvvisamente che silenziosamente, si spense la sua vita.

In questo veramente notevole Trattato egli ha consegnato il frutto della sua esperienza di insegnante.

Insegnante egli fu in effetti nel più alto e verace senso della parola. Allo insegnamento era portato da una capacità intrinseca di chiarimento razionale, capacità che inevitabilmente si identificava con una sempre vigile autonomia di pensiero. Vi era altresì naturalmente portato da una lingua viva e perfetta, da un gaio senso di socialità e, sopra a tutto, da un sempre candido entusiasmo per i fenomeni naturali.

Aveva il dono difficilmente imitabile di tener legato il suo pubblico giovanile da un filo sottile e ineffabile che ora avresti detto affidato alla perfezione della logica e all'incanto della lingua, ora ad un più arcano potere, scaturente direttamente dal più primitivo (ma qui egualmente calcolato) e insopprimibile sbigottimento dell'uomo al cospetto della natura.

Egli sentì sempre più il valore di questo magistero, tanto che gli occorre via via più di frequente il soffermarsi anche su questioni generali, non direttamente attinenti alla disciplina che insegnava. Egli si accorse sempre più che dentro il laboratorio, tra gli allievi, e fuori, nell'aula gremita di giovani, il suo insegnamento non era solo nella testimonianza scientifica, ma più integralmente nella sua opera di cittadino, nel suo esempio di vita. La tremenda esperienza dell'ultima guerra aveva in verità colpito e approfondito la sua coscienza; ma egli molto raramente lasciò esplicitamente intendere questa sua nuova consapevolezza, del dilatarsi dei suoi compiti di maestro. Soltanto lo vedemmo più sollecito, lo sentimmo più vicino, intuimmo quanta più trepidazione entrasse nell'animo suo per le sorti del nostro Paese e per le partecolari nostre, di noi suoi allievi,

Di questo suo esempio civile, pudico e discreto, della sua sempre vigile liberalità noi gli siamo e gli saremo sempre debitori, come dell'insegnamento più duraturo e più formativo.

Ebbe una scuola di giovani di varia tendenza e con diversi interessi, così che non tutti seguirono la stessa disciplina, ed anzi egli stesso favoriva il sorgere e l'affermarsi di nuovi orientamenti, sollecitati che fossero o dalle crescenti difficoltà della vita universitaria o dal naturale evolversi degli interessi scientifici; solo due dei suoi principali allievi ricoprono oggi una cattedra di Patologia generale; altri passarono ad altre discipline e qui raggiunsero o stanno per raggiungere gli onori accademici o comunque le posizioni da essi desiderate.

Fu Presidente del Comitato per la Biologia e Medicina del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Direttore del Centro per lo studio della Fisiopatologia, ora trasferito a Modena. In queste sue qualità egli ha dato il suo contributo alla riorganizzazione della ricerca scientifica italiana.

Ma l'onore che egli, pur raramente dicendolo, considerò di altissimo grado fu l'appartenenza a questa illustre Accademia.

L'Accademia ha perduto con lui un suo Socio, modesto, potremmo dire, ma di quella modestia che amiamo, poichè è sopra a tutto intelligente consapevolezza dei propri limiti umani.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Collega Aloisi che commemora il compianto Socio Guido Vernoni.

Il prof. Giordani ringrazia il Socio Aloisi per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del prof. Vernoni, presenti alla commemorazione, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per l'imatura scomparsa dell'illustre scienziato e carissimo Amico.

Il Presidente rivolge, certo di interpretare gli unanimi sentimenti dei Colleghi, un cordialissimo saluto al Socio Lombardi che, intervenendo alla presente adunanza, nonostante le sue condizioni di salute, ha voluto ancora una volta dare prova del suo affetto verso l'Accademia e i Colleghi.

## PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta i seguenti plichi suggellati:

Sig. Giuseppe Coccozza - plico pervenuto all'Accademia il 17 dicembre 1956.

Sig. Gioacchino Romeo - plico contenente, come indicato nella lettera di accompagnamento, un progetto di nave spaziale - pervenuto all'Accademia il 3 gennaio 1957.



La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i plichi di cui trattasi siano trasmessi all'archivio accademico a disposizione degli interessati.

Il prof. Giordani comunica quindi che il dott. Maurizio Mariotti, del quale è stato presentato un plico suggellato nella seduta del 10 novembre 1956, ha chiesto, con lettera in data 5 gennaio c. a., che la Classe proceda all'apertura di detto plico, in modo da prendere atto del contenuto e di farne argomento di discussione e commento. La Cancelleria ha provveduto ad informare il richiedente che la Classe, in conformità della prassi accademica, si limita, in sede di apertura di plichi suggellati, ad esercitare funzioni di attestazione, constatando cioè che in un singolo plico è contenuto un determinato lavoro, senza però dare sul lavoro stesso alcun giudizio di merito e che pertanto il plico del dott. Mariotti potrebbe essere aperto soltanto alle condizioni sopra citate. Poiché il dott. Mariotti, con lettera in data 10 gennaio c. a., ha dichiarato di aver preso atto di quanto comunicatogli dalla Cancelleria e di non avere nulla in contrario all'apertura del plico secondo la normale prassi dell'Accademia, il Presidente, assistito dai Soci Puntoni e Rossi-Fanelli, procede all'apertura del plico stesso e incarica i due suddetti Soci di esaminarne, seduta stante, il contenuto e di predisporre quindi una attestazione al riguardo.

I Soci Puntoni e Rossi-Fanelli redigono il seguente verbale che viene approvato e passato agli atti:

« I sottoscritti proff. Vittorio Puntoni e Alessandro Rossi-Fanelli, incaricati dal Presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali di esaminare il contenuto del plico suggellato del dott. Maurizio Mariotti, aperto su richiesta dell'interessato, nella seduta di Classe del 12 gennaio 1957, dichiarano di aver constatato che il suddetto plico conteneva:

a) Un estratto a stampa dal n. 5 dell'Economia Umana, settembre-ottobre 1951, anno 2°, dal titolo « Il terreno ormonico nel determinismo della infezione tetanica - dott. Maurizio Mariotti ». Tale estratto è formato da un frontespizio con il titolo e da sei facciate a stampa.

b) Un dattiloscritto di 15 pagine dal titolo: « Parte prima - Dott. Maurizio Mariotti - Ancona - Contributo allo studio teoretico della glandola adiposa insulare cervicale di Pende - o colesterina, o del letargo invernale - in rapporto all'oncogenesi ».

c) Un dattiloscritto di una pagina, divisa in due parti, denominate rispettivamente: « Riassunto » e « Bibliografia ». Nel riassunto è scritto, in lingua italiana, francese e inglese, quanto segue: « L'Autore, prendendo le mosse dal primitivo lavoro dei sigg. professori C. Serone e Montezemolo, apporta il proprio contributo all'impiego del miele in terapia umana e particolarmente nella terapia estrogena. Precede una breve nota storica medica ».

d) Un dattiloscritto di due pagine, dal seguente titolo: « Ipotesi di lavoro per l'eziopatogenesi del cancro - Comunicazione dei dottori Lorenzini Riccardo - Macerata - e Mariotti Maurizio - Ancona ».



I sottoscritti dichiarano di aver contrassegnato con la loro firma ogni pagina dei sopra citati studi, sia a stampa che dattiloscritta.

F.to: Prof. VITTORIO PUNTONI

Prof. ALESSANDRO ROSSI-FANELLI

Roma, 12 gennaio 1957.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Giordani è lieto di presentare il 1° dei due volumi degli Atti del Covegno di Venezia su « I modelli della tecnica », svoltosi dal 1° al 4 ottobre 1955, d'intesa con la Società Adriatica di Elettricità, nella ricorrenza del cinquantenario della sua fondazione. Si tratta di un grosso volume di 698 pagine che ha richiesto un lungo e difficile lavoro e che fa veramente onore all'Accademia. È giusto quindi rivolgere una lode all'Ufficio Segreteria e all'Ufficio Redazione Atti che hanno curato l'opera con la massima diligenza. Il 2° volume uscirà tra pochi giorni.

Il Socio Sansone presenta all'Accademia le parti 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> del vol. IV delle Opere di Luigi Bianchi: « Deformazioni delle quadriche - Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche », edite a cura della Unione Matematica Italiana.

Il volume è preceduto da una vivace Introduzione di Renato Calapso, nella quale sono ricordate le scoperte di L. Bianchi, di Pasquale Calapso, di G. Darboux, di C. Guichard, i quali nel periodo di un trentennio, realizzarono la costruzione di una teoria geometrica delle superficie applicabili sulle quadriche.

Dominano questa teoria i metodi di trasformazione del Bianchi fondati sull'impiego delle congruenze rettilinee  $W$ , le cui falde focali sono applicabili su una medesima quadrica e così pure il suo famoso teorema di permutabilità. Con questi mezzi - Egli dice nel 1914 - la teoria delle superficie applicabili sulle quadriche generali, collegata all'equazione dell'applicabilità, che è un'equazione alle derivate parziali del 2° ordine del tipo di Ampère, « ha acquistato ormai un assetto definitivo; essa fornisce invero l'estensione più naturale e completa della teoria delle superficie applicabili sulla sfera, reale o immaginaria, e delle loro trasformazioni ».

Se per un momento ci si ferma alle superficie applicabili sul paraboloide rotondo, reale o immaginario, e si osserva che la teoria fornisce tutte le deformate del paraboloide, non si può fare a meno di ammirare la potenza dei metodi geometrici che, venendo spesso in soccorso dell'analisi, fanno pervenire a risultati che appagano lo spirito matematico per la profondità e l'armonia del loro contenuto.

L'U.M.I. esprime ancora una volta il suo vivo grazie al C.N.R. che ha incoraggiato, anche con aiuti finanziari, le edizioni nazionali dei grandi matematici italiani, e all'editore Paolo Cremonese che con vero entusiasmo seconda tutte le iniziative editoriali dell'U.M.I.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Picone riferisce sulle celebrazioni picardiane tenute all'Università di Parigi nello scorso novembre, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di informare la Classe che l'Università di Parigi ha celebrato, lo scorso novembre, con solenni cerimonie, il centenario della nascita del grande matematico Emile Picard, che fu Accademico di Francia, grande amico dell'Italia e della Scienza italiana, membro straniero della nostra Accademia durante più della metà della sua lunga vita operosa. Io ho partecipato a dette cerimonie in rappresentanza del nostro Istituto, che fu invitato a farsi rappresentare. Vi farà piacere apprendere che l'intervento dell'Accademia dei Lincei è stato accolto con grande soddisfazione, ripetutamente manifestata, e che essa è stata sempre considerata in primissima linea in tutte le cerimonie ».

Il Presidente ricorda che, nella seduta segreta di questa mattina, il Socio Perucca ha comunicato di avere indetto, d'intesa con il Collega Tonzig, un referendum tra i Soci Nazionali circa l'opportunità o meno di far precedere le Note e le Memorie accademiche da riassunti in lingue straniere e ha chiesto al Presidente della Classe di interessare la Presidenza dell'Accademia perchè la complessa questione sia riportata all'esame delle Classi riunite.

Il Presidente, riconfermando quanto ha già avuto occasione di dire nella predetta seduta antimeridiana, è convinto dell'opportunità che la Classe si occupi preliminarmente del problema in una delle sue sedute, in modo da poter arrivare alla discussione nell'adunanza a Classi riunite con idee chiare e possibilmente uniformi.

Invita pertanto il Socio Perucca a prendere la parola.

Il Socio Perucca informa i Colleghi che, dopo la discussione a Classi riunite del 10 novembre 1956 in merito ai riassunti, conclusasi con un rinvio, egli, insieme al prof. Tonzig, ha inviato, a tutti i Soci Nazionali delle due Classi, una lettera-circolare, invitandoli a pronunciarsi in un senso o nell'altro sulla dibattuta questione dei sommari in lingue straniere.

Sono pervenute fino ad oggi soltanto 25 risposte, gran parte delle quali favorevoli all'introduzione dei riassunti ma non concordi circa le modalità necessarie per la realizzazione pratica di tale iniziativa. Naturalmente, tale referendum non può essere considerato determinante, sia per il suo carattere non ufficiale sia per lo scarso numero delle risposte rispetto a quello dei Soci interpellati.

Dopo ampia discussione, alla quale partecipano i Soci Cassinis, Signorini, Cotronei, Abetti, Sansone, Onorato, Perucca, Tonzig, Polvani e Califano, il Presidente, riassumendo la discussione stessa, constata che vi è, per ora, concordanza di opinioni soltanto circa l'opportunità di fare precedere le Note da riassunti in lingua italiana, così come già si usa per le Memorie, e

assicura che provvederà ad informare la Presidenza dell'Accademia dell'orientamento della Classe, in modo che la questione possa essere portata a una prossima seduta a Classi riunite.

### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Pupilli, Quilico, Cotronei, Picone, Rossi-Fanelli e Montalenti.

Viene letto l'elenco delle Note pervenuto alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

DINCULEANU N. - Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionnelles linéaires continues. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

FORTINI T. e CAPRIOLI G. - Variazioni dal centro al lembo del Sole del tripletto del magnesio  $\lambda$  5167,3 -  $\lambda$  5172,7 -  $\lambda$  5183,6. Nota I (pres. dal Socio G. ARMELLINI),

GIANNUZZI M. A. - Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili all'eclisse. Nota II (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

## OPERE PERVENUTE ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 12 gennaio 1957*

- BIANCHI Luigi. — *Opere*. Vol. IV, p. I e II. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma, Cremonese, 1956. Voll. 2, in-8°.
- BUWALDA John P. — Vedi: GUTENBERG Beno, BUWALDA John P. and SHARP Robert P.
- GUTENBERG Beno. — *The energy of earthquakes*. Estr. da «Quarterly Journal of the Geological Society of London», vol. CXII, 1956.
- *Neue Ergebnisse über den Aufbau der Erde*. Estr. da «Geologische Rundschau», vol. XLV, 1956, fasc. 2.
- *Untersuchungen zur Bodenunruhe in Südkalifornien*. Estr. da «Zeitschrift für Geophysik», a. XXI, n. 4-5.
- GUTENBERG Beno, BUWALDA John P. and SHARP Robert P. — *Seismic explorations on the floor of Yosemite Valley, California*. Estr. da «Bulletin of the Geological Society of America», vol. LXVII, 1956.
- HOLODNYJ N. G. — *Železobakterii*. Moskva, Akademija Nauk SSSR, Institut Mikrobiologii, 1953. Pp. 224, in-8°, con figg.
- KINKEL Arthur R. — *Geology of the Botolan copper mine, Botolan, Zambales*. Manila, Republic of the Philippines, Bureau of Mines, 1956. Pp. 12, in-8°, con tavv. (Special Projects Series, 10).
- KINKEL Arthur R. and SAMANIEGO S. — *Geology of the copper deposits of the Hixbar Gold Mines, inc. Rapu Rapu Island, Albay*. Manila, Republic of the Philippines, Bureau of Mines, 1956. Pp. 23, in-8°, con tavv. (Special Projects Series, 9).
- LOMNITZ C. — *Creep measurements in igneous rocks*. Estr. da «The Journal of Geology», vol. LXIV, 1956, n. 5.
- MATVEEVA E. P. — *Senokosy i pastbišča i mery ih ulučšenija* (Iz materialov Kalininskogradskoj ekspedicii). Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, 1953. Pp. 110, in-8°, con figg. (Naučno-Populjarnaja Serija).
- Pavlovskie kliničeskie sredy*. T. I: 1931-1933; t. II: 1934. Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, Institut Fiziologii imeni I. P. Pavlova, 1954-55. Voll. 2, in-8°, con tavv.
- RUBCOV I. A. — *Vrediteli citrusovyh i ih estestvennye vragi*. Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, Vsesojuznoe Entomologičeskoe Obščestvo, 1954. Pp. 260, in-8°, con figg. (Naučno-Populjarnaja Serija, 2).
- SAMANIEGO S. — Vedi: KINKEL Arthur R. and SAMANIEGO S.
- SHARP Robert P. — Vedi: GUTENBERG Beno, BUWALDA John P. and SHARP Robert P.
- VERGARA Iosa F. — *Geology and coal resources of Semirara Island, Antique*. Manila, Republic of the Philippines, Bureau of Mines, 1956. Pp. 22, in-8° (Special Projects Series, 6).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Seduta del 9 febbraio 1957*

*Presiede il Socio anziano GIUSEPPE LEVI*

## NOTE DI SOCI

**Statistica matematica.** — *L'equazione canonica della funzione logistica.* Nota I<sup>(\*)</sup> del Socio LUIGI AMOROSO.

1. Col termine di *ciclo di espansione demografica*, intendo il movimento di una determinata popolazione, vivente in un determinato territorio, che in un determinato intervallo di tempo, compreso tra l'istante  $t_0$  e l'istante  $t_1$ , successivo a  $t_0$ , può essere rappresentato da una equazione (*logistica*) della forma

$$(1) \quad N = a + \frac{b}{1 + cr^t}$$

nella quale  $t$  rappresenta il tempo,  $N$  la popolazione al tempo  $t$ ;  $a, b, c, r$  sono parametri indipendenti da  $t$ , vincolati alle condizioni

$$(2) \quad a > 0, b > 0, c > 0, 1 > r > 0.$$

Quasi tutte le popolazioni, che nel corso del novecento vivevano negli Stati dell'Europa occidentale, nelle due Americhe, nell'India, nell'Indonesia, nel Giappone sono suscettibili della rappresentazione indicata, come risulta dall'opera classica del Pearl<sup>(1)</sup>, onde può dirsi che la formula (1) rappresenti nei limiti di spazio e di tempo indicati, *la legge normale dello sviluppo demografico*, i parametri  $a, b, c, r$  rappresentando l'elemento variabile, caratteristico di ciascuna.

(\*) Presentata nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) R. PEARL, *Studies in Human Biology*, Baltimora 1924, William Wilkins Company. I capitoli XXIV e XXV, che contengono la elaborazione matematica sono stati scritti in collaborazione con L.J. REED.

L'analisi contenuta nell'opera citata dimostrava che per alcuni dei territori indicati, la rappresentazione poteva essere estesa ad un periodo più o meno lungo anteriore al 1800 ed analisi più recenti hanno dimostrato che essa può essere estesa oltre il 1900, per tutta la metà del secolo presente. Come esempio, indico qui la rappresentazione che io stesso ho costruito per la popolazione italiana, *quale risultava vivente negli attuali confini dello Stato*, nel corso degli ultimi duecento anni (1751-1951). Essa sarà presentata in uno studio in corso di pubblicazione in un volume che sarà prossimamente pubblicato in onore di Corrado Gini. I relativi parametri hanno i valori

$$(3) \quad \begin{array}{ll} a = 11.839 & b = 89.893 \\ c = 18.90040 & r = 0.436955 \end{array}$$

nella convenzione che la popolazione  $N$  sia valutata in migliaia di anime e sia assunta come origine del tempo la data del 31-12-1771, come unità di misura del tempo un intervallo di 60 anni. Su queste basi la (1), dà luogo ai valori di cui alla Tabella I, nella quale i simboli  $\Delta N$ ,  $\Delta_2 N$  indicano rispettivamente  $\Delta N(t) = N(t) - N(t-1)$ ,  $\Delta_2 N(t) = \Delta N(t) - \Delta N(t-1)$ .

TABELLA I.

*Ricostruzione della popolazione italiana residente negli attuali confini dello Stato dal 1751 al 1951.*

Data	$t$	In migliaia di anime			Data	$t$	In migliaia di anime		
		N	$\Delta N$	$\Delta_2 N$			N	$\Delta N$	$\Delta_2 N$
1751	— 2 : 6	15.309			1861	+ 9 : 6	25.756	1547	148
1761	— 1 : 6	15.799	490		1871	+ 10 : 6	27.458	1702	155
1771	0	16.356	557	67	1881	+ 11 : 6	29.319	1861	159
1781	+ 1 : 6	16.986	630	73	1891	+ 2	31.343	2024	163
1791	+ 2 : 6	17.698	712	82	1901	+ 13 : 6	33.533	2190	166
1801	+ 3 : 6	18.501	803	91	1911	+ 14 : 6	35.885	2352	162
1811	+ 4 : 6	19.403	902	99	1921	+ 15 : 6	38.392	2507	155
1821	+ 5 : 6	20.416	1013	111	1931	+ 16 : 6	41.044	2652	145
1831	+ 1	21.548	1132	119	1941	+ 17 : 6	43.828	2784	132
1841	+ 7 : 6	22.810	1262	130	1951	+ 3	46.724	2896	112
1851	+ 8 : 6	24.209	1399	137	1961	+ 19 : 6	49.712	2988	92
					1971	+ 20 : 6	52.764	3052	64

2. Il valore della rappresentazione sta nella stretta aderenza delle cifre calcolate a quelle osservate. La ricerca dei dati osservati è agevole per il periodo successivo alla formazione del Regno, dal 1861 in poi, è invece faticosa per il periodo precedente.

TABELLA II.

*Confronto fra i dati osservati ed i dati calcolati nel periodo 1771-1851.*

Data	<i>t</i>	T serie del Trava- glini (riferita ai confini del Re- gno dal 1866 al 1918) (1)	M = $\gamma T$ Serie T ripor- tata agli attuali confini della Repubblica $\gamma = 1.025$ (2)	N Serie calcolata (Tabella I) (3)	M — N scarti	
					+	—
1771	0	16.033	16.434	16.356	78	
1781	1 : 6	16.967	17.391	16.986	405	
1791	2 : 6	17.479	17.916	17.698	218	
1801	3 : 6	17.860	18.307	18.501		194
1811	4 : 6	18.257	18.713	19.403		690
1821	5 : 6	19.000	19.475	20.416		941
1831	1	21.089	21.616	21.548	68	
1848	7 : 6	22.355	22.914	22.810	104	
1851	8 : 6	24.162	24.766	24.209	557	
		173.202	177.532	177.927	1430	1825
				177.532		1430
				395		395

Come ricorda il collega Travaglini <sup>(2)</sup>, il primo che in questa materia eseguì una indagine sistematica fu Pietro Castiglione, autore della *Introduzione storica*, preposta alla *Relazione sul censimento degli Stati Sardi nel 1858*, pubblicata nel 1862. In essa per la prima volta fu raccolto e coordinato tutto il materiale statistico disperso negli archivi, negli uffici, nelle pubblicazioni statistiche dei diversi Stati, in cui allora era divisa la penisola. Da questa *Relazione* fu ricavata la serie statistica, che apparve nell'«*Annuario Statistico Italiano*» nel 1878, riprodotta negli *Annuari* del 1881, 1884, 1886. Questa

(2) V. TRAVAGLINI, *La popolazione italiana nel secolo anteriore alla unificazione del Regno* (Cedam, Padova 1931).



serie costituì la base, su cui furono inquadrare tutte le indagini successive, fra cui la più rilevante è quella dello stesso Travaglini, contenuta nell'opera sopra citata, nella quale, attraverso una paziente ed intelligente ricostruzione, è presentata la serie, di cui alla colonna (1) della Tabella II. Si riferisce al territorio dello Stato, quale era al 1914, e da essa è stata qui ricavata la serie di cui alla colonna (2) della Tabella II, che si riferisce ai confini *attuali* dello Stato ed è ottenuta accrescendo i singoli termini della serie del Travaglini in ragione del 2,50 %, che a tanto può valutarsi l'aumento della percentuale della popolazione dovuto all'allargamento dei confini (Trentino, Alto Adige, Trieste).

La somma dei valori assoluti degli scarti è 3.255 ed il suo rapporto alla somma delle cifre osservate 177.532 è 0.01833, il che equivale a dire che la approssimazione del calcolo alle osservazioni è in percentuale superiore al 98 %.

Più approssimato risulta il confronto per il periodo successivo (1861-1951), in cui più sicuri sono i dati, che poggiano sulla base dei censimenti e delle elaborazioni eseguite dall'Istituto Centrale di Statistica. Assumiamo qui le cifre contenute nell'« Annuario Statistico Italiano » del 1955, Tabella 432 p. 369, relative alla popolazione presente negli attuali confini dello Stato.

Ne risulta così la seguente

TABELLA III.

*Confronto fra i dati osservati ed i dati calcolati nel periodo 1861-1951.*

Data	t	Valori		Scarti M — N	
		Osservati	Calcolati	+	—
		M	N		
31 dicembre 1861 . .	9 : 6	25.756	25.756		
31 dicembre 1871 . .	10 : 6	27.578	27.458	120	
31 dicembre 1881 . .	11 : 6	29.278	29.319		41
31 dicembre 1891 . .	2	31.421	31.343	78	
31 dicembre 1901 . .	13 : 6	33.513	33.533		20
31 dicembre 1911 . .	14 : 6	35.905	35.885	20	
31 dicembre 1921 . .	15 : 6	37.452	38.392		940
31 dicembre 1931 . .	16 : 6	40.814	41.044		230
31 dicembre 1941 . .	17 : 6	44.357	43.828	529	
31 dicembre 1951 . .	3	47.208	46.724	484	
		353.282	353.282	1231	1231

La somma dei valori assoluti degli scarti è 2462 ed il suo rapporto alle somme delle cifre osservate 353.282 è 0.00697, cioè pari al 6,97 per mille, e quindi corrisponde ad una approssimazione superiore al 99 %.

Questa stretta aderenza acquista maggior rilievo per il fatto che tutte le cifre corrispondenti al periodo totale di due secoli (1751-1951) sono collegate dalla equazione logistica sopra indicata dalle formule (1) e (3) e prova che questa equazione fornisce una eccellente sintesi del passato, in un ciclo di espansione demografica, anche oltre i limiti di tempo, che si rilevano dalla opera classica del Pearl. In particolare per ciò che si riferisce alla popolazione italiana, la rappresentazione in parola, può essere estesa nel corso dei due secoli dal 1751 al 1951.

### 3. Eseguendo la trasformazione

$$N = a + bP \quad \text{cr}^t = e^{-T}$$

la equazione (1) diventa

$$(4) \quad P = \frac{1}{1 + e^{-T}}$$

che è la equazione *canonica* dello sviluppo della popolazione in un ciclo di *espansione demografica*. È un *invariante assoluto*, in cui i valori di  $T$  e di  $P$  costituiscono la *scala naturale (assoluta)* dello sviluppo demografico, mentre per antitesi quelli di  $t$  e di  $N$  ne costituiscono la *scala empirica*. E poiché la corrispondenza rappresentata dalla (4) è biunivoca, ne consegue che la popolazione vivente in un determinato territorio, in un ciclo di espansione demografica, è rappresentata *in ogni istante* da un punto sulla curva (*canonica*), espressa dalla equazione canonica. La scala naturale indica in ogni istante la posizione di questo punto e dimostra che nella successione indefinita dei tempi (da  $T = -\infty$  a  $T = +\infty$ ) il valore di  $P$  varia sempre crescendo, da 0 ad 1. Le due rette  $P = 0$ ,  $P = 1$  rappresentano nella scala naturale due asintoti della curva canonica, corrispondenti il primo al verso negativo del tempo, il secondo al verso positivo. Gli asintoti nella scala empirica sono  $N = a$ ,  $N = a + b$ ; e questi valori di  $N$  rappresentano rispettivamente il minimo ed il massimo della popolazione nel ciclo considerato, quando esso è *formalmente* inserito nella successione indefinita del tempo, a norma della equazione canonica. Ne deriva che, se la rappresentazione empirica è limitata all'intervallo che corre da un istante iniziale  $t_0$  ad un istante finale  $t_1$ , il valore di  $N$  per  $t = t_0$  è sempre superiore ad  $a$ , mentre quello di  $N$  per  $t = t_1$ , è sempre inferiore ad  $a + b$ . Ciò risulta del resto direttamente dalla formula (1), quando si tengano presenti i vincoli imposti ai parametri dalle disuguaglianze (2).

### 4. Dalla (4) risulta

$$(5) \quad \frac{dP}{dT} = P(1 - P) \quad , \quad \frac{d^2P}{dT^2} = (1 - 2P) \frac{dP}{dT}$$

La formula a sinistra esprime la *velocità* con cui il punto rappresentativo si muove sulla curva canonica; la formula a destra la corrispondente *accelerazione*.

Per valori finiti di  $T$ , la velocità è sempre positiva. Gli zeri in  $P = 0$  e  $P = 1$  corrispondono ai valori asintotici  $T = \mp \infty$ ; l'accelerazione invece è positiva per  $T < 0$ , negativa per  $T > 0$ , annullandosi per  $T = 0$ , che è un punto di flesso per la curva canonica. La (4) dimostra che ivi (cioè nel punto  $T = 0$ ) la popolazione assume il valore *medio*  $P = 1/2$ , mentre la velocità assume il valore *massimo*  $(dP/dT) = (1/4)$ . Nell'intervallo in cui è positiva ( $T < 0$ ), l'accelerazione passa attraverso un massimo, nell'intervallo in cui è negativa ( $T > 0$ ) passa attraverso un minimo ed i valori massimo e minimo si ottengono uguagliando a zero la derivata terza di  $P$  rispetto a  $T$  e sono pertanto rappresentati dalla equazione

$$P^2 - P + \frac{1}{6} = 0$$

che fornisce le radici

$$P = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{6} = 0.50 \mp 0.2887 = \begin{cases} 0.2113 \\ 0.7887 \end{cases}$$

cui corrispondono i valori

$$T = -\log \text{nat} \frac{1-P}{P} = \mp 1.3169.$$

In una seconda Nota rappresentiamo in base alle formule (4) e (5) i valori di  $P$  e delle sue due prime derivate rispetto a  $T$ , che rappresentano rispettivamente la velocità e l'accelerazione del movimento nel punto rappresentativo sulla curva canonica e vedremo in una Nota successiva quali conseguenze possano dedursi dalle considerazioni finora svolte.

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili.*  
Nota II (\*) del Socio GUSTAVO COLONNETTI.

Ho terminata la precedente mia Nota su l'argomento <sup>(1)</sup> colla previsione che, in una eventuale teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili, i teoremi su gli stati di coazione avrebbero trovato un nuovo campo di utili ed importanti applicazioni.

Facile previsione, di cui vorrei tuttavia offrire subito una conferma accennando alla possibile utilizzazione, nel calcolo delle pareti sottili, del principio di reciprocità.

È noto che questo principio, nella sua accezione più generale <sup>(2)</sup>, comprende come casi particolari, oltre al classico teorema di Betti,

(\*) Presentata nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXII, fasc. 1, pp. 3-5.

(2) G. COLONNETTI, *L'équilibre des corps déformables*, Dunod, Paris, p. 20 (1955).

*il secondo principio di reciprocità*, che mette in relazione uno stato di deformazione elastica con uno stato di coazione,

ed *un noto teorema di Volterra*, che stabilisce la reciprocità tra due diversi stati di coazione.

Essi si possono notoriamente enunciare così:

*L'integrale (esteso a tutto il corpo) della somma dei prodotti delle singole componenti di una deformazione impressa per le corrispondenti componenti speciali di tensione dovute ad un sistema qualunque di forze esterne, è eguale al lavoro che queste forze esterne eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella deformazione impressa dà origine* <sup>(3)</sup>.

*L'integrale (esteso a tutto il corpo) della somma dei prodotti delle singole componenti di una deformazione impressa per le corrispondenti componenti speciali di tensione dovute ad un'altra deformazione impressa, è eguale all'analogo integrale della somma dei prodotti delle componenti della seconda deformazione impressa per le corrispondenti componenti speciali di tensione dovute alla prima* <sup>(4)</sup>.

Se si fa ricorso al solito artificio di utilizzare uno stato di coazione come semplice strumento di analisi, precisandolo in una distorsione di Volterra impressa in corrispondenza di una data sezione, uno dei membri dell'equazione si riduce subito alla somma dei prodotti delle sei caratteristiche del sistema di tensioni che (in corrispondenza della stessa sezione) si verifica nell'altro stato di equilibrio considerato, per le corrispondenti caratteristiche della distorsione impressa (mutate di segno).

Si è così condotti ad affermare:

1° *che ciascuna delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne che, in un corpo elastico in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne, si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dallo stesso numero che misura il lavoro che le forze esterne applicate al corpo eseguirebbero qualora su questo si operasse la corrispondente distorsione unitaria negativa* <sup>(5)</sup>;

2° *che ciascuna delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne che, in un corpo in stato di coazione per la presenza di un dato sistema di deformazioni impresse, si sviluppano in corrispondenza di una data sezione, è misurata dalla somma dei prodotti delle componenti della deformazione impressa per le omologhe componenti delle tensioni interne determinate dalla corrispondente distorsione unitaria negativa.*

Immaginiamò ora di applicare siffatti procedimenti al caso concreto di una parete sottile – o membrana – di forma affatto qualunque.

(3) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, Einaudi, Torino, p. 428 (1953).

(4) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, Einaudi, Torino, p. 430 (1953).

(5) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, vol. I, Einaudi, Torino, p. 386 (1953).



Immaginiamo cioè di tracciare una sezione arbitraria e di operare in corrispondenza ad essa una distorsione unitaria negativa, praticando lungo la sezione un taglio ideale ed imprimendo alle due faccie del taglio i necessari spostamenti relativi, di traslazione secondo una data direzione, o di rotazione attorno ad un dato asse.

L'operazione, tradotta in termini analitici, presenterebbe tutte le difficoltà che noi conosciamo, e non potrebbe evidentemente essere portata a buon fine se non in pochi casi estremamente particolari.

Ma essa è invece facilmente realizzabile, anche nei casi più generali, se si opera su modelli; sui quali, con adatti strumenti di misura, noi potremo sempre procedere al rilevamento sperimentale, sia degli spostamenti che si verificano nei punti in cui possono venir applicate le forze esterne, sia delle tensioni che si manifestano nei punti in cui possono venire impresse le deformazioni non elastiche.

Ed è chiaro che l'insieme degli spostamenti a cui si è testé accennato potrà senz'altro assumersi a *diagramma di influenza* della caratteristica (componente secondo la data direzione, o momento rispetto al dato asse) del sistema di tensioni interne determinate nella sezione considerata dalle forze esterne applicate.

Mentre l'insieme delle tensioni interne a cui si è in seguito accennato, potrà alla sua volta assumersi a *diagramma di influenza* della stessa caratteristica del sistema di tensioni interne determinate nella sezione considerata dalle deformazioni impresse.

È appena il caso di aggiungere che, ogniqualvolta la sezione venga fatta coincidere con una porzione del contorno, si otterranno per questa via i *diagrammi di influenza delle componenti, o dei momenti, delle reazioni dei vincoli* a cui quella porzione del contorno è soggetta.

Il problema è dunque risolto, non soltanto nell'ambito ristretto della teoria classica dell'elasticità, ma anche nel ben più vasto campo degli equilibri elasto-plastici.

E sembra lecito pensare che una sperimentazione sistematica su modelli - orientata come si è detto, e condotta con tutte le cautele e con tutte le risorse che la moderna tecnica suggerisce - darebbe un immediato e provvido impulso ad un razionale impiego di quelle superfici a doppia curvatura, di cui sono ben note le caratteristiche di *resistenza per forma*, ma la cui utilizzazione è stata fin qui limitata e ritardata dalla carenza dei metodi di calcolo di cui disponiamo.

**Biochimica.** — *Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi.* Nota I. *Isolamento e cristallizzazione di un nuovo pigmento dai muscoli della Aplysia depilans e dell'Aplysia limacina* (\*). Nota di ALESSANDRO ROSSI-FANELLI e ERALDO ANTONINI, presentata (\*\*) dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

Le nostre conoscenze sui pigmenti respiratori nei vertebrati superiori e nei mammiferi terrestri in modo speciale, sono molto progredite; limitate, invece, sono le conoscenze su questi pigmenti in altre classi animali.

Che anche gli invertebrati marini inferiori potessero contenere nei muscoli un pigmento respiratorio era stato supposto da Ball e Meyerhof [1] i quali avevano osservato che nell'estratto acquoso di muscolo di Busycon era presente un pigmento con bande di assorbimento simili a quelle della mioglobina (Mb) e della emoglobina (Hb); per altro fin'ora non si era ancora riusciti ad isolare e purificare tale pigmento ed a studiarne le proprietà chimiche e biologiche. Nel quadro di ricerche di Biochimica comparata che andiamo eseguendo nel nostro Istituto [2], abbiamo iniziato lo studio dei pigmenti respiratori presenti in alcuni molluschi marini. Tra questi la nostra attenzione si è fermata sulla *Aplysia depilans* e *limacina*, molluschi molto diffusi nel nostro mare Mediterraneo, facilmente catturabili, e che si adattano bene a vivere in vasche di raccolta.

Siamo rimasti colpiti, nell'esaminare questi animali, dalla presenza di voluminose masse muscolari di colorito rosso che fanno parte del loro apparato boccale e digestivo.

Da tali masse muscolari siamo riusciti ad isolare e cristallizzare un pigmento che, per moltissime caratteristiche chimiche, chimico-fisiche e fisiologiche, rassomiglia alla Mb dei muscoli dei vertebrati superiori ed inferiori. Per la cristallizzazione del pigmento abbiamo proceduto nel modo seguente: le due masse sopra citate vengono rapidamente isolate ed asportate. La parte muscolare viene liberata da legamenti e da altri tessuti ed omogenata in *Waring Blendor* con un volume doppio di  $H_2O$  distillata a  $0^\circ$ . L'omogenato viene centrifugato a 4500 giri p. m. ed il liquido sopranatante limpido ed intensamente colorato in rosso, viene raccolto.

All'estratto acquoso limpido viene aggiunto solfato di ammonio in sostanza fino al 50% di saturazione; si agita e dopo 15-20' si centrifuga: il precipitato incolore viene scartato. Al liquido sopranatante si aggiunge ancora solfato di ammonio in sostanza fino al 60% di saturazione. Si forma un nuovo precipitato che si allontana per centrifugazione. Il liquido soprana-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma e nella Stazione Zoologica di Napoli.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

tante si porta ora cautamente al 65 % di saturazione; si forma un nuovo precipitato, che contiene anche piccole quantità di pigmento ma che si scarta. Il liquido soprannatante viene portato al 90 % di saturazione con solfato di ammonio: si forma un abbondante precipitato che contiene praticamente tutto il pigmento presente e che viene raccolto per centrifugazione a 4500 giri p. m.

Si aggiungono ora al precipitato 4-5 volumi di una soluzione di solfato di ammonio al 50 % di saturazione e si agita vigorosamente; gran parte del precipitato passa così in soluzione. Si centrifuga a 4500 giri p. m. per 20'; il liquido sovrastante limpido di colore rosso scuro viene posto a dializzare a 0° contro una soluzione di solfato di ammonio saturata a pH 7.

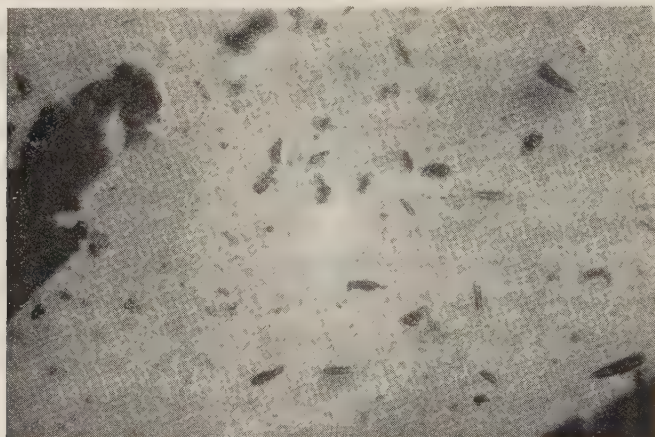


Fig. 1.

Dopo 24 ore la Mb cristallizza sotto forma di piccoli cristalli sferoidali birifrangenti. Per ottenere cristalli di maggiori dimensioni i piccoli cristalli così ottenuti vengono raccolti per centrifugazione, disciolti nel minor volume di acqua distillata e dializzati contro una soluzione di solfato di ammonio saturo a pH 7. Dopo 24-48 ore compaiono grossi cristalli rosso mattone a forma di tozzi bastoncelli come mostra la figura 1.

Per caratterizzare il pigmento così isolato, abbiamo eseguito una serie di ricerche chimiche e chimico-fisiche. Il comportamento elettroforetico e ricerche di ultracentrifugazione (all'ultracentrifuga Spinco) hanno dimostrato trattarsi di una proteina pura, omogenea con costante di sedimentazione (estrapolata a  $O_{S_{20}}^{\circ}$ ) =  $2.06 \times 10^{-13}$ . Da questo valore e da prove di diffusione è stato possibile calcolare il peso molecolare che è risultato di circa 20.000, valore questo molto vicino a quello ottenuto recentissimamente da Theorell per preparazione purissima ed omogenea di Mb di cavallo [3].

Un accurato studio spettrofotometrico nel visibile, nell'ultravioletto e nella regione di Soret dei composti col  $O_2$ , CO, e dei ferricomposti hanno di-



mostrato che questo pigmento si avvicina per molte proprietà alla Mb dei mammiferi, pur avendo per alcuni aspetti un comportamento spettrofotometrico caratteristico.

Infine prove di scissione del pigmento in gruppo prostetico e gruppo proteico e di resintesi con emi ottenuti dalla Mb e dalla Hb (umana e di cavallo), hanno dimostrato che esso possiede lo stesso gruppo prostetico il protoferroemo (ferroprotoporfirina IX).

Ci sembrano particolarmente interessanti questi risultati anche in vista del fatto che questi animali hanno un sistema circolatorio molto rudimentale contenente un liquido nel quale non c'è né emoglobina, né emocianina.

Sono in corso ricerche sulla cinetica della resintesi e su altre proprietà chimiche e chimico-fisiche di questo pigmento.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. G. BALL, B. MEYERHOF, « J. Biol. Chem. », 134, 483 (1940).
- [2] A. ROSSI-FANELLI, E. ANTONINI, F. TRASARTI, « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XX, p. 737 (1956).
- [3] H. THEORELL e A. AKESON, « Annales Academiae Scientiarum Fennicae », 60, 303 (1955).

#### NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi funzionale.** — *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs.*

Nota I di NICOLAE DINULEANU, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

1. Soit  $Z$  un espace localement compact et  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $Z$ . Soit  $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$  une famille d'espaces de Banach, et  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  l'ensemble des champs de vecteurs  $x(z)$  définis sur  $Z$ , tels que  $x(z) \in E(z)$  quel que soit  $z \in Z$ . Supposons qu'il existe une famille fondamentale  $([2, b], p. 80)$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$  de champs de vecteurs continus. R. Godement [2] a introduit les espaces  $\mathcal{L}_q^p$  des champs de vecteurs de puissance  $p$ -sommable (1). D'autre côté Orlicz [10, a] a introduit les espaces  $\mathcal{L}^\Phi$  qui portent son nom et dont les éléments sont des fonctions numériques définies sur l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Divers auteurs ([4]–[7], [9]–[14]) ont ensuite étudié cette catégorie d'espaces. Dans cette Note nous nous proposons d'étudier une catégorie d'espaces,  $\mathcal{L}_q^\Phi$ , de champs de vecteurs définis sur  $Z$ , qui contiennent à la fois les espaces  $\mathcal{L}_q^p$  et  $\mathcal{L}^\Phi$ . Dans une Note suivante dont la présente n'est qu'une introduction, nous allons établir la forme des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{L}_q^\Phi$ .

(\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) Voir aussi [3] et [8].



2. Soit  $\Phi(u)$  une fonction numérique positive (finie ou infinie) définie sur  $[0, \infty]$ , croissante, continue à gauche, telle que  $\lim_{u \rightarrow 0} \Phi(u) = 0$  et  $\lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty$ ; il en résulte que  $\Phi(0) = 0$ .

DÉFINITION 1. - On dit qu'un champ de vecteurs mesurable  $\mathbf{x}$  est  $\Phi$ -sommable si la fonction  $\Phi(|\mathbf{x}(z)|)$  est intégrable<sup>(2)</sup>. On désigne par  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\Phi$ -sommables, et par  $|\mathbf{x}|_{\Phi}$  l'intégrale  $\int \Phi(|\mathbf{x}(z)|) d\mu(z)$ .

Dans la suite de ce paragraphe on supposera que:

(\*) Il existe une constante  $M > 1$  telle que  $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ , ( $u \geq 0$ ). Dans ce cas: (1)  $0 < \Phi(u) < \infty$  si  $0 < u < \infty$ ; (2)  $\Phi(u+v) \leq M(\Phi(u) + \Phi(v))$ ; (3)  $\Phi(|\alpha|u) \leq M^n \Phi(u)$ , si  $\alpha$  est un nombre tel que  $|\alpha| \leq 2^n$ ; (4)  $\Phi(\sum_{i=1}^{\infty} a_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M^n \Phi(a_i)$  pour toute suite  $(a_i)$  de nombres  $\geq 0$ .

Des propriétés (2) et (3) on déduit respectivement:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|_{\Phi} \leq M(|\mathbf{x}|_{\Phi} + |\mathbf{y}|_{\Phi}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}),$$

et

$$|\alpha \mathbf{x}|_{\Phi} \leq M^n |\mathbf{x}|_{\Phi}, \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}, |\alpha| \leq 2^n),$$

donc  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$  est un espace vectoriel.

Pour tout entier  $n > 0$ , soit  $V_n = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}|_{\Phi} \leq 1/n\}$ . On constate facilement que la famille  $(V_n)$  est un système fondamental de voisinages de l'origine dans une topologie sur  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$  compatible avec la structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$ . Des propriétés de la fonction  $\Phi$  on déduit encore que (i)  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$  est complet (la démonstration repose sur l'inégalité (4)); (ii) l'ensemble des champs de vecteurs bornés  $\Phi$ -sommables est dense dans  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$ ; (iii) l'adhérence de l'origine, c'est-à-dire l'ensemble  $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}|_{\Phi} = 0\}$ , est formé des champs de vecteurs négligeables. Remarquons encore que  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}$  ayant un système fondamental de voisinages dénombrable, l'espace séparé associé  $\mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi} = \mathcal{O}_{\Phi}^{\Phi}/\mathcal{N}$  est métrisable.

3. Considérons la famille  $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$ , où pour chaque  $z$ ,  $E'(z)$  est le dual de  $E(z)$ , et désignons par  $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$  l'ensemble des champs de fonctionnelles  $\mathbf{x}'(z)$  définis sur  $Z$  tels que  $\mathbf{x}'(z) \in E'(z)$  quel que soit  $z \in Z$ . Supposons qu'il existe une famille fondamentale  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  telle que:

(\*\*) pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$  et pour tout  $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}'$ , la fonction scalaire  $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$  est continue.

Il s'ensuit que si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont continus au point  $z_0 \in Z$ ,  $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$  est continue en  $z_0$ , et que si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont mesurables  $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$  est mesurable.

Désignons par  $\mathcal{N}_{\Phi}^{\Phi}$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$  mesurables et par  $\mathcal{N}_{\Phi}^{\Phi}$  l'ensemble des champs  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_{\Phi}^{\Phi}$  tels que  $\{z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0\}$  est contenu dans la réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite d'ensemble compacts. (Définitions analogues pour les ensembles  $\mathcal{N}_{\Phi}^{\Phi}$  et  $\mathcal{N}_{\Phi}^{\Phi}$  formés de champs de fonctionnelles).

(2) Pour tout ce qui concerne l'intégration voir [1, b].

PROPOSITION 1. — Soit  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ . Pour tout nombre  $a$ , ( $0 < a < 1$ ) et pour toute suite d'ensemble compacts  $(K_n)$ , il existe  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$  tel que

$$a \|\mathbf{x}(z)\| \leq |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| \text{ et } a \leq \|\mathbf{x}'(z)\| \leq 2-a \text{ p.p. sur } \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

REMARQUE. — La proposition précédente est encore valable si l'on change  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  entre eux.

Soit  $\varphi$  une fonction numérique positive définie sur  $[0, \infty]$ , croissante, continue à gauche, vérifiant l'égalité  $\varphi(0) = 0$  et telle que  $0 < \varphi(t) < \infty$  quel que soit  $0 < t < \infty$ . Introduisons la fonction  $\psi$ , inverse de  $\varphi$ , définie sur  $[0, \infty]$  par:  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(s) = \sup \{t \mid \varphi(t) \leq s\}$  si  $s > 0$ . Considérons encore les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  définies sur  $[0, \infty]$  par les égalités:

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(s) ds, \quad \Psi(v) = \int_0^v \psi(s) ds;$$

$\Phi$  et  $\Psi$  sont complémentaires au sens de Young et par suite vérifient l'inégalité  $uv \leq \Phi(u) + \Psi(v)$ , avec égalité si et seulement si une au moins des relations  $v = \varphi(u)$ ,  $u = \psi(v)$  est vérifiée.

Pour tout champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathfrak{E})$  posons

$$\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = \sup_{|\mathbf{x}'|_{\Psi} \leq 1} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d\mu(z),$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\Psi} = \sup_{|\mathbf{x}'|_{\Phi} \leq 1} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d\mu(z);$$

pour tout champ de fonctionnelles  $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathfrak{E}')$  posons

$$\|\mathbf{x}'\|_{\Phi} = \sup_{|\mathbf{x}|_{\Psi} \leq 1} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d\mu(z),$$

$$\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = \sup_{|\mathbf{x}|_{\Phi} \leq 1} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d\mu(z).$$

DÉFINITION 2. — (1) On désigne par  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^{\circ}$  tels que  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} < \infty$ ; (2) On désigne par  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Psi}$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}^{\circ}$  tels que  $\|\mathbf{x}\|_{\Psi} < \infty$  si  $\Psi(v) > 0$  pour  $v > 0$ , respectivement l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$  tels que  $\|\mathbf{x}\|_{\Psi} < \infty$  si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$ . (On introduit d'une manière analogue les espaces  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Phi}$ , et  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$ , formés de champs de fonctionnelles).

Les espaces introduits ci-dessus généralisent certains espaces introduits par Orlicz [10, a]; ils seront appelés espaces d'Orlicz. Dans ce qui suit on énoncera quelques propriétés des espaces  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  et  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Psi}$ .

Par un raisonnement qui repose sur la proposition 1 on obtient:

$$\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = \sup \left\{ \int \|\mathbf{x}(z)\| \|\mathbf{x}'(z)\| d\mu(z) \mid \mathbf{x}' \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}'}^{\circ}, \|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \leq 1 \right\}$$

si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$  et

$$\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = \sup \left\{ \int \|\mathbf{x}(z)\| \|\mathbf{x}'(z)\| d\mu(z) \mid \|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leq 1 \right\}$$

si  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}'}$ . On a aussi  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = \sup_K \|\varphi_K \mathbf{x}\|_{\Phi}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}}$  et  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = \sup_K \|\varphi_K \mathbf{x}'\|_{\Psi}$  pour tout  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{A}'}$ , le sup. étant pris pour tous les ensembles compacts  $K \subset Z$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  et  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$ , la fonction scalaire  $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$  est sommable et on a

$$\int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d\mu(z) \leq \int \|\mathbf{x}(z)\| \|\mathbf{x}'(z)\| d\mu(z) \leq \|\mathbf{x}\|_{\Phi} \|\mathbf{x}'\|_{\Psi}.$$

PROPOSITION 2. - (i)  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$  est un espace vectoriel et contient  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$ ; (ii)  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}[\|\mathbf{x}'\|_{\Psi}]$  est une semi-norme sur  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$ ; (iii) pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  [ $\mathbf{x}' \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$ ] on a  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leq \|\mathbf{x}\|_{\Phi} + 1$  [ $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \leq \|\mathbf{x}'\|_{\Psi} + 1$ ].

PROPOSITION 3. - (i) Si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$ , alors  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = 0$  si et seulement si  $\mathbf{x}(z) = 0$  p. p.; (ii) si  $\Psi(v) > 0$  pour  $v > 0$ , et  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$ , alors  $\|\mathbf{x}'\| = 0$  si et seulement si  $\mathbf{x}'(z) = 0$  p. p.; (iii) si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$  et  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$ , alors  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = 0$  si et seulement si  $\mathbf{x}'(z) = 0$  localement p. p.

PROPOSITION 4. - (i) Si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  il existe une constante  $p$  telle que  $p\mathbf{x} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$ . De façon précise si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  et  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \neq 0$ , on a  $|\mathbf{x}|/\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leq 1$ ; (ii) si  $\Psi(v) > 0$  pour  $v > 0$ ,  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$  et  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \neq 0$ , alors  $|\mathbf{x}'|/\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \leq 1$ ; (iii) si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$ ,  $\mathbf{x}' \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$  et  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \neq 0$ , alors il existe un champ  $\mathbf{x}'_1 \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$ , égal à  $\mathbf{x}'$  localement p. p. tel que  $|\mathbf{x}'_1|/\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \leq 1$ .

PROPOSITION 5. - L'espace  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$  est complet pour la semi-norme  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi}[\|\mathbf{x}'\|_{\Psi}]$ . L'espace quotient  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}/\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$ , où  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  est l'ensemble des  $\mathbf{x}$  tels que  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = 0$ ,  $[\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}/\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$ , où  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$  est <sup>(3)</sup> l'ensemble des  $\mathbf{x}'$  tels que  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = 0$ ] est un espace de Banach.

PROPOSITION 6. - S'il existe une constante  $M > 1$  telle que  $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ ,  $[\Psi(2u) \leq M\Psi(u)]$ , pour  $u \geq 0$ , les ensembles  $\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  et  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[\mathfrak{O}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$  contiennent les mêmes éléments.

PROPOSITION 7. - S'il existe une constante  $M > 1$  telle que  $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ ,  $[\Psi(2u) \leq M\Psi(u)]$  pour  $u \geq 0$ , alors  $|\mathbf{x}|_{\Phi} \leq 1/M^p$  implique  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} \leq 2/2^p$ ,

(3) Si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$  on écrit  $\mathfrak{O}_{\infty}'$  au lieu de  $\mathfrak{O}'$ .

[ $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \leq 1/M^p$  implique  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} \leq 2/2^p$ ]. En particulier, si  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_{\Phi} \rightarrow 0$ , [ $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'\|_{\Psi} \rightarrow 0$ ] on déduit  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_{\Phi} \rightarrow 0$ , [ $\|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}'\|_{\Psi} \rightarrow 0$ ].

On déduit que la topologie de  $O_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[O_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$  est plus fine que celle de  $L_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[L_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$ . Comme ces deux espaces sont métrisables et complets les deux topologies sont équivalentes ([1, a] p. 36 chap. I, § 3, no. 3, cor. 2 du th. 1).

REMARQUES. — Si  $\Phi(u) = \frac{1}{p}u^p$ , ( $1 < p < \infty$ ), alors  $\Psi(v) = \frac{1}{q}v^q$ , ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

L'espace  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}[\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}]$  contient les mêmes éléments que  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^p[\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^q]$ , et  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = q^{1/q}N_p(\mathbf{x})$ ,  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = p^{1/p}N_q(\mathbf{x}')$ , donc les topologies de  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi}$  et  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}^p$ , [ $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^{\Psi}$  et  $\mathfrak{L}_{\mathfrak{A}'}^q$ ] sont équivalentes. Pour  $\Phi(u) = u$ ,  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = N_1(\mathbf{x})$  et  $\|\mathbf{x}\|_{\Psi} = N_{\infty}(\mathbf{x})$ .

### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI, a) *Espaces vectoriels topologiques*, livre V, chap. I, II, Paris 1953; b) *Intégration*, livre VI, chap. I, IV, Paris 1952.
- [2] R. GODEMENT, a) *Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach*, « C. R. Acad. Sci. »; t. 228, pp. 1321–1323 (1949); b) *Sur la théorie des représentations unitaires*, « Annals of Math. », vol. 53, pp. 68–124 (1951).
- [3] C. T. IONESCU TULCEA, *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs*. « Bul. Sc. Math. » t. 79, pp. 106–111 (1955).
- [4] M. A. KRASNOSELSKI et Ia. B. RUTITZKI, a) *Sur la théorie des espaces d'Orlicz*, « Doklady Akad. Nauk (DAN) », 81, No. 4, pp. 497–500 (1951); b) *Fonctionnelles linéaires sur les espaces d'Orlicz*, « DAN », 97, n. 4, pp. 581–584, (1954); c) *Opérateurs intégraux linéaires d'un espace d'Orlicz dans un autre*, « DAN », 85, no. 1, pp. 33–36 (1952).
- [5] M. A. KRASNOSELSKI et V. N. SOBOLEV, *Conditions de séparabilité des espaces d'Orlicz*, « Izvestia Akad. Nauk », Ser. mat. 19, no. 1, pp. 59–68 (1955).
- [6] M. A. KRASNOSELSKI, *Quelques problèmes de l'analyse non linéaire*, « Uspehi Mat. Nauk. », t. IX 3 (61), pp. 57–114 (1954).
- [7] W. A. LUXEMBURG et A. C. ZAAENEN, *Conjugate spaces of Orlicz spaces*, « Indagationes Math. », 181, pp. 217–228 (1956).
- [7'] W. A. J. LUXEMBURG, *Banach Function Spaces*, Thesis, Delft Technical University (Assen, 1955).
- [8] G. W. MACKEY, *Induced representations of locally compact groups I*, « Annals of Math. », vol. 55, pp. 101–139 (1952).
- [9] MARSTON MORSE and WILLIAM TRANSUE, *Functionals  $F$  bilinear over the product  $A \times B$  of two pseudo normed vector spaces II. Admissible spaces  $A$* , « Annals of Math. », vol. 51, pp. 576–614, (1950).
- [10] W. ORLICZ, a) *Ueber eine gewisse Klasse von Räumen von typus  $B$* , « Bull. Intern de l'Acad. Polonaise », classe A (Krakovie), pp. 207–220, (1932); b) *On a class of operations over the space of integrable functions*, « Studia Math. », 14, pp. 302–309 (1955).
- [11] Ia. B. RUTITZKI, *Sur une propriété des opérateurs intégraux linéaires complètement continus dans les espaces d'Orlicz*, « Uspehi Mat. Nauk », (2,68), pp. 201–208 (1956).
- [12] T. TAKAHASHI, *On the compactness of the function-set by the convergence in mean of general type*, « Studia Math. », tom. V pp. 141–150, (1934).
- [13] A. C. ZAAENEN, a) *Linear Analysis*, New-York. Amsterdam, 1953; b) *Note on a certain class of Banach spaces*, « Indagationes Math. », 11 pp. 148–158 (1949); c) *On a certain class of Banach spaces*, « Annals of Math. », 47, pp. 654–666 (1946); d) *Integral transformations and their resolvents in Orlicz and Lebesgue spaces*, « Compositio Math. », vol. 10, pp. 56–94 (1952).
- [14] ANTONI ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lwow, 1935.



**Teoria delle funzioni.** — *Sur certaines classes de fonctions continues à deux variables réelles et leurs ensembles de niveau.*  
 Nota II di SOLOMON MARCUS, presentata<sup>(\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

1. Dans une Note antérieure [1]<sup>(1)</sup> nous avons démontré, entre autres, un théorème qui donne la structure des ensembles de niveau des fonctions continues, à deux variables, jouissant de la propriété  $T_1$  de Banach par rapport à chaque variable prise à part. On peut poser la question si, dans ce théorème, il n'est pas suffisant que  $f(x, y)$  possède la propriété  $T_1$  seulement par rapport à l'une des variables.

Dans cette Note nous allons donner une réponse à cette question. Puis, nous allons préciser la structure des niveaux des fonctions jouissant des propriétés  $T'_1$ ,  $\mathfrak{T}'_1$ ,  $\mathfrak{T}''_1$  (introduites en [1] et [2]) des fonctions douées de dérivées partielles continues, du premier ordre, des fonctions à valence finie par rapport à chaque variable prise à part (on verra la définition dans la suite) et des fonctions partiellement monotones. Ces types de fonctions sont souvent rencontrés en analyse.

Nous rappelons que toutes les fonctions de deux variables considérées sont définies et continues dans un intervalle bidimensionnel compact  $P = R \times S$ , où  $R$  est un intervalle compact de  $Ox$  et  $S$  un intervalle compact de  $Oy$ .

2. THÉORÈME 1. — *Supposons que  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T_1$  (resp.  $\mathfrak{T}_1$ , resp.  $\mathfrak{T}'_1$ ) par rapport à  $y$  pour chaque valeur de  $x$  appartenant à un ensemble dense dans  $R$  et que  $f(x, y)$  n'est pas constante sur aucun segment de droite parallèle à  $Oy$  (à l'exception possible d'un ensemble dénombrable<sup>(2)</sup> de telles parallèles). Alors est vraie la thèse du théorème 2 de [1].*

*Démonstration.* — Nous nous bornons au cas de la propriété  $T_1$ .

Remarquons d'abord, comme une conséquence de la démonstration du lemme 2 de [1], que les composantes  $K$  non localement connexes, telles qu'il existe sur  $Ox$  un intervalle  $J$  jouissant de la propriété que  $x = x_0$  ( $x_0 \in J$ ) contient une infinité de points de  $K$ , se disposent sur un ensemble  $Z$  de mesure nulle (sur l'axe des valeurs  $t$ ) de niveaux.

Soit maintenant une composante  $K$  non localement connexe, à laquelle on ne peut pas associer un intervalle  $J$  comme ci-dessus. Si nous montrons qu'une telle composante contient un segment de droite parallèle à  $Oy$ , alors  $f(x, y)$  jouira de la propriété  $T'_1$ . En effet, les parallèles à  $Oy$  qui contiennent

(\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(1) Les notations, les définitions et les conventions faites dans [1] sont en vigueur dans cette Note aussi.

(2) Il faut remarquer que dans le théorème 5 de [2] ainsi que dans le théorème 4 de [3], l'ensemble exceptionnel de parallèles à  $Oy$  qui contiennent des intervalles où la fonction est constante, doit être au plus dénombrable, et non pas seulement de mesure nulle.

de tels segments forment, d'après l'hypothèse, un ensemble dénombrable; d'autre part, sur une parallèle à  $Oy$  ne peut exister qu'un ensemble au plus dénombrable de tels segments. Il résulte que ces composantes se disposent sur un ensemble  $N$  au plus dénombrable de niveaux. L'ensemble ZUN est encore de mesure nulle et on a ainsi la propriété  $T'_1$ .

Montrons donc qu'une telle composante  $K$  contient un segment parallèle à  $Oy$ .

Soit  $p$  un point de non connexion locale de  $K \subset E_t$ . Appliquons le théorème de [4], p. 18 et utilisons les notations employées dans la démonstration du lemme 2 de [1]. On a  $\alpha = \beta$ . S'il existait sur  $x = \alpha$ , entre  $p$  et  $b$ , un point  $c \in E_t$ , alors il existerait aussi un disque  $\Delta$  centré en  $c$  et tel que  $\Delta \cap E_t = O$ . Soit  $\Gamma$  un disque centré en  $p$ , tel que  $\Gamma \cap D$  contient plus d'un point. Les continus  $K_i$ , pour commencer au voisinage de  $p$  et arriver au voisinage de  $b$ , doivent éviter  $\Delta$ , donc leurs points d'intersection  $\gamma_i$  avec la frontière de  $\Gamma$  ont un point limite dont l'abscisse  $\gamma$  est autre que  $\alpha$ . Mais alors il existerait sur  $Ox$ , entre  $\alpha$  et  $\gamma$ , un intervalle  $J$  tel que la droite  $x = x_0$  ( $x_0 \in J$ ) contient une infinité de points de  $K$ . Cela est en contradiction avec l'hypothèse faite sur  $K$ . Il résulte que le segment de la droite  $x = \alpha$ , compris entre  $p$  et  $b$ , appartient à  $K$ .

Il nous reste maintenant à remarquer que la partie *a*) de la démonstration du théorème 2 de [1] est valable ici sans aucune modification et que la partie *b*) est aussi valable, avec la précision que la composante  $K$  se projette sur  $Ox$  toujours après un segment non dégénéré.

**COROLLAIRE.** — *Si  $f(x, y)$  est lipschitzienne par rapport à  $y$  pour chaque valeur de  $x$  appartenant à un ensemble dense dans  $R$ , alors, pour presque toutes les isoclines de l'équation différentielle  $y' = f(x, y)$ , les composantes de connexion qui ne sont pas des courbes simples fermées ou arcs simples, contiennent un segment de droite parallèle à  $Oy$  ou bien se réduisent à des points individuels.*

3. Nous passons maintenant à préciser la structure des composantes de niveau des fonctions jouissant de la propriété  $T'_1$  (resp.  $\mathfrak{T}'_1$ ; resp.  $\mathfrak{C}'_1$ ).

**THÉORÈME 2.** — *Si  $f(x, y)$  possède la propriété  $T''_1$  (resp.  $\mathfrak{T}''_1$ , resp.  $\mathfrak{C}''_1$ ), alors il existe une épaisseur pleine (resp. un résiduel, resp. un ensemble dont le complémentaire par rapport à  $[m, M]$  est dénombrable)  $\Omega$  de  $[m, M]$ , telle que pour  $t \in \Omega$  le niveau  $E_t$  est formé seulement d'un nombre fini de courbes simples fermées et d'un nombre fini d'arcs simples ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ .*

*Démonstration.* — Nous considérons seulement la propriété  $T'_1$ . Les deux autres cas peuvent être traités de la même manière.

D'après le théorème 1 de [1],  $f(x, y)$  possède, sur  $P$ , la propriété  $T'_1$ . Il existe donc une épaisseur pleine  $\Omega$  de  $[m, M]$ , telle que, pour  $t \in \Omega$ , les composantes de  $E_t$  sont des trois types suivants: arcs simples, courbes simples fermées et points. En effet, les composantes contenant des points de ramification forment un ensemble dénombrable, compte tenu du théorème

de [5], donc les valeurs correspondantes peuvent être supposées étrangères à  $\Omega$ . Vu le même théorème 1 de [1],  $f(x, y)$  possède la propriété  $T_1'''$ , donc on peut admettre que pour  $t \in \Omega$ ,  $E_t$  est formé d'un nombre fini de composantes. D'autre part, on sait [6], p. 32 que les composantes contenant des points d'extremum se disposent sur un ensemble dénombrable de niveaux <sup>(3)</sup>. On peut admettre que cet ensemble dénombrable est étranger à  $\Omega$ .

Supposons maintenant qu'un niveau  $E_t$ , où  $t \in \Omega$ , contient une composante  $K$  qui ne sépare pas  $P$ . D'après le lemme 5 de [6], p. 33,  $E_t$  contient une infinité de composantes. Mais cela est en contradiction avec la propriété  $T_1'''$ . Il s'ensuit que, pour  $t \in \Omega$ ,  $E_t$  contient seulement des composantes qui séparent, donc il n'existe aucune composante réduite à un point ou à un arc simple qui ne rencontre pas la frontière de  $P$ .

En ce qui concerne les arcs simples qui séparent  $P$  et rencontrent la frontière de  $P$  sans avoir les extrémités sur cette frontière, il est facile de voir qu'ils forment un ensemble dénombrable (on applique le théorème de Comarevski [5]), donc les valeurs correspondantes de la fonction peuvent être supposées étrangères à  $\Omega$ .

D'après A. S. Kronrod ([6], p. 66), une fonction  $f(x, y)$  est à variation linéaire bornée, si la fonction  $N(t) =$  le nombre des composantes de  $E_t$ , est sommable <sup>(4)</sup>. Avec cette définition, on peut énoncer le suivant:

**COROLLAIRE.** — Soit  $f(x, y)$  une fonction de deux variables, à variation linéaire bornée et ayant en chaque point des dérivées partielles du premier ordre. Une telle fonction jouit de la propriété  $T_1'$ , donc subsiste la thèse du théorème 2.

*Démonstration.* — Compte tenu du corollaire du théorème 2 de [1],  $f(x, y)$  possède la propriété  $T_1'$ . D'autre part, la fonction  $N(t)$ , étant sommable, est presque partout finie, donc  $f(x, y)$  possède la propriété  $T_1'''$ . Appliquons le théorème 1 de [1]:  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $T_1'$ .

*Remarque.* — On constate que la structure des niveaux des fonctions à variation linéaire bornée et douées de dérivées partielles du premier ordre est presque la même que celle des fonctions deux fois différentiables (théorème de A. S. Kronrod et E. Landis [9]). Quant à la démonstration, le théorème de Kronrod et Landis est bien plus difficile, en nécessitant un théorème préalable, d'un grand intérêt en soi-même: Les valeurs qu'une fonction deux fois différentiables prend au points où le gradient s'annule, forment un ensemble de mesure nulle. Voir aussi [6], p. 63 et [8], p. 147.

4. Il y a une classe importante de fonctions, intermédiaire entre les classes qui font l'objet des théorèmes de Velski-Kronrod et Kronrod-Landis: la classe des fonctions douées de dérivées partielles du premier ordre, continues. Nous allons établir pour ces fonctions un théorème où l'ensemble exceptionnel a un caractère tout à fait nouveau:

(3) Cette proposition remonte à M. Denjoy. Voir, par exemple, [7]; la propriété est valable pour toute fonction réelle (continue ou non) de  $n$  variables réelles.

(4) Une étude approfondie de la variation linéaire et multiple des fonctions de plusieurs variables est faite en [8].



**THÉORÈME 3.** — Soit  $f(x, y)$  douée de dérivées partielles du premier ordre, continues dans  $P$ . Il existe un ensemble  $A \subset P$  de la forme  $A = \mathbb{R} \cup N$ , où  $\mathbb{R}$  est rare (partout non dense) et  $f(N)$  est dénombrable, tel que tout niveau qui ne rencontre pas  $A$  est formé d'un nombre fini d'arcs simples de classe  $C^1$ , ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ , et d'un nombre fini de courbes simples fermées de classe  $C^1$ .

*Démonstration.* — Soit  $F$  l'ensemble des points où  $(\partial f / \partial x = \partial f / \partial y = 0)$ . A cause de la continuité de  $\partial f / \partial x$  et  $\partial f / \partial y$ ,  $F$  est compact, donc sa frontière  $\mathbb{R}$  est un ensemble rare. L'ensemble  $f(F - \mathbb{R})$  est au plus dénombrable, parce que  $F - \mathbb{R}$  est une réunion dénombrable de rectangles  $\mathbb{R}_n$ , tels que  $f(x, y)$  est constante sur  $\mathbb{R}_n$  pour tout  $n$  entier positif.

Soit un point  $p$  étranger à  $F$ . On a donc  $\text{grad. } f(p) \neq 0$  et on peut appliquer le théorème de Young sur les fonctions implicites; il existe un disque  $D$  centré en  $p$ , tel que  $E_t \cap D$  est un arc simple de classe  $C^1$  et  $t = f(p)$ . On associe un tel disque à chaque point de  $E_t$  qui, étant compact, peut être recouvert avec un nombre fini de ces disques. Il s'ensuit que  $E_t$  est formé d'un nombre fini de composantes et, parce que  $E_t$  est localement un arc simple, ces composantes sont d'arcs simples et de courbes simples fermées.

Désignons par  $V$  l'ensemble des points d'extrémum de  $f(x, y)$ . On sait [7] que  $f(V)$  est dénombrable. Retenons les niveaux  $E_t$  tels que  $E_t \cap F = 0$ ,  $E_t \cap V = 0$ . D'après le lemme 5 de [6] toute composante de  $E_t$  sépare  $P$ , donc les composantes — arcs simples rencontrent la frontière de  $P$ . Ceux d'entre eux (formant un ensemble  $W$ ) qui n'ont pas les extrémités sur la frontière de  $P$ , se disposent sur un ensemble dénombrable de niveaux. Posons maintenant  $N = (F - \mathbb{R}) \cup V \cup W$ . Il est visible que l'ensemble  $A = \mathbb{R} \cup N$  satisfait à la thèse du théorème.

5. Nous allons introduire maintenant une classe de fonctions de deux variables, dont la structure des niveaux peut être considérablement précisée.

Nous dirons qu'une fonction réelle  $f(x)$  d'une variable réelle est à *valence finie* s'il n'existe aucune valeur prise une infinité de fois. Comme exemples de telles fonctions, citons: les polinomes, les fonctions strictement monotones, les fonctions strictement convexes. Une caractérisation des fonctions continues et à valence finie a été donnée par E. Čech [10]. A. Marchaud a montré qu'une fonction continue et à valence finie est dérivable presque partout [11].

**THÉORÈME 4.** — Si  $f(x, y)$  est à valence finie par rapport à  $x$  pour tout  $y$  appartenant à un ensemble dense dans  $S$  et par rapport à  $y$  pour tout  $x$  appartenant à un ensemble dense dans  $R$ , alors:

- a) toute composante de niveau est localement connexe;
- b) à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable de niveaux, toute composante de niveau est une courbe simple fermée, un point ou un arc simple ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ .

*Démonstration.* — Supposons qu'une composante  $K \subset E_t$  n'est pas localement connexe au point  $p \in K$ . Alors ([4], p. 18) il existe un disque  $D$  cen-



tr  en  $p$  et une suite infinie de composantes distinctes  $K_1, K_2, K_3, \dots$  de  $K \cap \bar{D}$ , qui converge topologiquement vers un continu  $K \ni p$  et n'a pas de points en commun avec  $K_1, K_2, K_3, \dots$ . Il existe donc un intervalle  $I$  sur  $Ox$  (ou sur  $Oy$ ) tel que, pour  $x_0 \in I$  (ou  $y_0 \in I$ ), la valeur  $t$  est prise une infinité de fois sur la droite  $x = x_0$  (ou  $y = y_0$ ). Mais cela est contraire à l'hypothèse, donc  $K$  est localement connexe.

Compte tenu qu'une fonction à valence finie d'une variable possède la propriété  $\tau_1$ , on peut appliquer le théorème 2 de [1]; il existe un ensemble  $\Omega \subset [m, M]$ , tel que  $[m, M] - \Omega$  est dénombrable et tel que, pour  $t \in \Omega$ , les composantes de  $E_t$  sont des types indiqués au point  $b$ ) de l'énoncé.

Vu les théorèmes 1 et 4 et la démonstration du théorème 4, on a:

**COROLLAIRE.** - *Si  $f(x, y)$  est, pour tout  $x$ , à valence finie par rapport à  $y$ , alors est vraie la thèse du théorème 4.*

**THÉORÈME 5.** - *Si  $f(x, y)$  est, pour tout  $x$ , strictement monotone par rapport à  $y$ , alors:*

a) *toute composante de niveau est localement connexe;*

b) *  l'exception d'un ensemble au plus dénombrable de niveaux, tout niveau est formé d'un ensemble au plus dénombrable d'arcs simples ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ .*

**Démonstration.** - Vu le corollaire du théorème 4 et compte tenu qu'une fonction strictement monotone est à valence finie, il résulte que toute composante de niveau est localement connexe.

D'après le théorème 5 de [12],  $f(x, y)$  est monotone au sens de Lebesgue (dans tout domaine, les bornes sont atteintes sur la frontière du domaine). D'après le théorème 2' de [12] ou le théorème 3 de [13], il n'existe aucune composante-courbe simple fermée. Supposons maintenant qu'il existe une composante réduite à un seul point  $\xi$ . On peut admettre que  $\xi$  n'est pas un point d'extrémum, parce que les valeurs prises en ces points forment un ensemble dénombrable. Alors, d'après le lemme 5 de [6], toute voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\xi$  rencontre dans le niveau  $E_{f(\xi)}$  une infinité d'arcs simples ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ .   cause de la monotonie stricte par rapport à  $y$ , on peut préciser que ces arcs ont les extrémités sur les côtés inférieur et supérieur de  $P$ . Soit  $A_1, A_2, A_3, \dots$  une suite de tels arcs. Il existe sur la droite  $x = x_0$  (où  $x_0$  est l'abscisse de  $\xi$ ) un segment (contenant  $\xi$ ) qui appartient à la limite topologique supérieure de la suite  $\{A_n\}$ . Mais cela contredit la stricteesse de la monotonie par rapport à  $y$ . Donc il n'existe aucune composante réduite à un seul point.

Remarquons enfin que deux composantes - arcs simples d'un même niveau se projettent sur  $Ox$  d'après deux segments disjoints et, comme une famille de segments disjoints, sur une droite, est au plus dénombrable, il résulte la dénombrabilité de l'ensemble des arcs - composantes d'un même niveau.

**6. THÉORÈME 6.** - *Si les expressions  $f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$  et  $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$  évitent, chacune à part, un certain signe, pour  $\Delta x > 0$ ,*

$\Delta y > 0$ , alors à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable de niveaux, chaque niveau est un arc simple ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ .

*Démonstration.* — D'après le théorème 6 de [12] ou le théorème de [13] chaque niveau d'une telle fonction est connexe.  $f(x, y)$  jouit de la propriété  $\tau_1$  par rapport à chaque variable prise à part, donc, compte tenu du théorème 2 de [1], à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable de niveaux, tout niveau est un arc simple ayant les extrémités sur la frontière de  $P$ , une courbe simple fermée ou un point. Mais, d'après le théorème 5 de [12],  $f(x, y)$  est monotone au sens de Lebesgue, donc, d'après le théorème 2' de [12], les niveaux-courbes simples fermées sont exclus.

On peut admettre qu'un niveau réduit à un seul point, n'est pas un point d'extrémum. Mais alors, d'après le lemme 5 de [1], ce niveau contient une infinité de composantes, ce qui est une contradiction.

#### OUVRAGES CITÉS.

- [1] S. MARCUS, *Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », 1956.
- [2] S. MARCUS, *Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions de deux variables*, « C. R. Acad. Sci. », Paris, t. 242, nr. 19, pp. 2273-2275 (1956).
- [3] S. MARCUS, *Condițiile (T) ale lui Banach la funcții de două variabile*, « Revista Univ. C. I. Parhon », București nr. 8, pp. 15-22 (1955).
- [4] G. T. WHYBURN, *Analytic Topology*, New-York, 1942.
- [5] M. V. COMAREVSKI, *Sur une propriété des continus linéaires situés dans le plan et ayant des points de ramification*, (en russe), « Trudi Turkest. Gos. Univ », nr. 6 et 8 (1923).
- [6] A. S. KRONROD, *Sur les fonctions de deux variables*, (en russe), « Uspehi Mat. Nauk », t. 5, nr. 1 (35) pp. 24-134 (1950).
- [7] A. FRODA, *Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles*, Thèse, Paris, Hermann, pp. 58-60 (1929).
- [8] A. G. VITUSCHKIN, *Sur la variation multiple*, (en russe), Moskva 1955, Gosudarstvenoe izdatelstwo tehnico-teoreticeskoi literaturî.
- [9] A. S. KRONROD-E. M. LANDIS, *Sur les ensembles de niveau des fonctions de plusieurs variables*, (en russe), « D.A.N.S.S.S.R. », 58, nr. 7, p. 1269 (1947).
- [10] E. ČECH, *Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois*, « Fund. Math. », t. 17, pp. 32-39 (1931).
- [11] A. MARCHAUD, *Sur une condition de quasi-rectificabilité*, « Fund. Math. », t. 20, p. 116 (1933).
- [12] S. MARCUS, *Fonctions monotones de deux variables*, « Revue de Mathématiques pures et appliquées », Bucarest, t. 3, pp. 17-36 (1956).
- [13] S. MARCUS, *Sur quelques notions de monotonie concernant les fonctions réelles de deux variables réelles*, « C. R. Acad. Sci. », Paris, t. 242, nr. 18, pp. 2207-2209 (1956).

**Geometria.** — *Sulle geodetiche di una  $V_n$  relative a una connessione affine.* Nota di IDA GASPARINI CATTANEO, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

In una Nota precedente [2] si è osservato che ciascuna delle infinite connessioni affini  $\pi$  associate ad una medesima connessione lineare  $\omega$  su di una varietà differenziabile  $V_n$  di classe  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) è caratterizzata da una 1-forma  $\Phi$  a valori vettoriali o, in termini equivalenti, da un tensore doppio  $\Phi_\beta^\alpha$  (1). Precisamente la matrice della connessione  $\pi$ , i cui elementi sono forme lineari, può scriversi

$$(1) \quad \pi = \begin{pmatrix} 0 & \overset{\omega}{\nabla} \xi^\alpha + \Phi^\alpha \\ 0 & \omega_\beta^\alpha \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$$

dove  $\xi^\alpha$  sono le  $n$  componenti del vettore  $\vec{\xi}$  definente l'origine del riferimento affine  $S$  nello spazio tangente a  $V_n$  nel suo generico punto  $x$ ,  $\overset{\omega}{\nabla}$  indica l'operazione di differenziazione assoluta secondo la connessione lineare  $\omega$  e dove infine  $\Phi^\alpha$  sta ad indicare la 1-forma a valori vettoriali  $(\delta_\beta^\alpha + T_\beta^\alpha) \vartheta^\beta$ ,  $\vartheta^\beta$  essendo gli elementi del coriferimento,  $\delta_\beta^\alpha$  il tensore di Kronecker e  $T_\beta^\alpha$  un tensore doppio arbitrario. Il tensore  $\Phi_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + T_\beta^\alpha$  che, come  $T_\beta^\alpha$ , individua la connessione affine  $\pi$  si dirà *tensore caratteristico* della connessione medesima. Per  $\Phi_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$  si ha la connessione affine *canonicamente associata* alla connessione  $\omega$ .

In questa breve Nota si scrivono le equazioni differenziali delle geodetiche relative alla connessione affine  $\pi$ , definite come le curve di  $V_n$  che, sullo spazio affine tangente, si «sviluppano» in rette. Si riconosce che esse si identificano con le curve  $x(t)$  di  $V_n$  lungo le quali il differenziale assoluto del vettore  $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$  si mantiene collineare al vettore stesso. Il vettore  $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$  non è però il vettore tangente alla linea bensì si deduce da esso mediante la trasformazione lineare definita dal tensore  $\Phi_\beta^\alpha$ . Dall'esame di queste equazioni differenziali si è condotti spontaneamente a introdurre la nozione di *connessioni affini regolari*. Tra queste vengono in particolare caratterizzate quelle che definiscono su  $V_n$  le stesse geodetiche definite dalla connessione lineare associata.

Della nozione generale di connessione affine si fa, da ultimo, applicazione alla teoria della Relatività mostrando come l'introduzione nello spazio tempo della Relatività generale di una particolare connessione affine costruita

(\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) Sullo stesso argomento cfr. anche la Nota [6] sfuggitami durante la redazione della mia Nota precedente.

a partire dalla connessione riemanniana e avente come tensore caratteristico un tensore strettamente legato con il campo elettromagnetico permetta di estendere ad una particella carica l'espressione formale delle ordinarie equazioni di moto di una particella neutra.

Desidero esprimere la mia profonda riconoscenza al prof. A. Lichnerowicz per i preziosi consigli che ha voluto darmi.

1. EQUAZIONI DELLE GEODETICHE SECONDO UNA CONNESSIONE AFFINE  $\pi$ . — Chiamiamo geodetiche di una varietà a connessione affine  $\pi$  una curva che si sviluppa sullo spazio affine tangente nella sua origine secondo una retta (cfr. [7] p. 100).

Converrà richiamare brevemente la nozione di sviluppo sullo spazio affine (cfr. [7] p. 58).

Sia  $\mathcal{E}(V_n)$  lo spazio fibrato dei riferimenti affini. Consideriamo su  $V_n$  un cammino arbitrario  $x(t)$  ( $0 < t < 1$ ) e un cammino  $\bar{z}(t)$  di  $\mathcal{E}(V_n)$  la cui « proiezione » su  $V_n$  sia  $x(t)$ . Se al punto  $\bar{z}(t)$  di questo cammino si sostituisce un altro opportuno punto  $z(t) = \bar{z}(t)B(t)$  ( $B(t)$  essendo la matrice di ordine  $n+1$  che permette di passare da un riferimento affine ad un altro), cioè se si sostituisce al riferimento affine  $\bar{S}(t)$  rappresentato dal punto  $\bar{z}(t)$ , un altro opportuno riferimento affine  $\bar{S}(t)B(t)$ , si può trovare un cammino  $z(t)$ , la cui proiezione sia ancora  $x(t)$  ma che sia *orizzontale*, cioè tale che le sue tangenti siano dei vettori  $\tau$  tangenti allo spazio fibrato e tali che

$$(2) \quad \pi(\tau) = 0.$$

Si trova che affinché  $z(t)$  sia orizzontale occorre e basta che  $B(t)$  soddisfi a questa relazione espressa in termini di matrici

$$(3) \quad dB = B \pi_z(dz).$$

La soluzione  $B(t)$  di questo sistema differenziale tale che  $B(0) = B_0$  ( $B_0$  essendo arbitrario), si dice sviluppo di  $\bar{z}(t)$  sul gruppo affine a partire dall'elemento  $B_0$ .

Questo cammino orizzontale che proietta  $x(t)$  e ha la sua origine in  $B_0$  permette di definire un isomorfismo dello spazio affine tangente in  $x_0$  sullo spazio affine tangente in un punto arbitrario del cammino  $x(t)$ , isomorfismo che si dice *trasporto* dello spazio affine tangente in  $x_0$  sullo spazio affine tangente in un punto arbitrario  $x(t)$  del cammino  $x(t)$  secondo la connessione affine  $\pi$  e lungo il cammino  $x(t)$  scelto su  $V_n$ .

Due vettori si diranno paralleli secondo la connessione affine  $\pi$  quando si corrispondono in questo isomorfismo.

Naturalmente si può parlare anche di sviluppo di  $\bar{z}(t)$  non sul gruppo affine ma sullo spazio affine  $T_{x_0}$  tangente in  $x_0$ . Infatti, avendo fissato un riferimento affine  $S$  dello spazio affine tangente il gruppo affine può essere realizzato mediante i riferimenti affini dello spazio affine tangente.



Se  $\bar{S}(t)$  è un cammino di  $\mathcal{E}(V_n)$  sopra  $x(t)$ , questo sviluppo dà  $\infty^1$  riferimenti affini  $S(t)$  dipendenti dal parametro  $t$  tali che se  $\bar{S}(0)$  è scelto come riferimento iniziale,  $S(0) = \bar{S}(0)$  e lungo  $S(t)$

$$(4) \quad dS = S\pi_{\bar{S}}(d\bar{S}),$$

ove  $\pi_{\bar{S}}(d\bar{S})$  indica il valore della forma della connessione affine  $\pi$  in corrispondenza al vettore  $d\bar{S}$  tangente a  $\mathcal{E}(V_n)$  in  $\bar{S}$ .

È comodo scegliere i punti  $\bar{S}(t)$  del cammino di  $\mathcal{E}(V_n)$  tali che per ogni valore di  $t$  l'origine del riferimento  $\bar{S}$  coincida con  $x(t)$ , cioè  $\bar{S}(t) = [0, \bar{R}(t)]$

Le equazioni (4) danno allora

$$(5) \quad \begin{cases} d\vec{\eta} = R \Phi_{\bar{R}}(d\bar{R}) \\ dR = R \omega_{\bar{R}}(d\bar{R}). \end{cases}$$

In conformità con quanto precede, si chiama « sviluppo » del cammino  $\bar{S}(t)$  sullo spazio affine, la soluzione  $[\vec{\eta}(t), R(t)]$  tale che

$$[\vec{\eta}(0), R(0)] = [0, \bar{R}(0)] = \bar{S}(0).$$

Se  $v^a$  è il vettore velocità definito dalla rappresentazione parametrica  $x(t)$  del cammino scelto e riferito in ciascun punto  $x(t)$  al riferimento  $\bar{S}(t) = [0, \bar{R}(t)]$  di cui  $\vec{e}_a$  sono gli elementi, il sistema precedente diviene

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d\vec{\eta}}{dt} = \vec{e}_a \Phi_{\beta}^a \mathfrak{P}^{\beta}(v) \\ \quad \quad \quad = \vec{e}_a \Phi_{\beta}^a v^{\beta} \\ \frac{d\vec{e}_a}{dt} = \vec{e}_{\beta} \omega_a^{\beta}(v). \end{cases}$$

L'estremo libero del vettore  $\vec{\eta}(t)$  dà nello spazio affine lo sviluppo del cammino  $\bar{S}(t)$  di  $\mathcal{E}(V_n)$ . Si dimostra che questo sviluppo non dipende dal particolare cammino  $\bar{S}(t)$  scelto sopra il cammino  $x(t)$  di  $V_n$  ma solo dal cammino  $x(t)$  di modo che si può definire il cammino  $\eta(t)$  come sviluppo del cammino  $x(t)$  sullo spazio affine tangente. Affinché la curva  $x(t)$  di  $V_n$  si sviluppi secondo una retta occorre e basta che esista uno scalare  $\lambda(t)$  tale che

$$(7) \quad \frac{d^2 \vec{\eta}}{dt^2} = \lambda(t) \frac{d\vec{\eta}}{dt},$$

dalle equazioni (6) si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\eta}}{dt} &= \vec{e}_a \Phi_{\beta}^a v^{\beta} \\ \frac{d^2 \vec{\eta}}{dt^2} &= \frac{d\vec{e}_a}{dt} \Phi_{\beta}^a v^{\beta} + \vec{e}_a \frac{d\Phi_{\beta}^a}{dt} v^{\beta} + \vec{e}_a \Phi_{\beta}^a \frac{dv^{\beta}}{dt} \\ &= \vec{e}_{\beta} \omega_a^{\beta} \Phi_{\lambda}^a v^{\lambda} + \vec{e}_a \frac{d\Phi_{\beta}^a}{dt} v^{\beta} + \vec{e}_a \Phi_{\beta}^a \frac{dv^{\beta}}{dt} \end{aligned}$$

e aggiungendo e sottraendo lo stesso termine  $\vec{e}_\alpha \Phi_\lambda^\alpha \omega_\beta^\lambda v^\beta$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = \vec{e}_\alpha \Phi_\beta^\alpha \frac{\omega}{dt} v^\beta + \vec{e}_\alpha \frac{\omega}{dt} \Phi_\beta^\alpha v^\beta.$$

Tenendo conto della (7) si ottiene infine il sistema differenziale delle geodetiche

$$(8) \quad \Phi_\beta^\alpha \frac{\omega}{dt} v^\beta + \frac{\omega}{dt} \Phi_\beta^\alpha v^\beta = \lambda(t) \Phi_\beta^\alpha v^\beta,$$

che in coordinate locali ( $v^a = dx^a/dt$ ) assume la forma

$$(9) \quad \Phi_\beta^\alpha \frac{\omega}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} + \frac{\omega}{dt} \Phi_\beta^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} = \lambda(t) \Phi_\beta^\alpha \frac{dx^\beta}{dt}.$$

Le equazioni (8) possono anche scriversi

$$(10) \quad \frac{\omega}{dt} [\Phi_\beta^\alpha v^\beta] = \lambda(t) \Phi_\beta^\alpha v^\beta.$$

2. INTERPRETAZIONE DELLE EQUAZIONI (8). — Sia  $w(x)$  un campo di punti degli spazi affini tangenti, e sia  $(1, w^a)$  la matrice orizzontale di ordine  $n+1$  che definisce il generico di tali punti nel corrispondente riferimento affine  $S_x(\vec{\zeta}, R)$ .

Nella precedente Nota [2] si è mostrato che il differenziale assoluto di questo campo di punti secondo la connessione affine  $\pi$  è espresso da

$$(11) \quad (\nabla w)^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w^\alpha + \zeta^\alpha) + \Phi^\alpha$$

ove le  $w^\alpha + \zeta^\alpha$  sono le componenti del vettore che unisce il punto  $x$  di  $V_n$  (identificato al vettore  $\vec{O}$  dello spazio vettoriale tangente  $T_x$ ) al punto  $w$  e le  $\Phi^\alpha$ , come si è già detto, definiscono la 1-forma caratteristica della connessione:

Se  $w_1$  e  $w_2$  sono due campi di punti per ciascuno di essi si ha

$$(\nabla w_1)^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w_1^\alpha + \zeta^\alpha) + \Phi^\alpha$$

$$(\nabla w_2)^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w_2^\alpha + \zeta^\alpha) + \Phi^\alpha$$

e, sottraendo,

$$[\nabla (w_1 - w_2)]^\alpha = \overset{\omega}{\nabla} (w_1^\alpha - w_2^\alpha):$$

il differenziale assoluto rispetto a  $\pi$  del campo di vettori definito da due campi di punti non è dunque altro che il differenziale assoluto del medesimo campo di vettori rispetto alla connessione lineare  $\omega$ .

Consideriamo ora come campo di punti dello spazio affine tangente quello costituito dal punto  $x$  medesimo. Si ha per esso  $w^\alpha = -\xi^\alpha$  e quindi

$$(\overset{\pi}{\nabla} x)^\alpha = \Phi^\alpha.$$

Lungo un cammino  $x(t)$  si ha così il vettore

$$(12) \quad \frac{(\overset{\pi}{\nabla} x)^\alpha}{dt} = \Phi_\beta^\alpha v^\beta,$$

$v^\beta$  essendo il vettore velocità associato a questo cammino.

Si ricava allora

$$(13) \quad \frac{\overset{\pi}{\nabla}}{dt} \left( \frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt} \right)^\alpha = \frac{\overset{\omega}{\nabla}}{dt} \left( \frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt} \right)^\alpha = \frac{\overset{\omega}{\nabla}}{dt} (\Phi_\beta^\alpha v^\beta)$$

e le equazioni differenziali delle geodetiche, nella loro forma (10), possono interpretarsi così

$$(14) \quad \frac{\overset{\pi}{\nabla}}{dt} \frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt} = \lambda(t) \frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt}:$$

le geodetiche di  $\pi$  sono pertanto le curve  $x(t)$  lungo le quali il differenziale assoluto di  $\overset{\pi}{\nabla} x/dt$  è collineare al vettore stesso. Questo a sua volta si deduce dal vettore velocità, come risulta dalla (12), mediante la trasformazione lineare definita dal tensore  $\Phi_\beta^\alpha$ .

3. CONNESSIONI AFFINI REGOLARI. - Secondo le (9) il sistema differenziale del II ordine che definisce le geodetiche può ricondursi ad un sistema differenziale normale se  $\Phi_\beta^\alpha$  definisce un automorfismo di  $T_x$  in ogni punto  $x$  di  $V_n$ . In questo caso si dirà che la connessione affine considerata è regolare. Si può quindi dare la seguente definizione:

*Una connessione affine si dice regolare se il suo tensore caratteristico  $\Phi_\beta^\alpha$  definisce in ogni punto  $x$  un automorfismo di  $T_x$ .*

È chiaro per esempio che la connessione affine canonicamente associata ad una connessione lineare, cioè definita dal tensore caratteristico  $\Phi_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ , è regolare.

Se  $\pi$  è regolare, introdotto il tensore  $\Psi_\beta^\alpha$  tale che

$$\Psi_\epsilon^\alpha \Phi_\beta^\epsilon = \delta_\beta^\alpha,$$

con semplici calcoli si riducono le (9) alla forma normale

$$(15) \quad \frac{\overset{\omega}{\nabla} v^\alpha}{dt} + \Psi_\epsilon^\alpha \overset{\omega}{\nabla}_\gamma \Phi_\beta^\epsilon v^\beta v^\gamma = \lambda(t) v^\alpha.$$

Poichè  $\Psi_\epsilon^\alpha \overset{\omega}{\nabla}_\gamma \Phi_\beta^\epsilon$  definisce un tensore del terzo ordine, le (15) si identificano con le equazioni delle geodetiche rispetto ad una connessione lineare  $\overset{\omega}{\nabla}$

i cui coefficienti si ottengono dai coefficienti della  $\omega$  con l'aggiunta del tensore  $\Psi_{\epsilon}^{\alpha} \bar{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\epsilon}$  (o anche del simmetrico rispetto a  $\gamma$  e  $\beta$ ):

$$(16) \quad \frac{\bar{\nabla} v^{\alpha}}{dt} = \lambda(t) v^{\alpha}.$$

4. CAMBIAMENTO DELLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA. — Lo scalare  $\lambda$  dipende dalla rappresentazione parametrica scelta sulla geodetica. Se passiamo dal parametro  $t$  al parametro  $s$  abbiamo

$$v^{\alpha} = u^{\alpha} s'$$

ove  $u^{\alpha}$  è il vettore velocità in  $s$  e  $s' = \frac{ds}{dt}$ . Se ne trae

$$\frac{\bar{\nabla} v^{\alpha}}{dt} = \frac{\bar{\nabla} u^{\alpha}}{ds} s'^2 + u^{\alpha} s''$$

e, sostituendo in (8),

$$(17) \quad \Phi_{\beta}^{\alpha} \frac{\bar{\nabla} u^{\beta}}{ds} + \bar{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\alpha} u^{\beta} u^{\gamma} = \frac{1}{s'} \left( \lambda - \frac{s''}{s'} \right) \Phi_{\beta}^{\alpha} u^{\beta}.$$

Quindi sulla geodetica considerata esiste un parametro  $s$ , definito a meno di una arbitraria trasformazione lineare  $s \rightarrow \alpha t + \beta$  con  $\alpha$  e  $\beta$  costanti, che riduce le (8) alla forma

$$(18) \quad \Phi_{\beta}^{\alpha} \frac{\bar{\nabla} u^{\beta}}{ds} + \bar{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\alpha} u^{\beta} u^{\gamma} = 0.$$

Chiameremo  $s$  *parametro affine*, sulla geodetica considerata, della connessione  $\pi$ . Tutto ciò vale per una connessione affine generica. Nel caso di una connessione affine regolare, l'esistenza di un parametro affine può anche dedursi da un risultato classico delle connessioni tenendo conto della esistenza di una connessione lineare  $\bar{\omega}$  che ha le stesse geodetiche della connessione affine  $\pi$  (cfr. la (16)).

5. CONFRONTO TRA LE GEODETICHE DI UNA CONNESSIONE AFFINE REGOLARE E LE GEODETICHE DELLA CONNESSIONE LINEARE ASSOCIATA. — Se  $\pi$  è la connessione affine canonicamente associata ad una connessione lineare  $\omega$ , si ha  $\Phi_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$  e dalle (18) risulta che le geodetiche di  $\pi$  coincidono con quelle di  $\omega$ , i parametri affini, essendo gli stessi. Ma si può osservare che la connessione affine canonica non è la sola connessione regolare che goda di questa proprietà.

Sia  $\Phi_{\beta}^{\alpha}$  il tensore caratteristico di una connessione affine regolare  $\pi$ . Riferita ad un parametro affine, una geodetica di  $\pi$  soddisfa all'equazione

$$\frac{\bar{\nabla} u^{\alpha}}{ds} + \Psi_{\epsilon}^{\alpha} \bar{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\epsilon} u^{\beta} u^{\gamma} = 0;$$



affinché questa curva sia anche geodetica secondo  $\omega$ ,  $s$  essendo ancora un parametro affine, occorre e basta che sia

$$\Psi_{\rho}^{\alpha} \overset{\omega}{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\rho} u^{\beta} u^{\gamma} = 0.$$

Quindi affinché le geodetiche delle connessioni affini regolari coincidano con quelle della connessione lineare associata, i parametri affini essendo gli stessi, occorre e basta che la relazione precedente sia soddisfatta qualunque sia il vettore  $u$ , cioè che sia

$$\Psi_{\rho}^{\alpha} \left( \overset{\omega}{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\rho} + \overset{\omega}{\nabla}_{\beta} \Phi_{\gamma}^{\rho} \right) = 0$$

ossia

$$(19) \quad \overset{\omega}{\nabla}_{\gamma} \Phi_{\beta}^{\alpha} + \overset{\omega}{\nabla}_{\beta} \Phi_{\gamma}^{\alpha} = 0.$$

Questa condizione in particolare è soddisfatta se  $\Phi_{\beta}^{\alpha}$  ha derivata covariante nulla nella connessione  $\omega$ .

Interpretando ancora il tensore caratteristico  $\Phi_{\beta}^{\alpha}$  della connessione affine come definente una trasformazione lineare sullo spazio vettoriale tangente alla  $V_n$ , si può dire che le collineazioni regolari definite sullo spazio vettoriale tangente che non sono modificate dalla connessione lineare  $\omega$  definiscono delle connessioni affini che hanno le stesse geodetiche della connessione lineare, con gli stessi parametri affini.

In particolare si può supporre che  $V_n$  sia una varietà quasi complessa ( $n = 2p$ ). Per la sua stessa definizione si può allora definire su di essa un tensore  $F_{\beta}^{\alpha}$  tale che

$$F_{\beta}^{\alpha} F_{\gamma}^{\beta} = -\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

e si può anche definire una connessione lineare  $\omega$  tale che

$$\overset{\omega}{\nabla} F_{\beta}^{\alpha} = 0:$$

la  $\omega$  si dice connessione quasi complessa.

Se si assume  $F_{\beta}^{\alpha}$  come tensore caratteristico di una connessione affine  $\pi$  associata ad una connessione lineare quasi complessa, risulta da quanto precede che le geodetiche delle connessioni affini regolari così ottenute sono le stesse di quelle della connessione quasi complessa con identità di parametri affini.

6. APPLICAZIONE DELLE CONNESSIONI AFFINI ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ. - Consideriamo la varietà differenziabile  $V_4$  dello spazio tempo della Relatività generale. Essa è dotata di una metrica Riemanniana iperbolica (+ ---) avente in un arbitrario sistema di coordinate locali la espressione

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} dx^{\beta}$$

e di una connessione Riemanniana  $\omega$  costruita con il tensore metrico  $g_{\alpha\beta}$ .

Il campo elettromagnetico è rappresentato su  $V_4$  da un tensore antisimmetrico del II ordine  $F_{\alpha\beta}$  (cfr. [8] p. 43).

Consideriamo delle particelle per le quali il rapporto della carica alla massa  $k = (e/m)$  abbia un valore assegnato. Le equazioni differenziali delle traiettorie spazio temporali delle particelle sono allora, come è ben noto

$$(20) \quad u^\alpha \left( \overset{\omega}{\nabla}_\alpha u^\beta - k F_\alpha^\beta \right) = 0$$

ove si è posto

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad ds^2 > 0.$$

Nel caso di una particella neutra si ha

$$(21) \quad u^\alpha \overset{\omega}{\nabla}_\alpha u^\beta = 0,$$

il differenziale essendo calcolato secondo la connessione riemanniana.

Introduciamo ora su  $V_4$  una connessione affine determinata dalla connessione riemanniana  $\omega_\beta^\alpha$  e da un tensore caratteristico  $\Phi_\beta^\alpha$  direttamente legato al campo elettromagnetico

$$(22) \quad \Phi_\beta^\alpha = -k F_\beta^\alpha.$$

Con una tale connessione si può dare al I membro delle (20) una interpretazione molto semplice.

Ad ogni punto  $x$  della traiettoria associamo un punto  $w$  dello spazio affine tangente definito dall'estremità del vettore  $u = \frac{\overset{\omega}{\nabla} x}{ds}$ . Utilizzando la formula (11) che dà il differenziale di un campo di punti in una connessione affine, si riconosce nella quantità in parentesi nelle (20) il differenziale assoluto secondo la connessione  $\pi$  del campo di punti  $w$ :

$$(23) \quad w^\beta \overset{\pi}{\nabla}_\beta w^\alpha = 0$$

o anche, con lieve abuso di notazione,

$$(24) \quad \frac{\overset{\pi}{\nabla}}{ds} \left( \frac{\overset{\omega}{\nabla} x}{ds} \right) = 0.$$

Le equazioni di una particella carica acquistano così una forma analoga, salvo il cambiamento della connessione, a quella delle traiettorie delle particelle neutre.

Non è inutile osservare che le curve integrali del sistema differenziale (23) o (24) non sono le curve definite come geodetiche della connessione  $\pi$ , che corrispondono invece al sistema

$$\frac{\overset{\omega}{\nabla}}{dt} \frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt} = \lambda \frac{\overset{\pi}{\nabla} x}{dt}.$$

Riprendendo l'espressione della matrice di curvatura  $5 \times 5$  di una connessione affine (cfr. [2])

$$(25) \quad \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{\alpha}^{\alpha} \\ 0 & \Omega_{\beta}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

con

$$\Omega_{\alpha}^{\alpha} = \Omega_{\alpha}^{\alpha} \xi^{\alpha} + \nabla^{\omega} \Phi^{\alpha}$$

e  $\Omega_{\beta}^{\alpha}$  = matrice di ordine  $4 \times 4$  che dà la curvatura della connessione riemanniana associata, si può osservare che, introducendo la connessione  $\pi$ , la presenza del campo elettromagnetico si riflette in un cambiamento della curvatura (termine  $\Omega_{\alpha}^{\alpha}$ ) dello spazio tempo in più della abituale influenza sulla curvatura riemanniana attraverso le equazioni gravitazionali.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BOMPIANI, *Geometria degli spazi a connessioni affini*, « Annali di Mat. », serie IV (1945).
- [2] CATTANEO GASPARINI, *Sulle connessioni affini associate ad una data connessione lineare*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », Vol X (1956).
- [3] CHERN, *Notes on differential geometry*. Inst. for Advanced Studies, 1951.
- [4] EHRESMANN, *Les connexions infinitesimales dans un espace fibré différentiable*, Coll. de Topologie, Bruxelles 1950.
- [5] EISENHART, *Non Riemannian geometry*, « Am. Math. Soc. », New York 1927.
- [6] LEGRAND, *Connexions infinitésimales sur l'espace fibré des repères affines d'une variété différentiable*, « Comp. Rend. Ac. Sc. », XX, Fev. 1955.
- [7] LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*. Ed. Cremonese, Roma 1955.
- [8] LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson 1955.

**Geometria.** — *Variétés riemanniennes multilocales*. Nota di O. ONICESCU, presentata (\*) dal Socio E. BOMPIANI.

La Mécanique d'un système inertial de  $n$  particules matérielles impose le concept d'une variété riemannienne multilocale, que nous présentons ici sous une forme plus générale.

1. DÉFINITION. — Soient  $E_n$  un espace euclidien à  $n$  dimensions,  $(dP)^2 = \sum_{j=1,2,\dots,n} (dx^j)^2$  la métrique correspondante à un repère cartésien de cet espace,  $E$  un espace euclidien à une dimension,  $(dt)^2$  étant sa métrique.

Considérons  $m$  points cotemporels  $M_l = P_l \times t$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) de l'espace  $S_{n+1} = E_n \times E$  et les  $m$  métriques

$$(1) \quad (ds_l)^2 = a_l(P_1, P_2, \dots, P_m)(dP_l)^2 + b_l(P_1, P_2, \dots, P_m)dt^2; \\ (l = 1, 2, \dots, m)$$

(\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

correspondant à chacun des  $m$  points  $M_1, M_2, \dots, M_m$ , avec  $a_l > 0, b_l > 0$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) ou bien, s'il s'agit, comme dans le cas de notre Mécanique, de métriques pseudo-riemanniennes,

$$b_l < 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

Il serait utile pour la Mécanique de séparer les cas où les points sont discernables de ceux où ils sont indiscernables autrement que par leurs positions relatives. Ces deux circonstances se reflètent dans la structure des fonctions  $a_l$  et  $b_l$ . Mais nous ferons ici seulement les suppositions générales que ces fonctions positives soient continues dans tout l'espace en même temps que leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport aux variables  $x_j^i$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $l = 1, 2, \dots, m$ ).

2. LES INVARIANTS. — On peut d'abord considérer le seul point  $P_l$  comme variable et les autres points comme de simples paramètres. On trouve alors à l'aide de la métrique (1) les habituels coefficients de connexion  $\Gamma_{ij}^k$  et le tenseur de courbure de Riemann  $R_{ijh}^k$  ( $i, j, h, k = 1, 2, \dots, n$ ) localement associés au point  $P_l$ . Mais on peut construire un système tensoriel du second ordre de caractère multilocal.

On y arrive en considérant chaque forme  $ds_l^2$  comme une forme singulière relative à toutes les variables

$$(2) \quad x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n, x_2^1, x_2^2, \dots, x_m^n, t.$$

Considérons dans ce but l'espace produit  $E_n \times E_n \times \dots \times E_n \times E$  et associons-lui la métrique

$$(3) \quad d\sigma_l^2 = \lambda_1 (dP_1)^2 + \lambda_2 (dP_2)^2 + \dots + \lambda_{l-1} (dP_{l-1})^2 \\ + a_l (dP_l)^2 + \lambda_{l+1} (dP_{l+1})^2 + \dots + \lambda_m (dP_m)^2 + b_l dt^2,$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m$  étant des paramètres positifs. Pour plus de commodité désignons les  $nm + 1$  variables de la suite (2) respectivement par  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{nm+1}$ .

Soit  ${}^l R_{ijh}^k$  le tenseur de Riemann relatif à cette forme et à un système de valeurs de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_m$ .

Désignons par  $\mathfrak{I}_r$  ( $r \neq l$ ) l'ensemble des indices

$$(r-1)n+1, (r-1)n+2, \dots, n$$

et par  $\mathfrak{I}_l$  l'ensemble  $(l-1)n+1, (l-1)n+2, \dots, ln$ ;  $nm+1$  et posons  $\mathfrak{I} = \bigcup_r \mathfrak{I}_r$ ; on aura

$${}^l R_{ijh}^k = {}^l {}_r A_{ijh}^k \lambda_r^{-1} \quad k \in \mathfrak{I}_r, r = 1, 2, \dots, m, \lambda_l = 1.$$

où

$${}^l {}_r A_{ijh}^k = \frac{\partial}{\partial \xi^h} \left[ \begin{smallmatrix} i & j \\ & k \end{smallmatrix} \right] - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left[ \begin{smallmatrix} i & h \\ & k \end{smallmatrix} \right] - a_l^{-1} \sum_{u \in \mathfrak{I}_r} \left( \left[ \begin{smallmatrix} u & j \\ & k \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} i & h \\ & u \end{smallmatrix} \right] - \left[ \begin{smallmatrix} u & h \\ & k \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} i & j \\ & u \end{smallmatrix} \right] \right) \\ k \in \mathfrak{I}_r, r \neq l$$



et

$${}^l A_{ijh}^k = \frac{\partial}{\partial \xi^h} \left( a_l^{-1} \begin{bmatrix} i & j \\ k \end{bmatrix} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left( a_l^{-1} \begin{bmatrix} i & h \\ k \end{bmatrix} \right) - a_l^{-2} \sum_{u \in \mathfrak{J}_l} \left( \begin{bmatrix} u & j \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & h \\ u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u & h \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ u \end{bmatrix} \right).$$

$$k \in \mathfrak{J}_l$$

(Les crochets  $\begin{bmatrix} i & j \\ k \end{bmatrix}$  représentent les symboles de Christoffel de première espèce).

Il s'ensuit que, si nous considérons l'invariant

$$I = \sum_{i,j,h,k \in \mathfrak{J}} R_{ijh}^k d\xi^i d\xi^j d\xi^h \frac{\partial f}{\partial \xi^k}$$

ou aura

$$I = \sum_{\substack{i,j,h \in \mathfrak{J}, \\ k \in \mathfrak{J}_r, r+l}} \lambda_r^{-1} {}^l A_{ijh}^k d\xi^i d\xi^j d\xi^h \frac{\partial f}{\partial \xi^k} + \sum_{\substack{i,j,h \in \mathfrak{J}, \\ k \in \mathfrak{J}_l}} {}^l A_{ijh}^k d\xi^i d\xi^j d\xi^h \frac{\partial f}{\partial \xi^k}.$$

Chacun des coefficients de  $\lambda_r^{-1}$  ( $r = 1, 2, l-1, l+1, \dots, m$ ) et aussi le terme libre est un tenseur indépendant des valeurs des  $\lambda_r$ . *Ce sont donc aussi des tenseurs par rapport à la forme quadratique  $(ds_l)^2$ .*

Nous pouvons, ainsi, attacher à la variété et au système des formes (I) le système suivant de tenseurs du second ordre différentiel:

$$(4) \quad {}^l \rho_{ijh}^k = \begin{cases} {}^l A_{ijh}^k & k \in \mathfrak{J}_r (r \neq l) \\ 0 & k \in \mathfrak{J}_l (l = r) \end{cases}$$

$$l = 1, 2, \dots, m.$$

Le groupe infini de transformations par rapport auquel  ${}^l \rho_{ijh}^k$  sont des tenseurs est constitué par les transformations biunivoques du premier ordre de l'espace E en lui-même spécifiées pour chacun des  $m$  points  $P_l$ :

$$(5) \quad \begin{cases} x_l^j = f^j(y_l^1, y_l^2, \dots, y_l^n, \tau) \\ t = g(y_l^1, y_l^2, \dots, y_l^n, \tau) \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, l, \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

Remarquons ici que

$$\sqrt{a_k a_h} dP_k \delta P_h + \sqrt{b_k b_h} dt \delta t \quad (k, h = 1, 2, \dots, m)$$

constituent des covariants par rapport à ces mêmes transformations.

Un système de courbes autoparallèles (invariantes) de l'espace (I) est donné par les équations

$$a_l d^2 \xi^l + \begin{bmatrix} j & k \\ h \end{bmatrix} d\xi^j d\xi^k = 0 \quad h = (l-1)n+1, (l-1)n+2, \dots, ln$$

$$\begin{bmatrix} j & k \\ i \end{bmatrix} d\xi^j d\xi^k = 0 \quad \begin{matrix} i = (r-1)n+1, (r-1)n+2, \dots, rn. \\ r \neq l. \end{matrix}$$

$$b_l d^2 \xi^{nm+1} + \begin{bmatrix} j & k \\ nm+1 \end{bmatrix} d\xi^j d\xi^k = 0$$

pour chaque  $l$ . Ce système est obtenu des équations des géodésiques

$$\sum_h g_{kr} d^2 \xi_h^r + \left[ \begin{smallmatrix} j & k \\ r \end{smallmatrix} \right] d\xi_j^r d\xi_k^r = 0$$

de la variété (3) en y faisant  $\lambda_j = 0$  ( $j \neq l$ ).

3. GÉNÉRALISATIONS. — Les résultats sont analogues si au lieu de la variété euclidienne  $E_n$  nous partons de la variété riemannienne  $\Sigma_n$  de métrique  $(dP)^2 = g_{jh} dx_j dx_h$ .

Cette généralisation s'appuie sur les principes suivants:

a) Quelque soit le système des  $m$  points réguliers  $P_1, P_2, \dots, P_m$  de la variété  $\Sigma_n$  il existe pour chacun de ces points un voisinage et un système de coordonnées relatif à l'aide desquels on identifie le système des  $m$  points.

b) On peut attribuer à la variété  $\Sigma_n^{(1)} \times \Sigma_n^{(2)} \times \dots \times \Sigma_n^{(m)} \times E$  la métrique, que nous désignons comme une métrique d'interaction de position, ou d'ordre 0 (entre les composantes),

$$ds^2 = \sum_{r=1, 2, \dots, m} \lambda_r a_r (P_1, P_2, \dots, P_m) (dP_r)^2 + b dt^2$$

$(dP_r)^2$  étant la métrique de  $\Sigma_n^{(r)}$ , les fonctions  $a_r$  étant continues avec leurs dérivées des deux premiers ordres.

Pour le problème que nous traitons ici, il suffira de prendre  $a_r \equiv 1$  pour  $r \neq l$  et  $\lambda_l = 1$ , comme nous avons procédé dans le cas euclidien.

c) Si des variétés  $S_n^{(l)}$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) différentielles d'un certain ordre et de la dimension  $n$ , sont caractérisées par leurs connexions, on peut attribuer à la variété  $S_n^{(1)} \times S_n^{(2)} \times \dots \times S_n^{(m)}$  des connexions liées, par définition, à celles des  $S_n^{(r)}$  suivant les lois que l'on trouve pour la composition des symboles de connexion riemannienne.

4. REMARQUES FINALES. — La classe (Ricci) de la forme  $(d\sigma)^2$  ne dépend que de  $a_l$ . En général cette classe ne varie pas avec  $l$ . Le groupe d'holonomie de Cartan de l'espace  $(d\sigma_l)^2$  est, en dehors d'un isomorphisme, indépendant de  $l$ . On peut donc associer à la variété riemannienne multilocale d'ordre  $m$ ,  $m$  espaces euclidiens de plongements de la même dimension et un seul groupe d'holonomie.

**Meccanica razionale.** — *Sulle basi della termomeccanica* (\*). Nota II di CLIFFORD TRUESDELL, presentata (\*\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

6. BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO. — Sia il componente  $A$  soggetto agli sforzi parziali <sup>(6)</sup>  $t_A^{kl}$  ed alla forza di massa  $f_A^k$ . Analogamente a (4.1), definiremo la rapidità impulsiva  $\hat{p}_A$  del componente  $A$  mediante l'equazione

$$(6.1) \quad \rho \hat{p}_A^k \equiv \rho_A (\ddot{x}_A^k - f_A^k) - t_{A,l}^{kl}.$$

Allora  $\hat{p}_A = 0$  è condizione necessaria e sufficiente affinché agli effetti della sua quantità di moto il componente  $A$  si comporti come se fosse isolato. Gli sforzi totali  $t^{kl}$  non si ottengono solo come somma degli sforzi parziali  $t_A^{kl}$  ma contribuiscono anche gli sforzi apparenti  $-\rho_A u_A^k u_A^l$ , che accompagnano la diffusione. Cioè,

$$(6.2) \quad t^{kl} \equiv \sum_{A=1}^K (t_A^{kl} - \rho_A u_A^k u_A^l),$$

ed ancora, se si pone

$$(6.3) \quad f^k \equiv \sum_{A=1}^K c_A f_A^k,$$

$f$  è la forza di massa totale.

Sommando (6.1) su i componenti, da (6.2) e (6.3) e da (4.7) (conseguenza dell'identità fondamentale), si ottiene l'identità

$$(6.4) \quad \rho (\ddot{x}^k - f^k) - t^{kl}_{,l} = \rho \sum_{A=1}^K (\hat{p}_A^k + \hat{c}_A u_A^k),$$

da cui segue il

TEOREMA II. — *Affinché sia*

$$(6.5) \quad \rho \ddot{x}^k = t^{kl}_{,l} + \rho f^k,$$

*occorre e basta che*

$$(6.6) \quad \sum_{A=1}^K (\hat{p}_A^k + \hat{c}_A u_A^k) = 0.$$

La condizione (6.6) ha un significato immediato: La somma degli incrementi delle quantità di moto  $\hat{p}_A$  che derivano dallo sbilancio della quantità di moto di un componente particolare, e delle quantità di moto  $\hat{c}_A u_A$  risultanti dalla

(\*) Lavoro eseguito in base ad accordi tra l'U. S. Office of Naval Research e l'Università d'Indiana.

(\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

(6) In questo lavoro assumiamo  $t_A^{kl} = t_A^{lk}$ , escludendo così la possibilità di coppie esterne.

diffusione della massa creata dalle trasformazioni, deve essere nulla. Pertanto le equazioni (6,5) e (6,6) sono espressioni equivalenti del bilancio della quantità di moto totale della miscela.

7. BILANCIO ENERGETICO. — Sia  $\varepsilon_A$  l'energia interna del componente  $A$ ,  $q_A$  una sua fonte eventuale d'energia, e sia  $h_A$  il suo vettore di corrente energetica. Analogamente a (4,1) e (6,1), definiremo la *rapidità energetica*  $\hat{\varepsilon}_A$  del componente  $A$  mediante l'equazione

$$(7.1) \quad \rho \hat{\varepsilon}_A = \rho_A (\dot{\varepsilon}_A - q_A) - t_A^{kl} u_{A,k,l} - h_{A,k}^k.$$

Allora  $\hat{\varepsilon}_A = 0$  è condizione necessaria e sufficiente affinché agli effetti della sua energia il componente  $A$  si comporti come se fosse isolato. L'energia totale  $\varepsilon$  non risulta semplicemente come somma delle energie parziali  $\varepsilon_A$  ma anche delle energie cinetiche di diffusione, cioè

$$(7.2) \quad \varepsilon = \sum_{A=1}^K c_A \left( \varepsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right).$$

La corrente energetica totale  $h^k$  risulta dalle correnti parziali  $h_A^k$ , dalle potenze  $t_A^{kl} u_{A,l}$  degli sforzi parziali che compiono lavoro per effetto della diffusione, e dal trasporto  $-\rho_A (\varepsilon_A + (1/2) u_A^2) u_A^k$  dell'energia totale del componente  $A$  per diffusione, cioè

$$(7.3) \quad h^k = \sum_{A=1}^K \left[ h_A^k + t_A^{kl} u_{A,l} - \rho_A \left( \varepsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) u_A^k \right].$$

Si ponga inoltre

$$(7.4) \quad q = \sum_{A=1}^K c_A (q_A + f_A^k u_{A,k}).$$

Sommando (7,1), dopo qualche passaggio e ricordando (2,11) segue

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \rho \sum_{A=1}^K \hat{\varepsilon}_A = & \sum_{A=1}^K \left\{ \rho_A \left( \dot{\varepsilon}_A + \frac{1}{2} \overline{u_A^2} \right) - \rho_A u_{A,k} \tilde{x}_A^k - \rho_A q_A - \right. \\ & - (t_A^{kl} - \rho_A u_A^k u_A^l) \dot{x}_{A,l} - \left[ h_A^k + t_A^{kl} u_{A,l} - \rho_A \left( \varepsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) u_A^k \right]_{,k} + \\ & \left. + t_{A,k}^{kl} u_{A,l} - \left[ \rho_A \left( \varepsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) u_A^k \right]_{,k} \right\}. \end{aligned}$$

Da (7.2), dall'identità fondamentale (4,6), da (6,2) e da (7,3) si ottiene

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \rho \sum_{A=1}^K \hat{\varepsilon}_A = & \rho \dot{\varepsilon} - t^{kl} d_{kl} - h_{,k}^k - \\ & - \sum_{A=1}^K \left[ \rho \hat{\varepsilon}_A \left( \varepsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) + u_{A,k} (\rho_A \tilde{x}_A^k - t_{A,l}^{kl}) + \rho_A q_A \right]. \end{aligned}$$



In definitiva, da (6,1) si trae l'identità

$$(7.7) \quad \rho \dot{\epsilon} - t^{kl} d_{kl} - h^k_{,k} - \rho q = \rho \sum_{A=1}^K \left[ \hat{\epsilon}_A + \hat{p}_A^k u_{Ak} + \hat{c}_A \left( \epsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) \right],$$

da cui segue il

TEOREMA III. - *Affinché sia*

$$(7.8) \quad \rho \dot{\epsilon} = t^{kl} d_{kl} + h^k_{,k} + \rho q,$$

*occorre e basta che*

$$(7.9) \quad \sum_{A=1}^K \left[ \hat{\epsilon}_A + \hat{p}_A^k u_{Ak} + \hat{c}_A \left( \epsilon_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) \right] = 0.$$

La condizione (7,9) ha un significato immediato. Deve annullarsi la somma degli incrementi della energia di tre specie: 1°, lo sbilancio  $\hat{\epsilon}_A$  dell'energia di un componente particolare; 2°, il lavoro  $\hat{p}_A^k u_{Ak}$  dello sbilancio della quantità di moto contro la diffusione; 3°, la fonte della energia totale della energia totale  $\hat{c}_A (\epsilon_A + (1/2) u_A^2)$  che sorge dalla diffusione della massa creata dalle trasformazioni. Pertanto le equazioni (7,8) e (7,9) sono espressioni equivalenti del bilancio dell'energia totale della miscela.

8. OSSERVAZIONI. - Se ritorniamo un momento sulle definizioni (6,2) (7,2) e (7,3), ci accorgiamo che esse sono suggerite dagli stessi principi di meccanica che sono stati usati da Maxwell per la formulazione della teoria cinetica dei gas. Infatti, l'identità fondamentale (4,6) presenta un'analogia con l'equazione di trasporto.

Questa analogia - si noti che è soltanto analogia, perchè il nostro ragionamento è rigorosamente fenomenologico - chiarisce la necessità dei postulati (4,5), (6,6) e (7,9), di cui il primo è ormai classico, ma i due ultimi appaiono per la prima volta in una teoria fenomenologica. Che le equazioni di campo per un mezzo continuo si deducano come teoremi dalla teoria cinetica, è conseguenza soltanto delle identità alle quali soddisfa l'integrale che esprime l'effetto delle collisioni nell'equazione fondamentale di Maxwell-Boltzmann. Queste identità, che seguono dalla conservazione della quantità di moto e della energia nelle singole collisioni, esprimono la conservazione in media di queste grandezze. Per poter dedurre, in questa teoria fenomenologica, equazioni analoghe per la miscela, bisogna assumere dei postulati analoghi, e tali sono appunto (4,5), (6,6) e (7,9).

Nella analogia concettuale che ho or ora accennato, i componenti della miscela corrispondono alle molecole di un gas puro. Ben inteso, però, deve sussistere anche un'altra analogia, cioè un'analogia *formale* con la teoria cinetica dei gas misti. Questa teoria non tiene conto delle reazioni chimiche, e pertanto  $\hat{c}_A = 0$ . Ma siccome la quantità di moto e l'energia della totalità delle molecole di una specie non debbono conservarsi da sole, sussistono

equazioni analoghe <sup>(7)</sup> alle nostre (6,1) e (7,1) con  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{A}} \neq 0$ ,  $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{A}} \neq 0$ . Infatti, sottintese le ipotesi della teoria cinetica,  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{A}}$  e  $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{A}}$  possono esprimersi come somme dei valori medii degli incrementi della quantità di moto e della energia delle molecole della specie  $\mathbf{A}$  in urto con le molecole della specie  $\mathbf{B}$ , per tutti i  $\mathbf{B}$ .

È importantissimo notare che, per stabilire i bilanci della quantità di moto e della energia, non basta assumere, come fanno, tacitamente o no, molti autori, che agli effetti della sua quantità di moto e della sua energia ogni componente si comporti come se fosse isolato. L'aumento di massa di un costituente che si diffonde porta con sé un aumento di energia cinetica totale e generalmente anche una variazione della quantità di moto totale. Infatti, se  $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{A}} = 0$  e  $\hat{\varepsilon}_{\mathbf{A}} = 0$  per ogni  $\mathbf{A}$ , le condizioni (6,6) e (7,9) si riducono rispettivamente alle

$$(8.1) \quad \sum_{\mathbf{A}=1}^K \hat{c}_{\mathbf{A}} u_{\mathbf{A}}^k = 0 \quad , \quad \sum_{\mathbf{A}=1}^K \hat{c}_{\mathbf{A}} \left( \varepsilon_{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} u_{\mathbf{A}}^2 \right) = 0,$$

nessuna delle quali è conseguenza dalle sole (2,5), (2,8) e (4,5).

9. EQUAZIONI PER LE QUANTITÀ INTERIORI. — Abbiamo dimostrato che dalle condizioni parallele (4,5), (6,6) e (7,9), che esprimono rispettivamente i bilanci della massa totale, della quantità di moto totale e della energia totale, seguono le equazioni per la miscela (4,4), (6,5) e (7,8), cioè *equazioni di campo per la miscela che non differiscono dalle equazioni classiche per un mezzo semplice*.

Osserviamo tuttavia che un tale risultato può essere dedotto solo partendo da definizioni convenienti, vale a dire (6,2), (7,2) e (7,3). Se infatti si preferisce usare le *quantità interiori*

$$(9.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1^{kl} \equiv \sum_{\mathbf{A}=1}^K t_{\mathbf{A}}^{kl} \quad , \quad h_1^k \equiv \sum_{\mathbf{A}=1}^K h_{\mathbf{A}}^k, \\ \varepsilon_1 \equiv \sum_{\mathbf{A}=1}^K c_{\mathbf{A}} \varepsilon_{\mathbf{A}} \quad , \quad q_1 \equiv \sum_{\mathbf{A}=1}^K c_{\mathbf{A}} q_{\mathbf{A}}, \end{array} \right.$$

si ottengono come equivalenti a (6,5) e a (7,8), rispettivamente, le seguenti equazioni di forma più complessa:

$$(9.2) \quad \rho \ddot{x}^k = t_{1,l}^{kl} - \sum_{\mathbf{A}=1}^K (\rho_{\mathbf{A}} u_{\mathbf{A}}^k u_{\mathbf{A}}^l)_{,l} + \rho f^k,$$

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \rho \dot{\varepsilon}_1 = & t_1^{kl} d_{kl} + \sum_{\mathbf{A}=1}^K t_{\mathbf{A}}^{kl} u_{\mathbf{A}k,l} + \left[ h_1^k - \sum_{\mathbf{A}=1}^K \rho_{\mathbf{A}} \varepsilon_{\mathbf{A}} u_{\mathbf{A}}^k \right]_{,k} + \\ & + \rho q_1 - \rho \sum_{\mathbf{A}=1}^K \left[ \hat{p}_{\mathbf{A}}^k u_{\mathbf{A}k} + \hat{c}_{\mathbf{A}} \cdot \frac{1}{2} u_{\mathbf{A}}^2 \right]. \end{aligned}$$

(7) Vedi ad esempio il § 8,1 del libro di CHAPMAN e COWLING, *Mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge 1939.

10. TERMODINAMICA. - I. COMPATIBILITÀ FRA EQUAZIONI DEL CALORE PARZIALI E TOTALI. - Supponiamo ora che ogni componente obbedisca ad una equazione del calore

$$(10.1) \quad \varepsilon_A = \varepsilon_A(\eta_A, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega), \quad A = 1, 2, \dots, K,$$

dove  $\eta_A$  è l'entropia parziale specifica e dove  $\omega$  rappresenta un insieme di parametri  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$  che non dipendono dai  $\rho_B$ . Siccome si può prendere  $k$  tanto grande quanto si vuole, non c'è bisogno di scrivere  $\omega$  con l'indice  $A$  per i singoli componenti. Se i componenti sono fluidi semplici, i parametri  $\omega$  sono assenti.

Per l'entropia totale (specificata) abbiamo

$$(10.2) \quad \eta = \sum_{A=1}^K c_A \eta_A.$$

Adesso ci domandiamo, con l'entropia totale  $\eta$  e l'energia  $\varepsilon_I$  definite da (9.1)<sub>3</sub> e (10.2), quando le (10.1) sono compatibili con l'esistenza di un'equazione del calore per la miscela, cioè

$$(10.3) \quad \varepsilon_I = \varepsilon_I(\eta, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega).$$

A tale fine, poniamo

$$(10.4) \quad \theta_A = \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial \eta_A}$$

per la temperatura del componente  $A$ .

Da (10.1), (10.2) e (9.1)<sub>3</sub>,  $\varepsilon_I$  e  $\eta$  sono definite come funzioni di  $\eta_1, \dots, \eta_K, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k$ . Allora, affinché sia valida una relazione funzionale (10.3), occorre e basta che siano nulle tutti i determinanti dei tipi seguenti:

$$(10.5) \quad \begin{vmatrix} \partial(\varepsilon_I, \eta, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k) \\ \partial(\eta_1, \eta_2, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k) \\ \vdots \\ \partial(\varepsilon_I, \eta, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k) \\ \partial(\eta_1, \eta_2, \rho_1, \dots, \rho_K, \eta_3, \dots, \omega_k) \end{vmatrix}, \dots,$$

Siccome le variabili  $\eta_1, \dots, \eta_K, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k$  sono indipendenti, di questi determinanti soltanto quelli della prima linea non sono identicamente nulli, e questi si possono scrivere

$$(10.6) \quad \frac{\partial(\varepsilon_I, \eta)}{\partial(\eta_1, \eta_2)}, \dots,$$

dove  $\rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k$  sono costanti. Da (10,2) e (10,4) segue che si può mettere (10,6) nella forma

$$(10.7) \quad \begin{cases} c_1 c_2 (\theta_1 - \theta_2), c_1 c_3 (\theta_1 - \theta_3), \dots, \\ c_2 c_3 (\theta_2 - \theta_3), \dots, \dots \end{cases}$$

Da questo risultato segue il seguente

TEOREMA IV. — *Se i componenti obbediscono alle equazioni parziali del calore (10,1), affinché sussista una equazione totale del calore (10,3) per la miscela, occorre e basta che le variazioni dello stato termodinamico locale  $\eta_1, \dots, \eta_K, \rho_1, \dots, \rho_K, \omega_1, \dots, \omega_k$  si limitino ad una varietà dove*

*1° L componenti hanno la stessa temperatura:*

$$(10.8) \quad \theta_{A_1} = \theta_{A_2} = \dots = \theta_{A_L} = \theta.$$

*2° Le concentrazioni dei rimanenti K — L componenti sono nulli:*

$$(10.9) \quad c_{A_{L+1}} = \dots = c_{A_K} = 0.$$

È essenziale notare che la forma dell'equazione totale (10,3) si deduce dalle forme delle equazioni parziali (10,1) e dipende anche dalla varietà particolare che è definita dalle condizioni (10,8) e (10,9).

11. TERMODINAMICA. — II. FORMA DELL'EQUAZIONE DEL CALORE PER IL MOTO MEDIO. — Per una varietà qualunque definita da (10,8) e (10,9), benché non debba farsi altro che una semplice eliminazione per ottenere l'equazione totale (10,3), la forma di questa non si può esplicitare in generale. Ma nella pratica della termodinamica cosiddetta irreversibile, l'equazione (10,3) non si usa altro che mediante la sua derivata riferita al *moto medio*. Adesso troveremo la forma esplicita di questa derivata <sup>(8)</sup>.

Posto

$$(11.1) \quad v_A \equiv 1/\rho_A, \quad \tau_{AB} \equiv \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial v_B}, \quad \sigma_{Aa} \equiv \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial \omega_a}$$

da (10,1) e (10,4) abbiamo

$$(11.2) \quad d\varepsilon_A = \theta_A d\eta_A + \sum_{B=1}^K \tau_{AB} dv_B + \sum_{a=1}^k \sigma_{Aa} d\omega_a.$$

(8) Approfondisco qui un concetto di MEIXNER, « Annalen der Physik » (5), 39. 333-356 (1941), spec. § 3, concetto che tuttavia il Meixner pare abbia abbandonato nelle sue pubblicazioni più recenti. Tutte le equazioni essenziali sono già state date da Leaf, pp. 750-751 del suo lavoro citato, ma il suo ragionamento pare offuscato da altre equazioni e considerazioni non necessarie.



In particolare, si ha

$$(11.3) \quad \varepsilon_{A,k} = \theta_A \eta_{A,k} + \sum_{B=1}^K \tau_{AB} \nu_{B,k} + \sum_{a=1}^k \sigma_{Aa} \omega_{a,k},$$

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_A &= \theta_A \dot{\eta}_A + \sum_{B=1}^K \tau_{AB} \dot{\nu}_B + \sum_{a=1}^k \sigma_{Aa} \dot{\omega}_a, \\ &= \theta_A \dot{\eta}_A + \sum_{B=1}^K \tau_{AB} (\dot{\nu}_B + \nu_{B,k} u_A^k) + \sum_{a=1}^k \sigma_{Aa} (\dot{\omega}_a + \omega_{a,k} u_A^k), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato (2,10).

Ora supponiamo che in un punto  $\mathbf{x}$  e ad un istante  $t$  tutti i componenti abbiano la stessa temperatura:

$$(11.5) \quad \theta_A = \theta_B = \theta \quad \text{a } \mathbf{x}, t \quad \text{per } A, B = 1, \dots, K.$$

Allora, ponendo

$$(11.6) \quad \tau_B \equiv \sum_{A=1}^K c_A \tau_{AB} \quad , \quad \sigma_a \equiv \sum_{A=1}^K c_A \sigma_{Aa},$$

e sommando (11,4)<sub>2</sub> rispetto ad  $A$ , dall'identità fondamentale (4,6) si ottiene

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_I &= \theta \dot{\eta} + \sum_{B=1}^K \tau_B \dot{\nu}_B + \sum_{a=1}^k \sigma_a \dot{\omega}_a + \sum_{A=1}^K \Phi_A \left[ \dot{c}_A - \frac{1}{\rho} (\rho_A u_A^k)_{,k} \right] - \\ &- \sum_{A=1}^K c_A u_A^k \left[ \varepsilon_{A,k} - \theta \eta_{A,k} - \sum_{B=1}^K \tau_{AB} \nu_{B,k} - \sum_{a=1}^k \sigma_{Aa} \omega_{a,k} \right], \end{aligned}$$

dove

$$(11.8) \quad \Phi_A \equiv \varepsilon_A - \theta \eta_A$$

è l'energia libera del costituente  $A$ . Da (11,3) segue che l'ultima espressione fra parentesi in (11,7) è uguale a zero. Da (4,2)<sub>2</sub> e (11,7) segue allora

$$(11.9) \quad \dot{\varepsilon}_I = \theta \dot{\eta} + \sum_{B=1}^K \tau_B \dot{\nu}_B + \sum_{a=1}^k \sigma_a \dot{\omega}_a + \sum_{A=1}^K \Phi_A \dot{c}_A.$$

Poiché  $\dot{\nu}_B = \dot{\nu}/\bar{c}_B = \dot{\nu}/c_B - \dot{c}_B/(\bar{c}_B^2 \rho)$ , dove  $\nu$  è il volume specifico medio ( $\nu \equiv 1/\rho$ ), si può scrivere (11,9) nella forma definitiva

$$(11.10) \quad \dot{\varepsilon}_I = \theta \dot{\eta} - \pi \dot{\nu} + \sum_{A=1}^K \mu_A \dot{c}_A + \sum_{a=1}^k \sigma_a \dot{\omega}_a,$$

dove abbiamo posto

$$(11.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi = - \sum_{A=1}^K \sum_{B=1}^K \frac{c_A}{c_B} \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial v_B}, \\ \mu_A \equiv \Phi_A - \sum_{A=1}^K \sum_{B=1}^K \frac{c_A}{c_B} v_B \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial v_B}. \end{array} \right.$$

L'equazione (11,10) è la forma più generale dell'*equazione fondamentale di Gibbs per la miscela*. Di questa equazione può darsi una formulazione verbale più semplice, rinunciando ad una generalità pressoché superflua: cioè assumendo che  $\varepsilon_A$  non dipenda da  $v_B$  se  $A \neq B$ . Posto infatti

$$(11.12) \quad \pi_A \equiv - \frac{\partial \varepsilon_A}{\partial v_A},$$

da (11,11) segue

$$(11.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi = \sum_{A=1}^K \pi_A, \\ \mu_A = \Phi_A + v_A \pi_A = \psi_A \equiv \varepsilon_A - \eta_A \theta + v_A \pi_A. \end{array} \right.$$

Si è così dimostrato il

TEOREMA V. — *Se i componenti obbediscono alle equazioni parziali del calore*

$$(11.14) \quad \varepsilon_A = \varepsilon_A(\eta_A, v_A, \omega),$$

dove  $\omega$  è un insieme di parametri  $\omega_a$  che non dipendono dai volumi specifici  $v_A$ ,  $A = 1, 2, \dots, K$ , e se le temperature di tutti i componenti in un fissato luogo ed istante di tempo sono eguali, allora la parte interiore  $\varepsilon_1$  della energia interna e l'entropia  $\eta$  soddisfano ad una equazione del calore per la miscela nella quale:

1° La pressione (volumetrica) totale è la somma delle pressioni parziali.

2° I potenziali chimici apparenti sono i potenziali termodinamici dei singoli componenti.

Nel caso che ogni componente sia un fluido semplice, la seconda sommatoria in (11,10) è uguale a zero.

In ciò che segue, invece della prima sommatoria che compare in (11,10) useremo la forma equivalente (cfr. (4,2))

$$(11.15) \quad \rho \sum_{A=1}^K \mu_A \dot{c}_A = \sum_{A=1}^K [\rho_A \mu_{A,k} u_A^k - (\rho_A \mu_A u_A^k)_{,k} + \rho \mu_A \hat{c}_A].$$

12. PRODUZIONE DELLA ENTROPIA TOTALE. — Eliminando  $\dot{\varepsilon}_1$  fra (11,10) e (9,3) e ricordando (11.15), si trova

$$(12.1) \quad \rho \theta \dot{\eta} = h_{*,k}^k + \sum_{A=1}^K (\rho_A \mu_A u_A^k)_{,k} - \sum_{A=1}^K \rho_A \mu_{A,k} u_A^k + D,$$

dove

$$(12.2) \quad \left\{ \begin{aligned} h_*^k &\equiv h_1^k - \sum_{A=1}^K \rho_A \varepsilon_A u_A^k, \\ D &\equiv t_1^{kl} d_{kl} + \pi d_k^k - \rho \sum_{\mathbf{b}=1}^{\mathbf{k}} \sigma_{\mathbf{b}} \dot{\omega}_{\mathbf{b}} + \sum_{A=1}^K t_A^{kl} u_{A,k,l} - \\ &\quad - \rho \sum_{A=1}^K \left[ \hat{p}_A^k u_{A,k} + \hat{c}_A \left( \mu_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) \right] + \rho q_1. \end{aligned} \right.$$

Allora

$$(12.3) \quad \rho \dot{\eta} + s_{,k}^k = \Delta,$$

dove

$$(12.4) \quad \left\{ \begin{aligned} s^k &\equiv - \left( h_*^k + \sum_{A=1}^K \rho_A \mu_A u_A^k \right), \\ &= - \left[ h_1^k + \sum_{A=1}^K \rho_A (\mu_A - \varepsilon_A) u_A^k \right], \end{aligned} \right.$$

$$(12.5) \quad \left\{ \begin{aligned} 0\Delta &\equiv h_*^k (\log \theta)_{,k} - \sum_{A=1}^K \rho_A (\mu_A / \theta)_{,k} u_A^k + D, \\ &= \left( h_1^k - \sum_{A=1}^K \rho_A \varepsilon_A u_A^k \right) (\log \theta)_{,k} + t_1^{kl} d_{kl} + \pi d_k^k - \rho \sum_{\mathbf{b}=1}^{\mathbf{k}} \sigma_{\mathbf{b}} \dot{\omega}_{\mathbf{b}} + \rho q_1 + \\ &\quad + \sum_{A=1}^K \left[ t_A^{kl} u_{A,k,l} - \rho_A (\mu_A / \theta)_{,k} u_A^k - \rho \hat{p}_A^k u_{A,k} - \hat{c}_A \left( \mu_A + \frac{1}{2} u_A^2 \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Queste equazioni forniscono la forma definitiva per la produzione della entropia totale <sup>(9)</sup>.

(9) In (9,3) e in (12,3) (12,4) (12,5) compaiono alcuni termini che non sono presenti nelle equazioni corrispondenti delle opere citate, le quali inoltre differiscono fra loro. Confronti sicuri non sono possibili, giacché gli autori assumono l'energia interna e la corrente dell'energia come quantità *a priori*, non definite cioè da proprietà dei componenti, e non si può quindi affermare che queste variabili coincidano precisamente con  $\varepsilon_1$  e  $h_1$  oppure no. Arrischio la congettura che nei lavori precedenti manchino alcuni termini diffusivi. In ogni caso, il procedimento qui seguito è tanto semplice e generale che necessariamente ogni eventualità è inclusa. Come è già stato detto in nota (4), i teoremi I, II e III s'accordano perfettamente colla Meccanica statistica generale.

Anche i dott. Nachbar, Williams e Penner nella loro opera citata hanno verificato che le loro equazioni, che appaiono come casi particolari dei teoremi I, II e III, s'accordano con quelle della teoria più specifica dei gas monoatomici. Per i teoremi IV e V non ci sono risultati corrispondenti nella Meccanica statistica esatta, poiché l'esistenza di una equazione del calore per un insieme statistico o per una parte di un tale insieme segue soltanto come approssimazione nel caso che l'insieme (supposto numeroso) sia quasi in equilibrio (ossia stazionario nello spazio delle fasi).

**Aerodinamica.** — *Sulle correnti piane poco rotazionali.* Nota di BARTOLOMEO TODESCHINI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

In una Nota in corso di pubblicazione (1) ho determinato, sotto varie forme, l'equazione cui soddisfa nel piano odografo la funzione di corrente, nel caso di un gas perfetto in movimento stazionario piano genericamente rotazionale.

Tale equazione si riduce all'equazione, lineare omogenea, di Chaplygin, quando il moto è irrotazionale; quando il moto è rotazionale ne costituisce una generalizzazione, ed è soltanto quasi-lineare.

Nella presente Nota me ne valgo per lo studio delle correnti poco rotazionali. Per tali correnti, trascurando i termini piccoli di ordine superiore al primo, l'equazione risulta ancora lineare, come per le correnti irrotazionali, quantunque non omogenea. La linearizzazione avverrebbe, naturalmente, anche se ci si servisse dell'equazione nel piano fisico di movimento; nel piano odografo però si ha il vantaggio che i coefficienti della parte omogenea risultano funzioni di una sola variabile, ciò che consente l'applicazione della trasformazione di Laplace rispetto all'altra variabile. Dopo aver mostrato come si proceda con tale mezzo all'integrazione, esaminò alcuni casi in cui questa riesce particolarmente semplice.

1. Come ho mostrato nella mia Nota precedentemente citata, l'equazione cui soddisfa la funzione di corrente nel piano odografo può mettersi sotto la forma

$$(1) \quad \psi_{\eta\eta} + A \psi_{\theta\theta} = B Q'(\psi) + C Q''(\psi) + D Q'^2(\psi),$$

dove

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= (1 - w^2/c^2) (1 - w^2)^{-2\gamma} = A(\eta) \\ B &= \gamma w^{-2} \{ 2(c^2 - w^2)(1 - w^2)^{-\gamma} (\psi_\eta \psi_{\theta\theta} - \psi_\theta \psi_{\eta\theta}) - \\ &\quad - (3c^2 + kw^2)\psi_\eta^2 + c^{-2}[(3 - k)c^2 w^2 - 3c^4 - w^4](1 - w^2)^{-2\gamma} \psi_\theta^2 \} \\ C &= -\gamma w^{-2} \psi_\eta [c^2(1 - w^2)^\gamma \psi_\eta^2 + (c^2 - w^2)(1 - w^2)^{-\gamma} \psi_\theta^2] \\ D &= \gamma^2 w^{-4} \{ c^2(c^2 - w^2) [2\psi_\eta \psi_\theta \psi_{\eta\theta} - \psi_\eta^2 \psi_{\theta\theta} - \psi_\theta^2 \psi_{\eta\eta}] + \\ &\quad + c^4(1 - w^2)^\gamma \psi_\eta^3 + [c^4 - c^2 w^2 + (k + 1)w^4](1 - w^2)^{-\gamma} \psi_\eta \psi_\theta^2 \}. \end{aligned} \right.$$

Nella (1) gli indici denotano derivazione parziale e le variabili indipendenti sono: l'inclinazione  $\theta$  della velocità del gas rispetto all'asse  $x$  del piano

(\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) B. TODESCHINI, *Generalizzazione dell'equazione di Chaplygin*, « Rend. Ist. Lombardo » vol. 91, 1957, in corso di stampa.



di moto, ed  $\eta$ , legata al modulo  $w$  della velocità ridotta (rapporto tra la velocità effettiva del gas e la velocità limite) dalla relazione invertibile

$$(3) \quad \eta = \int_w^{c^*} w^{-1} (1 - w^2)^\gamma dw.$$

$k$  indica il rapporto tra i calori specifici del gas, e si è posto per brevità

$$(4) \quad c^* = \sqrt{(k-1)/(k+1)} \quad (5) \quad \gamma = 1/(k-1).$$

$c$  è la velocità ridotta del suono, legata alla velocità ridotta del gas dalla relazione

$$(6) \quad c^2 = (1 - w^2)/2\gamma.$$

La  $\psi$  non è la funzione di corrente ordinaria, ma quella introdotta da L. Crocco <sup>(2)</sup>. Se la si considera come funzione dei punti del piano fisico, anziché di quelli del piano odografo, essa è legata alle componenti  $u$  e  $v$  della velocità ridotta secondo gli assi cartesiani ortogonali  $x$  e  $y$  di tale piano dalle relazioni

$$(7) \quad \psi_x = -v (1 - w^2)^\gamma, \quad \psi_y = u (1 - w^2)^\gamma.$$

L'arbitraria funzione  $Q(\psi)$  che compare nella (1) (costante lungo ogni linea di flusso) dipende dalla velocità limite e dall'entropia sopra ciascuna linea. La sua derivata  $Q'(\psi)$  è legata al rotore della velocità ridotta dalla relazione

$$(8) \quad v_x - u_y = \frac{1}{2} Q'(\psi) (1 - w^2)^k.$$

Se si sceglie  $Q'(\psi) = 0$ , si ottengono le correnti irrotazionali nella velocità ridotta, che comprendono anche tutte le correnti irrotazionali nella velocità effettiva, ad eccezione di una particolare corrente rettilinea e di un particolare vortice <sup>(3)</sup>; in tal caso la (1) ha nullo il secondo membro e si riduce all'equazione di Chaplygin. Se si prende invece  $Q'(\psi)$  non nulla si hanno correnti genericamente rotazionali.

La (1) contiene come caso limite anche l'equazione relativa ai fluidi incomprimibili, la quale si ottiene facendovi tendere  $k$  all' $\infty$ .

Nota la funzione  $\psi(\eta, \vartheta)$ , il passaggio dal piano odografo al piano fisico è fornito dalle relazioni

$$(9) \quad \begin{cases} xw (1 - w^2)^\gamma = -(\psi + \Psi') \sin \vartheta - \Psi'' \cos \vartheta \\ yw (1 - w^2)^\gamma = (\psi + \Psi') \cos \vartheta - \Psi'' \sin \vartheta, \end{cases}$$

(2) L. CROCCO, *Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, vol. 23, p. 115, 1936.

(3) Cfr. B. TODESCHINI, *Le condizioni di isentropicità e di irrotazionalità nell'aerodinamica piana*, « Rend. Ist. Lombardo », vol. LXXXVIII, 1955.

dove

$$(10) \quad \Psi = w (1 - w^a)^y \left[ \int_{\eta}^a w^{-1} \psi A d\eta + G(\vartheta) \right].$$

essendo  $G(\vartheta)$  un'arbitraria funzione ed  $a$  una costante.

Interpreterò  $x$  e  $y$  come coordinate adimensionali, rapporto tra le coordinate effettive ed una lunghezza costante caratteristica: in tal modo le formule scritte restano immutate e in esse compaiono soltanto numeri puri.

2. Si ponga nella (1)  $Q'(\psi) \equiv 0$ . Si conosca una soluzione

$$(11) \quad \psi = \bar{\psi}(\eta, \vartheta)$$

dell'equazione così semplificata, che rappresenta, sul piano odografo, una corrente irrotazionale nella velocità ridotta.

Si supponga ora che il puro numero  $Q'(\psi)$  non sia identicamente nullo, ma sia piccolo con le sue derivate, e continuo con esse, per  $\psi = \bar{\psi}$ . Si considerino le soluzioni della (1) che poco si scostano dalla (11), cioè le soluzioni della forma

$$(12) \quad \psi = \bar{\psi}(\eta, \vartheta) + \varepsilon(\eta, \vartheta),$$

dove il puro numero  $\varepsilon$  è piccolo. Tali soluzioni rappresenteranno correnti poco rotazionali prossime a quella irrotazionale data dalla (11) <sup>(4)</sup>.

L'equazione differenziale che fornisce  $\varepsilon$ , e quindi determina le correnti *poco rotazionali* in questione, la si ottiene dalla (1) sostituendovi la (12) e tenendo presente che  $\bar{\psi}$  soddisfa all'equazione delle correnti irrotazionali, che  $\varepsilon$  va considerato piccolo con le sue derivate, e che  $Q'(\psi)$  e  $Q''(\psi)$ , a meno di termini di ordine superiore al primo, si identificano con  $Q'(\bar{\psi})$  e  $Q''(\bar{\psi})$ . Trascurando i termini di ordine superiore al primo, tale equazione si scrive:

$$(13) \quad \varepsilon_{\eta\eta} + A(\eta) \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = f(\eta, \vartheta),$$

dove  $f$  è funzione nota, piccola del primo ordine; la si ottiene trascurando al secondo membro della (1) tutto il termine in  $Q'^2$ , e sostituendo in ciò che rimane  $\bar{\psi}$  al posto di  $\psi$ .

3. Applichiamo all'equazione alle derivate parziali del secondo ordine lineare non omogenea (13) la trasformazione di Laplace  $L$  rispetto alla variabile  $\vartheta$ , riguardando invece la variabile  $\eta$  come un parametro.

(4) L'arbitrarietà con cui si può scegliere la piccola funzione  $Q'(\psi)$  corrisponde alla molteplicità delle correnti poco rotazionali prossime alla corrente irrotazionale assegnata.

Supponendo che tanto  $\varepsilon$  quanto  $f$  siano trasformabili, poniamo intanto

$$(14) \quad \begin{cases} L\{\varepsilon\} = \int_0^{\infty} e^{-s\vartheta} \varepsilon(\eta, \vartheta) d\vartheta = E(\eta, s) \\ L\{f\} = \int_0^{2\pi} e^{-s\vartheta} f(\eta, \vartheta) d\vartheta = F(\eta, s), \end{cases}$$

dove la trasformata  $E$  della funzione incognita  $\varepsilon$  è funzione incognita, mentre la trasformata  $F$  della nota funzione  $f$  deve ritenersi nota; nella seconda delle (14) l'integrale è stato limitato a  $2\pi$ , potendosi convenzionalmente definire  $f(\eta, \vartheta) = 0$  per  $\vartheta > 2\pi$ .

In virtù dei noti teoremi sulla trasformazione di Laplace <sup>(5)</sup> risulta poi

$$(15) \quad \begin{cases} L\{\varepsilon_{\eta\eta}\} = E_{\eta\eta} = E''(\eta, s) \\ L\{\varepsilon_{\vartheta\vartheta}\} = s^2 E(\eta, s) - s\varepsilon(\eta, 0) - \varepsilon_{\vartheta}(\eta, 0). \end{cases}$$

Poiché i coefficienti del primo membro della (13) non dipendono da  $\vartheta$ , riesce agevole l'applicazione a questa equazione dell'operatore lineare  $L$ ; tenendo presenti le (14) e le (15), si ottiene la seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, nell'incognita funzione  $E$  della variabile  $\eta$ :

$$(16) \quad E''(\eta, s) + s^2 A(\eta) E(\eta, s) = Z(\eta, s),$$

dove  $s$  funge da parametro, e si è posto per brevità

$$(17) \quad Z(\eta, s) = A(\eta) [s\varepsilon(\eta, 0) + \varepsilon_{\vartheta}(\eta, 0)] + F(\eta, s).$$

Se  $E_1(\eta, s)$  ed  $E_2(\eta, s)$  sono due integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata alla (16), l'integrale generale della (16) può determinarsi col metodo di Lagrange ed è dato da

$$(18) \quad E(\eta, s) = c_1(s) E_1(\eta, s) + c_2(s) E_2(\eta, s) + \\ + W \left[ E_2(\eta, s) \int_{\eta}^{\eta} Z(\eta, s) E_1(\eta, s) d\eta - E_1(\eta, s) \int_{\eta}^{\eta} Z(\eta, s) E_2(\eta, s) d\eta \right],$$

essendo  $c_1(s)$  e  $c_2(s)$  funzioni arbitrarie, rappresentando  $W$  l'espressione

$$(19) \quad W = 1/(E_1 E_2' - E_1' E_2),$$

che si dimostra subito essere costante, e rimanendo da mettere a piacere i limiti inferiori costanti degli integrali.

Eseguito l'antitrasformazione di Laplace sulla funzione  $E(\eta, s)$  testé trovata, si ottiene la funzione  $\varepsilon(\eta, \vartheta)$  che, messa nella (12), serve a descrivere sul piano odografo una corrente poco rotazionale; dopo di che non rimane che passare dal piano odografo al piano fisico con le relazioni (9). Le

(5) Cfr. ad esempio A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Bologna, 1943.

funzioni arbitrarie  $c_1(s)$  e  $c_2(s)$  (nella (18)),  $\varepsilon(\eta, 0)$  ed  $\varepsilon_\Phi(\eta, 0)$  (nella (17)),  $G(\Phi)$  (nella (10)) sono naturalmente da determinarsi in base ad opportune condizioni al contorno, quando queste siano date, ovvero da assegnarsi in modo conveniente.

4. Talvolta è facile integrare l'equazione omogenea associata alla (16). Nel caso di un fluido incompressibile, ad esempio, risulta

$$(20) \quad A(\eta) = 1$$

(come si vede dalla prima delle (2) per  $k \rightarrow \infty$ ), e ci si trova di fronte all'equazione dei moti armonici. Sono quindi integrali particolari tra loro linearmente indipendenti

$$(21) \quad E_1 = \sin s\eta, \quad E_2 = \cos s\eta.$$

Si potrebbe poi considerare il caso dei fluidi poco comprimibili, cioè di quegli ipotetici fluidi per i quali  $k$  è grande, sebbene finito. Ritenendo  $1/k$  piccolo del primo ordine, si vede subito che nessuna differenza si presenta rispetto ai fluidi incompressibili, finché ci si attiene all'equazione (13) di prima approssimazione; si presenterebbero invece differenze se si facesse un calcolo di seconda approssimazione.

Da ultimo osserviamo che risultando dalle (2), (3)  $\eta = 0$  ed  $A = 0$  per  $w = c$ , quando la corrente rimane in un conveniente intorno della velocità del suono (corrente transonica) si può ritenere

$$(22) \quad A(\eta) = K\eta, \quad \text{con } K = 2^{-3\gamma}(k+1)^{\gamma(k+2)},$$

senza che il termine che contiene  $A(\eta)$  nella (16) sia trascurabile di fronte agli altri. L'equazione omogenea associata alla (16) è allora del tipo detto di Laplace, e con la sostituzione

$$(23) \quad X = (2/3) s K^{1/2} \eta^{3/2}, \quad Y = (3/2 X)^{1/3} E$$

si riduce all'equazione di Bessel di indice  $1/3$  <sup>(6)</sup>. Pertanto ammette gl'integrali particolari linearmente indipendenti

$$(24) \quad \eta^{1/2} J_{\pm 1/3} \left( \frac{2}{3} s K^{1/2} \eta^{3/2} \right) \quad (7).$$

(6) Cfr. ad esempio M. PICONE, *Appunti di analisi superiore*, Napoli, 1942, p. 503.

(7) Per  $\eta > 0$  la corrente è iposonica e nella (24) compaiono le funzioni di Bessel oscillanti; per  $\eta < 0$  la corrente è ipersonica e nella (24), attraverso gli argomenti immaginari, compaiono le funzioni non oscillanti.



**Fisica matematica.** — *Sul campo elettromagnetico di un dipolo immerso in un mezzo non omogeneo.* Nota di ITALO FERRARI, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Numerose questioni che interessano la propagazione delle radio-onde, si riconducono alla determinazione del campo generato da un dipolo elettrico sinoidale e normale alla superficie terrestre, qualora le proprietà elettriche (cioè la costante dielettrica complessa  $\epsilon$  e la permeabilità  $\mu$ ) del mezzo che circonda la terra siano variabili (almeno a partire da una certa altezza) con la distanza dal suolo; fenomeno questo che si presenta non solo nella ionosfera ma anche nella troposfera per effetto di vari fattori come temperatura, umidità, ecc.

Per semplicità, si suppone, talvolta, la terra piana, ed  $\epsilon$ ,  $\mu$ , variabili con l'altezza  $z$  dal suolo, tenendo conto della influenza della curvatura terrestre con opportuna modifica delle grandezze ora scritte; mentre si suppone sempre sinoidale e di pulsazione  $\omega$  il campo generato dal dipolo.

Il Graffi (1) ha studiato ampiamente la questione fin dal 1932, riconducendola, in sostanza, ad una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti variabili.

Più recentemente il problema è stato ripreso da vari Autori e la sua soluzione è esposta, per esempio, in un articolo di J. W. Freehafer inserito in un trattato redatto a cura di D. E. Keer (2).

In base a diverse approssimazioni, l'Autore ora citato ha ottenuto formule adatte alla interpretazione fisica di alcuni fenomeni. È opportuno però osservare che il Freehafer ammette, in sostanza, trascurabile rispetto alla unità, in ogni punto P del mezzo che circonda la terra, il rapporto  $\left| \frac{\lambda}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right|$ , dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda in un mezzo omogeneo con i valori di  $\epsilon$  e  $\mu$  che competono a P, cioè  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon\mu}}$ .

In questa Nota dimostreremo, mediante alcune considerazioni del Graffi, che i risultati del Freehafer si possono applicare, con qualche modifica, anche in ipotesi, in generale, assai meno restrittive e cioè che sia trascurabile rispetto all'unità (in ogni punto P) solo  $\left| \left( \frac{\lambda}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right)^2 \right|$  e  $\left| \frac{\lambda^2}{\epsilon} \frac{d^2\epsilon}{dz^2} \right|$  e che si possa ritenere omogeneo il mezzo nella regione compresa fra il suolo ed un piano ad esso parallelo e di altezza poco superiore a quella del dipolo; quest'ultima ipotesi può ritenersi senz'altro verificata perché il dipolo si sup-

(\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) D. GRAFFI, *Sulla teoria matem. della propagaz. delle onde radiotelegrafiche*, « Atti Istituto Veneto », Tomo XCII, parte II, pp. 1811-1895 (1932-33).

(2) D. E. KEER, *Propagation of Short Radio-Waves*. McGraw-Hill, New York. p. 58 e seguenti (1951).

pone sempre a piccola distanza dal suolo. Troveremo una espressione del campo elettromagnetico che coincide con quella del Freehafer nella regione sopra indicata che del resto ha maggior interesse nelle trasmissioni radio. Dimostreremo poi che in un punto  $P$  esterno a quella regione, il campo magnetico calcolato con le nostre approssimazioni varrà quello del Freehafer moltiplicato per il fattore  $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}$  essendo  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del luogo in cui si trova il dipolo. Il campo elettrico avrà una forma un po' più complicata, ma sempre facilmente calcolabile con i risultati di Freehafer che possono così utilizzarsi per una espressione più precisa del campo elettromagnetico.

2. Richiamiamo per comodità le linee generali dei calcoli di J. W. Freehafer. A questo scopo scriviamo le equazioni di Maxwell per un campo elettromagnetico sinusoidale, di pulsazione  $\omega$ , rappresentato dai vettori complessi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  <sup>(3)</sup>:

$$(1) \quad \text{rot } \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E}$$

$$(2) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$$

dove  $j$  è l'unità immaginaria,  $\epsilon$  e  $\mu$  si suppongono eventualmente variabili solo con l'ordinata  $z$  di un sistema di coordinate cilindriche  $z, r, \theta$  con l'origine sul suolo, l'asse  $z$  verticale, orientato verso l'alto e passante per il dipolo. Per risolvere le (1), (2) per  $z > 0$  poniamo:

$$(3) \quad \mathbf{E}_a = \text{rot rot } \Pi_a \mathbf{k}$$

$$(4) \quad \mathbf{H}_a = j\omega\epsilon \text{ rot } \Pi_a \mathbf{k}$$

dove  $\Pi_a = \Pi_a(r, z)$  e  $\mathbf{k}$  è il versore lungo l'asse  $z$ .

Sostituendo in (1) si ottiene:

$$\text{rot } (j\omega\epsilon \text{ rot } \Pi_a \mathbf{k}) = j\omega\epsilon \text{ rot rot } \Pi_a \mathbf{k}$$

equazione evidentemente soddisfatta se si può trascurare il termine  $\text{grad } \epsilon \wedge \text{rot } \Pi_a \mathbf{k}$ , ossia come dimostra il Freehafer e come si è già accennato, se si può trascurare  $\left| \frac{\lambda}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right|$ .

Sostituendo (3) e (4) in (2) si ha:

$$\text{rot } (\text{rot rot } \Pi_a \mathbf{k}) = -j\omega\mu \cdot j\omega\epsilon \text{ rot } \Pi_a \mathbf{k}$$

ossia

$$\text{rot } (-\text{rot rot } \Pi_a \mathbf{k}) = -\epsilon\mu\omega^2 \text{ rot } \Pi_a \mathbf{k}$$

e poiché  $\text{grad } \epsilon \mu \wedge \Pi_a \mathbf{k} = 0$  essendo i due vettori paralleli, si ottiene:

$$\text{rot } (\text{grad div } \Pi_a \mathbf{k} - \text{rot rot } \Pi_a \mathbf{k}) = \text{rot } (-\epsilon\mu\omega^2 \Pi_a \mathbf{k})$$

(3) La conduttività  $\gamma$  è stata conglobata, come si fa spesso, nella cosiddetta costante dielettrica complessa  $\epsilon$ , di cui, com'è noto, la parte reale vale la costante dielettrica ordinaria e la parte immaginaria  $-\gamma/\omega$ .

relazione certamente soddisfatta se:

$$(5) \quad \Delta' \Pi_a \mathbf{k} + \varepsilon \mu \omega^2 \Pi_a \mathbf{k} = 0.$$

Ricordando che  $\Delta' \Pi_a \mathbf{k} = \Delta \Pi_a \mathbf{k}$ , la (5) diventa:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \Pi_a}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Pi_a}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_a}{\partial r} + \varepsilon \mu \omega^2 \Pi_a = 0.$$

Supposto il dipolo nel punto Q di coordinate  $r=0$ ,  $z=z_0$ , si ha che per  $z$  tendente a  $z_0$  ed  $r$  tendente a zero,  $\Pi_a$  deve tendere al valore che compete a questa grandezza se in Q vi fosse un dipolo elettrico verticale immerso in un mezzo omogeneo di costante dielettrica e permeabilità uguali ai valori di queste grandezze in Q.

Inoltre nell'interno della terra possiamo ancora scrivere le (3) e (4) dove in luogo di  $\Pi_a$  si pone  $\Pi'_a$  ed in luogo di  $\varepsilon$ ,  $\mu$  la costante dielettrica complessa  $\varepsilon'$  e la permeabilità  $\mu'$  della terra, grandezze che si suppongono costanti;  $\Pi'_a$  soddisfa la (6) salvo la sostituzione di  $\varepsilon'$ ,  $\mu'$  a  $\varepsilon$ ,  $\mu$ .

Dalla continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico, per  $z=0$ , si ha:

$$\frac{\partial \Pi_a}{\partial z} = \frac{\partial \Pi'_a}{\partial z} \quad \varepsilon(0) \Pi_a = \varepsilon'(0) \Pi_a.$$

Abbiamo così esposto le condizioni a cui deve soddisfare  $\Pi_a$ . Ad esse bisogna aggiungere ovvie condizioni di convergenza all'infinito.

3. Ricordando che  $\varepsilon_0$  è il valore di  $\varepsilon$  per  $z$  uguale a  $z_0$ , seguendo il Graffi, poniamo, per  $z > 0$ :

$$(7) \quad \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu \omega^2 \Pi \mathbf{k} + \varepsilon_0 \text{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon} \text{div} \Pi \mathbf{k} \right)$$

$$(8) \quad \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \text{rot} \Pi \mathbf{k}$$

con  $\Pi = \Pi(r, z)$ . Invece per  $z < 0$ , poniamo:

$$(9) \quad \mathbf{E} = \varepsilon' \mu' \omega^2 \Pi' \mathbf{k} + \text{grad} \text{div} \Pi' \mathbf{k}$$

$$(10) \quad \mathbf{H} = j\omega \varepsilon' \text{rot} \Pi' \mathbf{k}$$

dove è ancora  $\Pi' = \Pi'(r, z)$ . Per quanto si è detto in principio, supporremo per  $0 \leq z \leq z_0 + \eta$  (con  $\eta$  numero positivo e del resto arbitrario) che il mezzo si possa considerare omogeneo cioè, per quei valori di  $z$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_0$  e  $\mu = \mu_0$  ( $\mu_0$  costante).

Allora ponendo, per  $z < z_0 + \eta$ ,  $\Pi = \Pi_a$ ,  $\Pi' = \Pi'_a$  la (6) risulta rigorosamente soddisfatta, i valori del campo elettromagnetico coincidono e sono perciò soddisfatte le equazioni di continuità alla superficie del suolo.

Resta da considerare la zona  $z > z_0 + \eta$  ove  $\varepsilon$  e  $\mu$  sono variabili. In questa zona la seconda equazione di Maxwell (2) è immediatamente soddisfatta come si verifica subito sostituendo (7) e (8) in (2) e tenendo presente che  $\text{grad} \mu \wedge \mathbf{k} = 0$ .

La prima equazione di Maxwell diventa:

$$\operatorname{rot} (j\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \Pi \mathbf{k}) = j\omega\varepsilon \left[ \varepsilon_0 \mu \omega^2 \Pi \mathbf{k} + \varepsilon_0 \operatorname{grad} \left( \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \Pi \mathbf{k} \right) \right]$$

ossia dividendo per  $j\omega\varepsilon_0$  e dopo semplici passaggi;

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \varepsilon \mu \omega^2 \Pi = 0.$$

Posto:

$$(12) \quad \Pi(r, z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \Pi_1(r, z)$$

sostituendo in (11), si ottiene dopo qualche semplificazione:

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} + \left[ \varepsilon \mu \omega^2 - \frac{3}{4\varepsilon^2} \left( \frac{d\varepsilon}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2} \right] \Pi_1 = 0.$$

Ora  $\varepsilon \mu \omega^2$  vale  $4\pi^2/\lambda^2$  perciò il rapporto fra i due ultimi termini che moltiplicano  $\Pi_1$ , e il primo sono dell'ordine di  $\left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \right)^2$ ,  $\frac{\lambda^2}{\varepsilon} \frac{d^2 \varepsilon}{dz^2}$ , quantità che abbiamo supposto trascurabili per ipotesi. Si ha così che  $\Pi_1$  soddisfa alla stessa equazione (6) di  $\Pi_a$  sicché la (11) resta soddisfatta per  $z > z_0 + \eta$  dal valore di  $\Pi$  espresso dalla (12).

Questo valore di  $\Pi$ , per  $z = z_0 + \eta$  coincide col valore di  $\Pi_a$ , e così accade delle sue derivate prime perché  $d\varepsilon/dz$  si suppone continua. Perciò le componenti tangenziali di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  sono per  $z = z_0 + \eta$  continue, conforme alle proprietà generali del campo elettromagnetico. Ovviamente per  $z < z_0 + \eta$  i due campi calcolati con i due metodi coincidono, perciò, come si disse, i risultati di Freehafer valgono, per questi valori di  $z$ , in ipotesi meno restrittive.

4. Passiamo ora al confronto fra il campo  $\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{H}_a$  calcolato con le formule (3), (4) e quello  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  calcolato con (7), (8) nella regione in cui  $\varepsilon$  e  $\mu$  sono variabili.

Sostituendo (12) nella (8) e scrivendo, per quanto si è detto,  $\Pi_a$  al posto di  $\Pi_1$ , si ha:

$$\mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \Pi_a \mathbf{k} \right) = j\omega\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \operatorname{rot} \Pi_a \mathbf{k} + j\omega\varepsilon_0 \operatorname{grad} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \wedge \Pi_a \mathbf{k}$$

e tenuto conto della (4) e che  $\operatorname{grad} \sqrt{\varepsilon}$  è parallelo a  $\mathbf{k}$ , si conclude che:

$$(13) \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \mathbf{H}_a.$$

Questa relazione dimostra come, specie nella ionosfera, in cui  $\varepsilon$  può essere abbastanza differente da  $\varepsilon_0$ , i due valori di  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{H}_a$  possano essere sensibilmente diversi.



Calcoliamo il valore dei campi elettrici. Dalla prima equazione di Maxwell (1), ricordando (13) e poi (4), si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \mathbf{H}_a \right) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} j\omega\varepsilon \operatorname{rot} \Pi_a \mathbf{k} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi_a \mathbf{k} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{grad} \varepsilon \wedge \operatorname{rot} \Pi_a \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Da cui sempre tenendo presente (3) e (4)

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \mathbf{E}_a - \frac{j\sqrt{\varepsilon_0}}{2\omega\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}} \operatorname{grad} \varepsilon \wedge \mathbf{H}_a$$

e questa formula permette il calcolo di  $\mathbf{E}$  noti  $\mathbf{E}_a$  ed  $\mathbf{H}_a$ .

**Chimica fisica.** — *Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina.* — Parte I: *Velocità di benzoilazione delle cloronaftilammine* (\*). Nota di MASSIMO SIMONETTA e SERGIO CARRÀ, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

Nella presente Nota sono esposti alcuni risultati ottenuti nel corso delle nostre ricerche riguardanti la distribuzione degli elettroni mobili nelle monoclоронаftaline.

Precisamente abbiamo studiato la velocità di benzoilazione dei composti seguenti: 1 ammino-2 cloronaftalina, 1 cloro-2 amminonaftalina, 1 ammino-4 cloronaftalina, 2 ammino-4 cloronaftalina, 2 ammino-6 cloronaftalina, 1 ammino-5 cloronaftalina, 1 ammino-8 cloronaftalina, 1 ammino-3 cloronaftalina e la 7 cloro-1 amminonaftalina.

Per alcuni di questi prodotti la velocità di reazione è risultata talmente bassa da non poter essere praticamente misurata, almeno nelle nostre condizioni sperimentali. In tabella I sono riportate le costanti di velocità di reazione da noi determinate, in benzolo e alla temperatura di 25°C, e quelle per l'-α e la β-naftilammia, determinate da Stubbs e Hinshelwood [1], in condizioni identiche.

Si nota che le costanti K di tutte le cloronaftilammie da noi studiate hanno un valore inferiore a quello delle naftilammie non clorurate. Dai valori riportati nella tabella sono state calcolate le costanti σ di Hammett, mediante la relazione  $\lg K/K_0 = \sigma\rho$ , dove per ρ abbiamo adottato il valore 1,219 calcolato da Jaffè [2] dai dati di Williams, e Hinshelwood [3].

I valori ottenuti sono raccolti in tabella II.

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la laurea in chimica industriale dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

TABELLA I.

C o m p o s t i		$K_{25^0}$ (moli/l/sec.)
1)	1 ammino-4-cloronaftalina . . . . .	$1,37 \times 10^{-3}$
2)	2 ammino-4-cloronaftalina . . . . .	$1,83 \times 10^{-3}$
3)	2 ammino-6-cloronaftalina . . . . .	$5,6 \times 10^{-3}$
4)	1 ammino-5-cloronaftalina . . . . .	$1,17 \times 10^{-3}$
5)	1 ammino-8-cloronaftalina . . . . .	$9,63 \times 10^{-4}$
6)	1 ammino-3-cloronaftalina . . . . .	$3,37 \times 10^{-4}$ <sup>(1)</sup>
7)	$\alpha$ naftilammina . . . . .	$1,04 \times 10^{-2}$
8)	$\beta$ naftilammina . . . . .	$5,12 \times 10^{-2}$

(1) Calcolato mediante l'equazione di Arrhenius dai valori per temperature più elevate.

TABELLA II.

C o m p o s t i	$\sigma$	$q_s$	$q_{\text{teor.}}$
1 ammino-4-cloronaftalina . . . . .	— 0,722	1,0465	1,07674
2 ammino-4-cloronaftalina . . . . .	— 1,187	1,0765	0,99324
2 ammino-6-cloronaftalina . . . . .	— 0,79	1,0509	1,0188
1 ammino-5-cloronaftalina . . . . .	— 0,78	1,05032	1,01412
1 ammino-8-cloronaftalina . . . . .	— 0,8477	1,05469	0,98892
1 ammino-3-cloronaftalina . . . . .	— 1,223	1,0789	0,9924

Nella seconda colonna della stessa tabella sono riportati i valori delle densità elettroniche nel nucleo della naftalina calcolati attraverso la relazione di Jaffe:

$$\sigma = 15,5 (1 - q).$$

La terza colonna infine riporta i valori delle densità  $q_{\text{teor.}}$  determinate da J. A. A. Ketelaar e G. W. Van Oosterhout [4]. Detti Autori hanno condotto i loro calcoli secondo il noto procedimento standard «M. O. —L. C. A. O.» usando i seguenti valori dei parametri in gioco: integrale di sovrapposizione  $S = 0$  per legami fra atomi non adiacenti,  $= 1$  per legami fra atomi adiacenti;

integrale coulombiano = 0 per l'atomo di carbonio, = 1,5 per l'atomo di cloro. Integrale di scambio  $\beta$  nullo per legami fra atomi non adiacenti ed uguale per legami fra atomi adiacenti. Inoltre questo valore comune è stato fissato in modo da far coincidere il salto energetico tra lo stato fondamentale e il primo livello eccitato nella naftalina calcolato e quello determinato per via spettroscopica.

L'accordo fra le  $q_s$  e le  $q_{\text{teor.}}$  non è molto buono. Ciò si deve in parte attribuire al fatto che il metodo «M. O. - L. C. A. O.» standard è troppo approssimato. Inoltre è dubbio che la teoria di Hammett si possa applicare, almeno nella sua forma più semplice, ai derivati della naftalina. Abbiamo pertanto in corso misure cinetiche e di costanti di equilibrio atte a fornire maggiori informazioni sulla distribuzione degli elettroni  $\pi$  in queste molecole.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Preparazione dei prodotti.* - L' $\alpha$ -naftilammina acetilata e nitrata [5] dà due isomeri col nitrogruppo nelle posizioni 2 e 4. I due isomeri dopo disacetilazione per trattamento con acido solforico al 50% in alcool metilico, vengono separati per trattamento con acido cloridrico. La 4-nitro-1-naftilammina viene diazotata e sottoposta a reazione di Sandmayer [6]. L'1-cloro-4-nitronaftalina ottenuta viene ridotta [7] con cloruro stannoso a 4-cloro- $\alpha$ -naftilammina, p. f. 98°C.

La 2-nitro-naftilammina si diazota e si sottopone a reazione di Sandmayer [6]. L'1-cloro-2-nitronaftalina viene ridotta [7] con cloruro stannoso. Si ottiene l'1-cloro-2-naftilammina, p. f. 60°C.

La 4-nitro- $\alpha$ -naftilammina dopo acetilazione viene clorurata [7] con cloro in soluzione acetica. Si ottiene la 4-nitro-2-cloro-1-acetonaftalide. Questa viene disacetilata e l'ammina ottenuta viene diazotata in soluzione acetica e trattata con alcool etilico ottenendosi la 3-cloro-1-nitronaftalina che viene ridotta con stagno e acido cloridrico. Si ottiene la 3-cloro- $\alpha$ -naftilammina, p. f. 62°C.

La 2-nitro- $\alpha$ -naftilammina viene acetilata e clorurata ottenendosi dopo disacetilazione la 2-nitro-4-cloro- $\alpha$ -naftilammina che viene diazotata e trattata con alcool etilico. La 2-nitro-4-cloronaftalina viene successivamente ridotta con stagno e acido cloridrico ottenendosi la 4-cloro- $\beta$ -naftilammina, p. f. 68°C.

L' $\alpha$ -naftilammina viene sciolta in acido solforico concentrato (8) e nitrata con  $\text{KNO}_3$  ottenendosi una miscela dei solfati della 5-nitro  $\alpha$ -naftilammina e 8-nitro  $\alpha$ -naftilammina.

Il primo isomero separato per estrazione con acido cloridrico al 10% viene diazotato e sottoposto alla reazione di Sandmayer [6] e successivamente ridotto con cloruro stannoso. Si ottiene la 5-cloro- $\alpha$ -naftilammina, p. f. 85°C.

Il secondo isomero viene assoggettato alle medesime reazioni ottenendosi l'8-cloro- $\alpha$ -naftilammina, p. f. 91°C.

La  $\beta$ -naftilammina viene acetilata e nitrata [9] [10] ottenendosi una miscela degli isomeri 1,6,8,-nitro che vengono separati. Ciascuno dei prodotti separati sottoposto a diazotazione, reazione di Sandmayer [6] e successiva riduzione con cloruro stannoso dà rispettivamente:

6-cloro- $\beta$ -naftilammina . . . . . p.f. 120° C

7-cloro- $\alpha$ -naftilammina . . . . . » 69° C

2-cloro- $\alpha$ -naftilammina . . . . . » 66° C

*Misure cinetiche.* — Sono state impiegate rispettivamente una soluzione 0,0125 N di cloro-naftilammina in benzolo puro e una 0,025 N di cloruro di benzoile in benzolo puro. Il controllo della insolubilità e della precipitazione istantanea dei cloridrati delle cloronaftilammina formatesi nella reazione, è stato condotto nel seguente modo: un quantitativo della prima soluzione è stato aggiunto ad una soluzione di acido cloridrico secco in benzolo. La quantità di acido cloridrico era in eccesso rispetto all'ammina. Immediatamente si è formato un precipitato del cloridrato dell'ammina che è stato raccolto su un setto poroso, lavato con benzolo e sciolto in acqua distillata. La soluzione risultante è stata titolata secondo Vohlard ottenendosi una quantità di cloro esattamente corrispondente a quella calcolata per precipitare l'ammina. Questa prova è stata condotta su tutti i prodotti da noi preparati.

TABELLA III.

6-cloro $\beta$ -naftilammina		— temp. 90° C
135	20	$3,08 \times 10^{-3}$
170	23,2	$2,96 \times 10^{-3}$
230	28,7	$2,92 \times 10^{-3}$
252	30,4	$2,9 \times 10^{-3}$
272	32,4	$2,93 \times 10^{-3}$

Le cinetiche sono state eseguite in tubi di vetro chiusi alla fiamma nei quali venivano posti 20 cc di soluzione di ammina e 5 cc di soluzione di cloruro di benzoile. L'arresto della reazione veniva realizzato raffreddando i tubi per circa 2 minuti in ghiaccio. Si filtrava quindi su un setto poroso si lavava con benzolo (60 cc) e successivamente con acqua (120 cc). Sulla soluzione acquosa ottenuta veniva infine fatta l'analisi del cloro col metodo Vohlard.



TABELLA IV.

*Costanti di velocità di reazione delle cloronaftilammine.*

Composti	15°C	25°C	35°C	40°C	55°C	65°C	70°C	$E_A \frac{\text{k cal}}{\text{mol}}$
		$1,37 \times 10^{-3}$		$2,5 \times 10^{-3}$	$3,54 \times 10^{-3}$			6,05
		$1,83 \times 10^{-3}$		$3,07 \times 10^{-3}$	$5,1 \times 10^{-3}$			6,5
						$1,09 \times 10^{-3}$	$1,31 \times 10^{-3}$	7,43
	$2,96 \times 10^{-3}$	$5,61 \times 10^{-3}$	$1,063 \times 10^{-2}$					11,45
		$1,17 \times 10^{-3}$		$2,23 \times 10^{-3}$	$3,89 \times 10^{-3}$			7,7
		$9,63 \times 10^{-4}$		$18,35 \times 10^{-4}$	$33,1 \times 10^{-4}$			9,52

Un esempio tipico delle cinetiche ottenute è riportato nella tabella III dove le colonne indicano rispettivamente:

1° il tempo in minuti

2° la percentuale di sostanza reagita

3° la costante K di reazione (moli/l/sec.) calcolata applicando la formula:

$$K = \frac{1}{260t} \left[ \frac{1}{100-x} - \frac{1}{100} \right] \cdot \frac{100}{a}$$

dove:

$a = 0,005$

$x$  è la percentuale di ammina reagita

$t$  è il tempo in minuti.

Nella tabella IV sono riassunti per brevità i valori delle costanti (moli/l/sec.) ottenuti. Per ogni composto è anche riportata l'energia di attivazione calcolata con l'equazione di Arrhenius.

Tre dei prodotti preparati, precisamente la 1-cloro- $\beta$ -naftilammina, la 2-cloro- $\alpha$ -naftilammina e la 7-cloro- $\alpha$ -naftilammina trattati con cloruro di benzoile a 70° C per 24 ore non hanno dato una quantità apprezzabile di precipitato.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. J. STUBBS, C. N. HINSHELWOOD, « J. C. S. », S. 71 (1949).
- [2] H. H. JAFFÈ, « Chem. Rev. », 191 (1953).
- [3] E. G. WILLIAMS, C. N. HINSHELWOOD, « J. C. S. », 1079 (1934).
- [4] J. A. A. KETELAAR e G. W. VAN OOSTERHOUT, « Rec. Trav. Chim. », 448 (1946).
- [5] H. H. HODGSON, J. WALKER, « J. C. S. », 1205 (1933).
- [6] H. H. HODGSON, J. WALKER, « J. C. S. », 1620 (1933).
- [7] H. H. HODGSON, R. L. ELLIOT, « J. C. S. », 1850 (1935).
- [8] H. H. HODGSON, W. DAVEY, « J. C. S. », 348 (1939).
- [9] C. R. SAUNDERS, C. S. HAMILTON, « J. A. S. C. », 54, 636 (1932).
- [10] C. R. SAUNDERS, C. S. HAMILTON, « J. A. C. S. », 56, 2408 (1934).

**Geologia.** — *Sull'esistenza, nei dintorni del Piccolo S. Bernardo, di un elemento tettonico riferibile al ricoprimento del Pas du Roc* <sup>(\*)</sup>.  
Nota di GIULIO ELTER e PIERO ELTER, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio GB. DAL PIAZ.

È oggi generalmente ammesso che le formazioni della regione del Piccolo S. Bernardo, inserite tra la zona brianzonese e la zona delle Brecce di Tarantasia <sup>(1)</sup>, costituiscano una unità indipendente: la zona del Piccolo S. Bernardo o zona del Versoyen. H. Schoeller (1929) ne indicò per primo l'esistenza e ne dimostrò l'indipendenza tettonica e stratigrafica dalle formazioni ora

(\*) Lavoro eseguito con il contributo finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) O zona di Courmayeur.

riferite alla zona delle Breccie di Tarantasia, ma non escluse che potesse trattarsi di un elemento brianzonese. Anche F. Hermann (1938) attribuì una parte delle sue formazioni alla copertura mesozoica del Permocarbonifero brianzonese, conservando solo per l'altra un precedente riferimento ai calcescisti con pietre verdi del ricoprimento del Piemonte (F. Hermann, 1930). L'indipendenza tettonica e stratigrafica della zona del Piccolo S. Bernardo anche dalla zona brianzonese fu stabilita in modo definitivo da R. Barbier (1948), quale risultato indiretto delle sue ricerche sulla zona sub-brianzonese tra l'Arc e l'Isère.

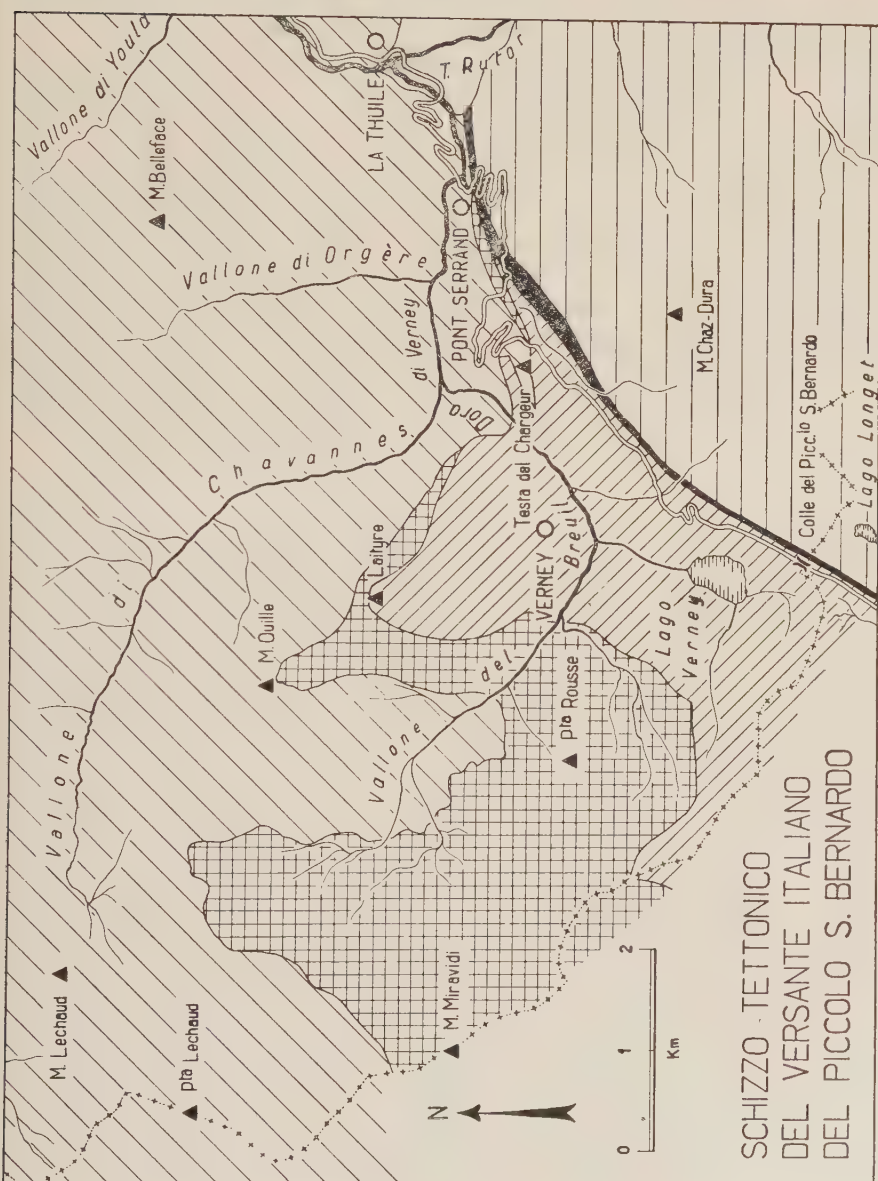
La posizione strutturale della zona del Piccolo S. Bernardo è ancora da chiarire. Per molti <sup>(2)</sup> si tratterebbe di un lembo di ricoprimento, involuto alla fronte della zona brianzonese ed appartenente ad una unità più interna rispetto a quest'ultima; ricoprimento dei calcescisti di P. Termier, ricoprimento del Piemonte di F. Hermann. Da altri <sup>(3)</sup> essa viene invece considerata come un elemento radicato, equivalente lontano dei calcescisti del Sempione, e proveniente quindi da una unità esterna rispetto alla falda del Gran S. Bernardo.

Abbiamo già avuto occasione di occuparci della zona del Piccolo S. Bernardo (P. Elter, 1954; G. Elter, 1955). Uno di noi in particolare (P. Elter, 1954) aveva compiuto anche ricerche dettagliate soprattutto per quanto concerne la natura e la posizione del limite di questa zona con quella delle Breccie di Tarantasia in territorio italiano, limite allora mal conosciuto perchè non indicato sulla carta italiana al 100.000 e tracciato in modo molto inesatto su di una carta a scala maggiore di F. Hermann (1930). In seguito abbiamo intrapreso nuove ricerche su tutta la zona tra La Thuile e la cresta di confine. Alcuni risultati di esse ci inducono ora a modificare l'interpretazione generalmente accettata, ed adottata anche da noi in precedenza, secondo la quale la zona del Piccolo S. Bernardo è costituita da un unico elemento tettonico. In realtà ve ne sono due ben distinti. Il primo soltanto corrisponde alla zona del Piccolo S. Bernardo secondo l'attuale concezione. Il secondo è riferibile alla parte mediana della zona sub-brianzonese (ricoprimento del Pas du Roc).

Il termine di zona del Piccolo S. Bernardo deve però essere abbandonato per indicare il primo di essi e sostituito con quello di zona del Versoyen; le formazioni che affiorano nei dintorni del colle appartengono infatti al secondo. La zona del Versoyen è ovviamente meno estesa di quanto si ritenesse (vedi lo schizzo tettonico allegato). Essa è costituita dalle estese e numerose masse di ofioliti (prasiniti e serpentine) dei valloni del Versoyen e del Breuil, dalle filladi nere e verdastre, raramente calcarifere, che le inglobano, e dalle rocce verosimilmente pretriassiche (gneiss, filladi, arcose) della Punta Rousse. La sommità indicata con tale nome è formata da una

(2) Fra cui P. Termier, F. Hermann e R. Barbier.

(3) H. Schoeller e, recentemente, R. Trümpy.



Scala numerica 1:75,000

- 1) Quaternario; 2) Zona Brianzonese; 3) Fascia di gessi al limite esterno della zona Brianzonese; 4) Digitazione della Grande Moenda; 5) Zona del Versoyen; 6) Zona delle Breccie di Tarantasia; 7) Confine italo-francese.



grossa lente di quest'ultime rocce, a cui si aggiungono altre lenti minori; sono tutte poco estese in senso laterale e si presentano come delle scaglie strappate dal loro substrato e tettonicamente inglobate nelle altre formazioni della zona. H. Schoeller (1929) riferisce al Trias le ofioliti e le filladi ad esse associate per la loro situazione tra gli gneiss della Punta Rousse e la serie dei calcescisti a Belemniti del Lago e dell'Alpe di Verney. In realtà questi ultimi coprono tettonicamente le prime ed appartengono al secondo elemento tettonico da noi distinto. Cade quindi ogni ragione per riferirle al Trias. Per l'analogia di insieme che esse presentano con la formazione dei calcescisti ad ofioliti delle Alpi Occidentali un'età giurese appare più probabile.

La zona del Versoyen è ovunque tettonicamente inserita tra le formazioni della zona delle Brecce di Tarantasia, che ricopre, e quelle appartenenti al secondo elemento tettonico da noi distinto, sotto alle quali essa si immerge. Di notevole potenza nella regione della Punta Rousse essa si riduce fino a laminazione totale in senso laterale verso Est. Anche il secondo elemento tettonico, che la ricopre, subisce un'analoga e parallela riduzione. In prossimità delle località in cui entrambi tendono alla laminazione completa la distinzione delle formazioni appartenenti alle diverse unità in contatto diventa difficile <sup>(4)</sup>. Questo caso si presenta, in particolare, per un complesso di filladi che affiorano tra Pont Serrand e la Testa del Chargeur. Non avendone ancora completato lo studio petrografico lo riferiamo alla zona del Versoyen solo provvisoriamente.

Il secondo elemento tettonico da noi distinto è costituito da terreni mesozoici distaccati dal loro substrato a livello del Trias superiore. Infatti, eccettuata qualche lente di calcare dolomitico, riferibile al Trias medio e che corrisponde senza dubbio a scaglie sradicate dal substrato e trascinate con la copertura, non esistono nella sua serie stratigrafica formazioni più antiche del Trias superiore. La parte essenziale della serie è rappresentata dal complesso dei calcescisti a Belemniti, noto per i reperti paleontologici di S. Franchi (1899). Si tratta di un insieme monotono e di grande potenza di calcari cristallini scuri, più o meno scistosi, e di scisti calcarei nerastri. I primi formano delle intercalazioni negli scisti alla sua base ed alla sua sommità; più fini, serrate e regolari nel primo caso, più potenti e distanziate nel secondo. Nel resto del complesso prevalgono facies nettamente scistose. La sua base stratigrafica è rappresentata da una serie, che non supera i 100 metri di spessore, costituita dal basso in alto da carnioli e scisti varicolori del Trias superiore, da pochi metri di dolomie a patina giallastra entro a cui si intercalano calcari spatici scuri e scisti argillosi neri, e da circa 70 metri di calcari cristallini da grigi ad azzurrastrati, caratterizzati nella loro parte superiore da filaretti selciosi metamorfosati. In diversi punti si possono notare passaggi stratigrafici tra i diversi termini di questa serie, come pure tra i calcari a selci ricristallizzate ed i calcescisti a Belemniti. In nessuna delle formazioni

(4) Anche per la presenza in questa zona di faglie e pieghe trasversali. Queste ultime furono segnalate da Gb. Dal Piaz (1949).

che costituiscono l'elemento tettonico considerato esistono intercalazioni di ofioliti. Le rocce costituenti la base stratigrafica dei calcescisti a Belemniti sono, in territorio italiano, limitate ai due margini di questo elemento tettonico, lungo i due limiti che lo separano dalla zona brianzonese e dalla zona del Versoyen. Entrambi i limiti corrispondono a superfici di contatto anormale. Nel primo caso queste rocce, in serie inversa, si immergono sotto al Permocarbonifero brianzonese, ma ne sono sempre separate da una fascia continua, per quanto irregolare nello spessore, di gessi. È da escludere quindi che esse possano rappresentare la copertura normale triassica del Permocarbonifero come ritenevano gli autori che in precedenza si sono occupati di questa regione <sup>(5)</sup>. Nel secondo caso queste rocce, in serie normale, sono situate immediatamente al disopra della superficie di accavallamento lungo la quale la zona del Versoyen si immerge sotto l'elemento tettonico di cui stiamo parlando. Ciò si verifica però solo sul versante sinistro del Vallone del Breuil; sull'opposto versante esse mancano completamente, o quasi, per laminazione e, in più di un punto, i calcescisti a Belemniti sono situati già alla base del secondo elemento tettonico, coprendo direttamente, con contatto anormale, le formazioni della zona del Versoyen. Questo avviene in particolare sulla cresta di confine dove, alla base dei calcescisti a Belemniti, affiora un conglomerato calcareo descritto da H. Schoeller (1929), già conosciuto in questa posizione tettonica per altre zone del versante francese, ma che manca invece in quello italiano. H. Schoeller riteneva che questo conglomerato costituisse la base stratigrafica dei calcescisti a Belemniti e la copertura normale del sottostante complesso ofiolitifero della zona del Versoyen. In realtà, come si è visto, formazioni molto diverse da questa costituiscono la base dei calcescisti a Belemniti. La loro mancanza per laminazione indica qui la natura tettonica del contatto tra il conglomerato e la zona del Versoyen. Nei pressi del Laityre le rocce che rappresentano la base stratigrafica dei calcescisti a Belemniti sono particolarmente ben sviluppate. Uno di noi (P. Elter 1954) le aveva considerate come delle scaglie della zona delle Brece di Tarantasia tettonicamente incluse nelle formazioni della zona del Piccolo S. Bernardo. Questo perchè i calcescisti a Belemniti ed il complesso ofiolitifero della zona del Versoyen, tra i quali esse sono inserite, venivano allora da tutti riferiti ad una sola unità tettonica e le rocce in questione presentano un'analogia litologica notevole con le formazioni coeve della zona delle Brece di Tarantasia. In seguito avevamo osservato che le rocce affioranti al Laityre appartengono ad un orizzonte continuo, che si riunisce ad E della Testa del Chargeur alla fascia, costituita dalle stesse formazioni, che decorre lungo il margine nord-occidentale della zona brianzonese e che veniva confusa con la copertura stratigrafica del Permocarbonifero di questa zona. Avevamo allora interpretato l'orizzonte del Laityre come una digitazione esterna della zona brianzonese (G. Elter 1955; P. Elter in R. Malaroda 1956). Entrambe queste interpretazioni devono venir ora abbandonate.

(5) S. Franchi ed F. Hermann in special modo.

Il secondo elemento tettonico da noi distinto nelle formazioni che erano attribuite alla zona del Piccolo S. Bernardo appare ovunque inserito tra la zona brianzonese e la zona del Versoyen. Esso si immerge sotto alla prima unità e ricopre tettonicamente la seconda. In alcuni punti situati alla sua estremità orientale, ove la zona del Versoyen è già completamente laminata, è in contatto tettonico diretto con la zona delle Brecce di Tarantasia.

Questo secondo elemento tettonico che noi distinguiamo nei terreni della regione del Piccolo S. Bernardo rappresenta, con ogni probabilità, la riapparizione, nel settore in esame, della digitazione della Grande Moenda del ricoprimento del Pas du Roc. La sua serie stratigrafica presenta infatti una spiccatissima analogia con quella descritta da R. Barbier (1948), come caratteristica della digitazione della Grande Moenda. Entrambe le serie iniziano con il Trias superiore; si nota poi una corrispondenza litologica quasi perfetta, per quanto riguarda le facies primarie tra le dolomie con intercalazioni di calcari scuri e di scisti argillosi neri ed i calcari a liste silicee da una parte, il Retico ed il Lias inferiore della digitazione della Grande Moenda dall'altra. Il confronto è valido anche per quanto riguarda la formazione dei calcescisti a Belemniti del Piccolo S. Bernardo ed il Lias medio-superiore ed il Dogger della serie francese. Queste corrispondenze permettono, da una parte, di riferire al Retico, al Lias, ed al Dogger i vari termini che, con il Trias superiore, costituiscono la serie dell'elemento tettonico da noi distinto, e di affermare dall'altra che, con ogni probabilità, esso è costituito da formazioni analoghe come età e facies a quelle che caratterizzano la digitazione della Grande Moenda. Esistono è vero delle differenze nel grado di metamorfismo, indiscutibilmente maggiore nella prima serie e praticamente nullo nella seconda. Differenze analoghe si notano però, sulla stessa distanza, in terreni senza dubbio stratigraficamente corrispondenti, di unità tettoniche vicine: nelle formazioni appartenenti alla zona brianzonese, per esempio, o in quelle della zona delle Brecce di Tarantasia.

L'elemento tettonico da noi distinto presenta inoltre una notevole analogia dal punto di vista tettonico con quelli costituenti il ricoprimento del Pas du Roc; tutti sono stati scollati a livello del Trias superiore da un substrato che non è conosciuto. La regione in esame potrà dare forse qualche indicazione sulla natura e sulla posizione di questo substrato; ci riserviamo di riprendere eventualmente questo problema a lavoro ultimato. Per ora ci limitiamo ad avanzare l'ipotesi che l'elemento tettonico inserito tra la zona del Versoyen e la zona brianzonese nei dintorni del Piccolo S. Bernardo appartenga alla zona sub-brianzonese mediana <sup>(6)</sup> e rappresenti la ricomparsa, in questo settore, della digitazione della Grande Moenda del ricoprimento del Pas du Roc. L'ipotesi ci sembra plausibile anche perchè l'elemento tettonico

(6) Viene qui mantenuta la classificazione delle unità pennidiche esterne adottata da R. Barbier. La zona delle Brecce di Tarantasia viene cioè considerata come appartenente alla parte esterna della zona sub-brianzonese.



della regione del Piccolo S. Bernardo appare a soli 12 Km., in linea d'aria, dalla zona in cui la digitazione della Grande Moenda scompare per laminazione, e ne occupa l'identica posizione strutturale.

La zona del Versoyen è inserita tra due unità sub-brianzonesi, e non tra la zona brianzonese e quella sub-brianzonese come si era fino ad oggi creduto. Questo conferma in parte una recente ipotesi di R. Trümpy (1955, p. 220). Non crediamo però che con ciò si debba senz'altro ammettere che la zona del Versoyen sia radicata tra le due unità della zona sub-brianzonese. Una simile possibilità non è certo da escludere, ma esistono anche dati di osservazione in favore dell'ipotesi del lembo di ricoprimento pizzicato in un secondo tempo tra la zona delle Breccie di Tarantasia e l'elemento tettonico riferibile alla digitazione della Grande Moenda. Il problema della posizione strutturale della zona del Versoyen rimane quindi ancora aperto.

Avremo occasione, a lavoro ultimato, di riprendere questi ed altri aspetti minori del problema geologico della regione del Piccolo S. Bernardo. In questa Nota ci siamo limitati a comunicare alcuni risultati preliminari delle nostre ricerche, che ci auguriamo di poter concludere in un prossimo futuro.

#### OPERE CITATE.

- BARBIER R. (1948), *Les zones ultra-dauphinoise et subbriançonnaise entre l'Arc et l'Isère*, «Mém. Carte Géol. Fr.», 291 pp., 7 tt., 62 ff. n. t., 1 carta geol. alla scala 1 : 50.000.
- DAL PIAZ GB. (1949), *Nuova scaglia di Trias e pieghe trasversali dei calcescisti nella gola della Dora di Verney presso Chapontaille (Alta Val d'Aosta)*, «Ann. Hébert et Haug», 7, 133-141.
- ELTER G. (1955), *Nuovi risultati del rilevamento dei fogli Monte Bianco e Aosta*, «Boll. Serv. Geol. It.», 76, 477-479.
- ELTER P. (1954), *Etudes géologiques dans le Val Veni et le Vallon du Breuil*. Thèse n. 1200, Genève, 38 pp., 2 tt., 2 ff. n. t.
- FRANCHI S. (1899), *Nuove località con fossili mesozoici nella zona delle pietre verdi presso il Colle del Piccolo San Bernardo (Valle d'Aosta)*, «Boll. Com. Geol. It.», 30, 303-324, t. 3.
- HERMANN F. (1930), *La regione del Piccolo S. Bernardo*, «Mem. Ist. Geol. Univ. Padova», 8, 72-80, 1 carta geol. alla scala 1 : 50.000, 1 schizzo tett.
- HERMANN F. (1938), *Carta geologica delle Alpi nord-occidentali 1 : 200.000*. Milano, Tip. U. Aleghretti di Campi.
- MALARODA R. (1956), *L'Istituto di Geologia dell'Università di Torino. Attività svolta durante l'anno 1955*, «La Ric. Scient.», 26, 2439-2447.
- SCHOELLER H. (1929), *La nappe de l'Embrunais au Nord de l'Isère*, «Bull. Carte Géol. Fr.», 33, 488 pp., 10 tt., 32 ff. n. t.
- TRÜMPY R. (1955), *Remarques sur la corrélation des unités penniques externes entre la Savoie et le Valais et sur l'origine des nappes préalpines*, «Bull. Soc. Géol. Fr.», ser. 6, 5, 217-229.



**Citologia.** — *La sostituzione dell'idrolisi a caldo con l'idrolisi a temperatura ambiente (« idrolisi fredda ») nel metodo Feulgen (\*)*. Nota di E. BATTAGLIA, presentata (\*\*) dal Socio A. CHIARUGI.

In istologia e citologia l'applicazione del metodo Feulgen (Feulgen e Rossenbech, 1924) <sup>(1)</sup>, comporta un processo idrolitico (condizionante l'utilizzazione del reattivo di Schiff) generalmente ottenuto mediante un'idrolisi acida con 1 N·HCl a circa 60° C. Tale idrolisi a caldo è in pratica una complicazione non indifferente e, diremmo, anche teoricamente non necessaria.

Gli svantaggi dell'idrolisi a caldo particolarmente sensibili nel lavoro di routine, possono essere riassunti come segue:

1° Distacco delle sezioni dal portaoggetti (cfr. anche Itikawa e Ogura, 1954) <sup>(2)</sup>.

2° Estensione estremamente ridotta del tempo ottimale d'idrolisi (cfr. Di Stefano, 1948) <sup>(3)</sup>. Oltrepassato l'optimum la caduta d'intensità di colore nei tessuti procede assai rapidamente.

3° Necessità di attrezzatura (termostati, ecc.) per idrolizzare a caldo (60°).

L'Autore da tempo si è interessato all'applicazione del metodo Feulgen alla citologia vegetale e più particolarmente alla cariologia comparata, nella quale questo metodo, congiunto a tecniche cosiddette di pretrattamento, porta ad una perfetta individuazione dei più minuti particolari della morfologia cromosomica. In altri lavori, con riferimento a questo metodo, è stata presa in esame la preparazione del reattivo di Schiff (Battaglia 1951) <sup>(4)</sup> (si faccia l'interessante confronto fra tale preparazione e quella indipendentemente e contemporaneamente proposta da Lillie, 1951) <sup>(5)</sup>, la scelta

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa, Centro di Studio per la Citogenetica vegetale del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Firenze; pubblicazione n. 227.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) A. FEULGEN e ROSSENBECK, *Mikroskopisch-chemischer Nachweis einer Nucleinsäure vom Typus der Thymonucleinsäure und die darauf beruhende elektive Färbung von Zellkernen in Mikroskopischen Präparaten*, «Zts. Physiol. Chem.», 135, 203-248 (1924).

(2) O. ITIKAWA e Y. OGURA, *The Feulgen reaction after hydrolysis at room temperature*, «Stain Techn.», 29 (1), 13-15 (1954).

(3) H. S. DI STEFANO, *A cytochemical study of the Feulgen nucleal reaction*, «Chromosoma», 3, 282-301 (1948).

(4) E. BATTAGLIA, *Accorgimenti nella tecnica citologica relativa alla reazione di Feulgen*, «Caryologia», 3, 381-383 (1951).

(5) R. D. LILLIE, *Simplification of the manufacture of Schiff reagent for use in histochemical procedures*, «Stain. Techn.», 26, 163-165 (1951).

di un efficiente e rapido fissativo (Battaglia, 1957 a) <sup>(6)</sup> e l'applicazione del metodo agli strisci di sangue e di midollo osseo (Battaglia, 1957 b) <sup>(7)</sup>.

Nella presente Nota si prende in esame la possibilità di semplificare il procedimento sostituendo all'idrolisi a caldo l'idrolisi a temperatura ambiente, cioè una *idrolisi fredda*, in antitesi a quella usuale a 60° C., che potremmo chiamare *idrolisi calda*.

Poiché l'*idrolisi fredda* (a temperatura ambiente) è già stata sperimentata da altri autori, specialmente su tessuti animali, e con vari agenti idrolitici, ci siamo proposti di individuare, per quanto possibile, i tempi ottimali ed il più adatto agente idrolitico per materiale vegetale. A tal scopo abbiamo scelto un materiale classico quale gli apici radicali di *Allium Cepa* ed *Allium sativum* e successivamente abbiamo controllato se i tempi di idrolisi valevano pure per apici radicali di altre famiglie, tanto delle Monocotiledoni, quanto delle Dicotiledoni. Aggiungiamo subito che il controllo in parola ha dato risultati positivi, e quindi l'introduzione della *idrolisi fredda* e dei tempi qui determinati per apici radicali di Liliaceae, costituisce senz'altro una semplificazione del metodo Feulgen che si prospetta di applicazione generale, almeno in cariologia.

Fra i ricercatori che hanno sperimentato l'*idrolisi fredda*, ricordiamo i seguenti:

1° Johnson (1945) <sup>(8)</sup>. Questo autore per materiale vegetale propone la seguente scheda:

a) fissaggio in Carnoy: 30 minuti;

b) macerazione ed idrolisi con una soluzione composta di HCl conc. parti 1 + alcool etilico 95 % parti 1, applicata per 5-10 minuti;

c) lavaggio in acqua;

d) trasferimento dei tessuti in fucsina leucobasica (reattivo di Schiff) per 1 ora, ecc.

2° Di Stefano (1952) <sup>(9)</sup>. Questo autore utilizzò l'*idrolisi a freddo* (25°) con acido perclorico al 10%, con tempo ottimale d'idrolisi di 12 ore per pancreas di ratto, fissato in Carnoy (3,1).

Sezioni di 3 micron (pancreas di ratto) furono idrolizzate con acido perclorico al 10% ed a temperatura ambiente di 25° C. L'intensità di colore nei tessuti idrolizzati (e successivamente immersi in fucsina leucobasica) risultò progressivamente crescente col crescere del tempo d'idrolisi fino a ben 12 ore. Tale intensità massima di colore si mantenne inalterata prolun-

(6) E. BATTAGLIA, *A new « 5 minutes-fixation » in chromosome analysis*, « Caryologia », 9, n. 2 (1957).

(7) E. BATTAGLIA, *A 30 minutes procedure for staining blood and bone marrow smears by the Feulgen method*, « Science », in stampa.

(8) L. P. V. JOHNSON, *A rapid squash technique for stem and root tips*, « Canadian Jour. Res. Sect. C. Bot. Sci. », 23, 127-130 (1945).

(9) H. S. DI STEFANO, *Feulgen hydrolysis with perchloric acid*, « Stain Technol. », 27, 171-174 (1952).

gando a 24 ore il tempo di idrolisi e risultò non apprezzabilmente differente da quella ottenuta con la procedura classica (12 minuti con 1 N·HCl a 60°).

Il lunghissimo tempo ottimale d'idrolisi realizzato con l'uso dell'acido perclorico diluito e freddo (25°C) è tanto più utile e significativo in quanto già lo stesso Di Stefano (1948)<sup>(10)</sup> aveva dimostrato come nella usuale idrolisi a caldo (60°C), il tempo ottimale d'idrolisi è costituito da un periodo di tempo estremamente corto, oltrepassato il quale la caduta d'intensità di colore nei tessuti procede rapidamente.

3° Hashim (1953)<sup>(11)</sup>. Questo autore sperimentò l'*idrolisi fredda* (28° C.) con acido fosforico (40-75 %) con tempo ottimale d'idrolisi di 10 minuti, per tessuti di ratto, fissati in alcool e formalina (10 % formalina in alcool al 90 %).

Hashim osservò che l'intensità massima di colorazione, raggiunta dopo 10 minuti di idrolisi, si manteneva costante prolungando l'idrolisi fino a 50 minuti.

4° Pearson (1953)<sup>(12)</sup>. Questo autore, su materiale vegetale fissato in Carnoy (6, 3, 1) per 24 ore, adoperò una soluzione idrolizzante sostanzialmente identica a quella sopra riferita per Johnson (1945)<sup>(13)</sup> e cioè alcool a 95° 1 parte, HCl conc. 1 parte, acqua 2 parti, con tempo di idrolisi di 50 minuti.

5° Itikawa e Ogura (1953)<sup>(14)</sup>. Questi autori su materiale animale (tesuto epatico patologico) sperimentarono l'*idrolisi fredda* (temperatura ambiente di soli 12°C!) con acido nitrico ed acido cloridrico. Valori ottimali: 5 N·HCl e 5 N·HNO<sub>3</sub> per 10 minuti a 12°C.

Aggiungiamo che i due autori fissarono il materiale con Carnoy e precisarono in soli 4 minuti il tempo ottimale per l'idrolisi a caldo (60°C).

#### APPLICAZIONE DELL'IDROLISI FREDDA A MATERIALE VEGETALE.

Bauer (1932)<sup>(15)</sup> ed Hillary (1939)<sup>(16)</sup> hanno dimostrato che il tempo ottimale d'idrolisi è connesso al tipo di fissativo usato. Da quanto sopra ricordato risulta che gli autori che hanno usato idrolisi fredda su materiale

(10) H. S. DI STEFANO, *A cytochemical study of the Feulgen nucleal reaction*, «Chromosoma», 3, 282-301 (1948).

(11) S. A. HASHIM, *Feulgen hydrolysis with phosphoric acid*, «Stain Techn.», 28, 27-31 (1953).

(12) C. PEARSON, *Observations on interphase and prophase nuclei of root tips of einkorn wheat and onion*, «Canad. Jour. Bot.», 31, 527-530 (1953).

(13) L. P., V. JOHNSON, *A rapid squash technique for stem and root tips*, «Canadian Jour. Res. Sect. C. Bot. Sci.», 23, 137-130 (1945).

(14) O. ITIKAWA a Y. OGURA, *The Feulgen reaction after hydrolysis at room temperature*, «Stain Techn.», 29, 13-15 (1954).

(15) H. BAUER, *Die Feulgensche Nuklealfärbung in ihrer Anwendung auf cytologische Untersuchungen*, «Zts. Zellforsch. usw.», 15, 225-247 (1932).

(16) B. B. HILLARY, *Use of the Feulgen reaction in cytology. I. Effects of fixation on the reaction*, «Bot. Gaz.», 101, 276-300 (1939).

vegetale (cfr. Johnson, 1945, e Pearson, 1953)<sup>(17)</sup>, <sup>(18)</sup> hanno fissato il materiale con il fissativo di Carnoy (formula originale o formule modificate). Tale fissativo non è il migliore in cariologia sia per l'effetto disidratante, sia perché i cromosomi così fissati mostrano un aspetto alveolare.

Secondo lo scrivente è senz'altro preferibile il fissativo da lui suggerito e brevemente denominato 5, 1, 1, 1 (cfr. Battaglia, 1957. a)<sup>(19)</sup> il quale fra gli altri vantaggi richiede un brevissimo tempo di fissazione e cioè appena 5 minuti!

Questo fissativo, composto come segue:

alcool 95%: 5 parti,  
cloroformio: 1 parte,  
acido acetico glaciale: 1 parte,  
formalina: 1 parte,

da prepararsi preferibilmente al momento dell'uso, è economico, ha buona penetrazione, richiede, come già detto, un tempo brevissimo di fissaggio, e regolando opportunamente caso per caso il tempo di lavaggio del materiale fissato, permette di avere (dopo la permanenza in fucsina leucobasica), un citoplasma o del tutto incolore (lavaggio completo) od un citoplasma gradualmente più colorato (in roseo) a seconda dell'incompletezza (durata) del lavaggio stesso.

Su apici radicali di *Allium Cepa* fissati in 5, 1, 1, 1, per 5 minuti, e quindi direttamente trasferiti nella provetta contenente la soluzione idrolizzante, l'autore ha sperimentato idrolisi fredde (temperatura ambiente 27° C) con alcuni degli acidi più comuni, scegliendo per ulteriore praticità quale soluzione idrolizzante la soluzione concentrata dell'acido diluita a metà (1 a 1) con acqua distillata. I risultati ottenuti sono riassumibili come segue:

1° *Acido cloridrico*. Soluzione idrolizzante: acido cloridrico concentrato diluito 1 a 1 cioè approssimativamente al 18,5%. *Tempo ottimale di idrolisi: 20 minuti*. Intensità di colore dei cromosomi: rosso molto intenso.

2° *Acido nitrico*. Soluzione idrolizzante: acido nitrico concentrato diluito 1 a 1, cioè approssimativamente al 35%. *Tempo ottimale d'idrolisi: 10 minuti*. Intensità di colore dei cromosomi: rosso intenso.

3° *Acido fosforico*. Soluzione idrolizzante: acido fosforico concentrato, diluito 1 a 1, cioè approssimativamente al 42%. *Tempo ottimale d'idrolisi: 40 minuti*. Intensità di colore dei cromosomi: rosso. Quando gli apici radicali vengono idrolizzati secondo la scheda Feulgen classica, il più forte sviluppo di colore si osserva dopo 7 minuti (1 N·HCl a 60° C; fucsina basica,

(17) L. P. V. JOHNSON, *A rapid squash technique for stem and root tips*, «Canadian Jour. Res. Sect. C. Bot. Sci.», 23, 127-130 (1945).

(18) C. PEARSON, *Observations on interphase and prophase nuclei of root tips of wheat and onion*, «Canad. Jour. Bot.», 31, 527-530 (1953).

(19) E. BATTAGLIA, *A new «5 minutes-fixation» in chromosome analysis*, «Caryologia», 9, n. 2 (1957).



color index n. 677, venduta dalla Hartman-Leddon Co. U.S.A. e decolorata secondo la scheda dell'autore (cfr. Battaglia, 1951)<sup>(20)</sup>.

Tale intensità massima di colore è ugualmente ottenibile con acido cloridrico al 18,5 % dopo 20 minuti d'idrolisi fredda. Due minuti in più o in meno rispetto a tale tempo (quindi 18-22 minuti) non modificano sensibilmente l'intensità di colore. Fluttuazioni giornaliere e persino stagionali di temperatura (anche entro ampi limiti) non influiscono in modo notevole. Sempre con idrolisi cloridrica (18,5 %) abbiamo controllato, introducendo il materiale in frigorifero, che a soli 6° C una soddisfacente colorazione si ottiene ugualmente con il tempo standard di 20 minuti, mentre la intensità massima si raggiunge più tardi, prolungando l'idrolisi fredda a 30 minuti.

L'intensità di colore raggiunta idrolizzando per 10 minuti a freddo con acido nitrico (appross. 35 %) è del pari soddisfacente, ma non così intensa come quella raggiunta idrolizzando con acido cloridrico. L'intensità di colore, infine, ottenuta idrolizzando, a freddo, per 40 minuti con acido fosforico (appross. 42 %) è senz'altro minore di quella realizzata usando acido cloridrico e acido nitrico. Anche le peculiarità di morfologia cromosomica non appaiono così ben evidenziate come con gli altri due agenti idrolizzati. L'idrolisi a temperatura ambiente con acido cloridrico diluito (18,5 %) è risultata perciò la migliore, almeno dal punto di vista della ricerca cario logica applicata a materiale vegetale.

*È convinzione dell'autore che l'idrolisi fredda possa in genere sostituire vantaggiosamente l'idrolisi classica a 60° C e sia perciò destinata ad una sempre crescente diffusione fra i citologi moderni.*

**Zoologia.** — *Su una nuova specie del genere Uncinaria e su due nuove specie del genere Ancylostoma*<sup>(\*)</sup>. Nota di PHILIPPUS LE ROUX<sup>(\*\*)</sup> e ETTORE BIOCCA, presentata<sup>(\*\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

È stato eseguito uno studio accurato della collezione di elminti raccolta in Africa da P. Le Roux e della collezione della London School of Hygiene and Tropical Medicine, gentilmente messa a disposizione.

Riportiamo i risultati delle osservazioni che si riferiscono ad alcune specie nuove di nematodi appartenenti al genere *Uncinaria* e *Ancylostoma*, rinvenute nel materiale da noi esaminato.

(20) E. BATTAGLIA, *Accorgimenti nella tecnica citologica relativa alla reazione di Feulgen*, «Caryologia», 3, 381-383 (1951).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(\*\*) Professore di elmintologia nella London School of Hygiene and Tropical Medicine.

(\*\*\*) Nella seduta del 15 dicembre 1956.

1) *Uncinaria parvibursata* sp. nov. (Tavola I).

Quattro nematodi, tre maschi e una femmina (collezione P. Le Roux) sono stati raccolti nel 1933 dall'intestino tenue di una mellivora africana (*Mellivora ratel*) uccisa in Sud Africa. I parassiti appartengono a una specie del genere *Uncinaria* non ancora descritta e per la quale proponiamo il nome *Uncinaria parvibursata* sp. nov. per indicare appunto uno dei caratteri ben evidenti, rappresentato dalle piccole dimensioni della borsa caudale del maschio.

## MORFOLOGIA.

Nematodi conservati in alcool glicerinato. Corpo sottile, cilindrico, striato trasversalmente, con estremità anteriore rivolta dorsalmente.

Capsula boccale piuttosto larga; apertura boccale limitata da due lamine chitinee ventrolaterali bene sviluppate, le quali sono a contatto e nell'esemplare femmina in parte sovrapposte in corrispondenza dell'angolo anteriore dell'apertura boccale. Il bordo dorsolaterale ha una profonda incisura mediana. Un paio di lancette triangolari si proietta dalla parete ventrale della capsula boccale, nell'interno della cavità boccale. L'osservazione laterale della capsula boccale mostra la linea tra le porzioni ventrali e dorsali della capsula boccale, leggermente obliqua in direzione del margine anteriore della capsula boccale.

La esatta posizione dell'anello nervoso, del poro escretore e delle papille cervicali come la distanza tra le strie trasversali della cuticola non sono state determinate con precisione a causa di una conservazione non perfetta dei parassiti in alcool glicerinato.

*Maschio* (3 esemplari). — Lunghezza mm 5,8-7; larghezza massima mm 0,170-0,200. Esofago lungo mm 0,560-0,610 con larghezza massima di mm 0,120-0,130.

Tubuli genitali relativamente corti, formanti anse non molto ravvicinate tra loro. Spicoli uguali, tubulari, lunghi mm 0,620. Questa misurazione è stata possibile in un solo esemplare, perché negli altri due esemplari la estremità posteriore degli spicoli era rotta. Gubernaculum presente. Le esatte dimensioni del gubernaculum non sono state determinate per la imperfetta conservazione degli esemplari. La borsa caudale ha una larghezza, quando completamente aperta, che oscilla tra mm 0,500-0,600. Papille preborsali presenti. Il lobo dorsale è chiaramente separato dai lobi laterali, che sono relativamente piccoli e corti in direzione delle costole laterali. La costola dorsale, lunga circa mm 0,180, a circa mm 0,040 dall'estremità della borsa si divide in due rami tridigitati.

Le costole dorsali esterne hanno origine dalla costola dorsale in corrispondenza al suo secondo sesto. Le costole laterali hanno origine da un tronco comune particolarmente corto, essendo più corto della costola mediolaterale.

Le costole posterolaterale e mediolaterale sono spesse nel loro tratto prossimale ma terminano affilate e leggermente ricurve dorsalmente.

La costola laterale esterna è chiaramente divergente e diretta ventralmente. Essa è piccolissima in confronto alle altre due. Le papille terminali delle costole postero e mediolaterale si trovano l'una vicino all'altra, mentre la papilla terminale della costola laterale esterna è in posizione molto lontana da quella della mediolaterale. Nei nostri esemplari la distanza che divide le papille terminali esternolaterale-mediolaterale è più di tre volte della distanza che divide le papille mediolaterale e posterolaterale. Le costole ventrali hanno un tronco comune d'origine e decorrono ravvicinate e parallele fino a circa il margine della borsa.

*Femmina* (1 esemplare). - Lunghezza mm 7,4; larghezza massima mm 0,240. Esofago lungo mm 0,615 ha una larghezza massima di mm 0,155 ed è rigonfio posteriormente. La posizione dell'anello nervoso, poro escretore e papille cervicali come la distanza tra le strie trasversali della cuticola non sono stati osservati con chiarezza.

Tubuli genitali relativamente corti e utero con uova. Apertura vaginale vicino all'unione del terzo medio col terzo posteriore del corpo. L'ano si apre a circa mm 0,150 dall'estremità posteriore. La punta terminale della coda nel nostro esemplare è mancante.

Uova mm 0,050-0,061  $\times$  0,030-0,035.

Localizzazione: intestino tenue.

Ospite: *Mellivora ratel*.

Località: Sud Africa.

Esemplari tipo depositati presso Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

#### DIAGNOSI DIFFERENZIALE.

In una precedente Nota, alla quale rimandiamo <sup>(1)</sup> abbiamo fatto alcune osservazioni sulle specie del genere *Uncinaria* ed abbiamo affermato che, contrariamente all'opinione di Baylis <sup>(2)</sup> e concordemente a quella di Ranson <sup>(3)</sup>, noi riteniamo che *Uncinaria criniformis* parassita del tasso non debba essere considerata sinonimo di *Uncinaria stenocephala* parassita del cane e della volpe. Le due specie sono chiaramente differenziabili dalla forma della costola posteriore e dalla distribuzione delle costole laterali. Tra le specie descritte del genere *Uncinaria* e da ritenersi valide (*Uncinaria carinii*, *criniformis*, *felidis*, *hamiltoni*, *longespiculum*, *lucasi*, *stenocephala*, *skryabini*,

(1) E. BIOCICA e E. BRONZINI, *Uncinaria thapari* n. sp. *parassita dell'Ailurus fulgens*, « Acc. Naz. Lincei », 14, 824-827 (1953).

(2) H. A. BAYLIS, *A new species of the nematode genus Uncinaria from a sea-lion, with some observations on related species*, « Parasitol. », 25: 308-316 (1933).

(3) B. H. RANSON, *Hookworms of the genus Uncinaria of the dog fox and badger*, « Proc. U. S. Nat. Mus. », 63, 1-5 (estratto), N° 2533 (1924).

*thapari*) le sole che abbiano caratteri che ricordino la nuova specie sono *U. criniformis* di *Meles taxus* e *U. thapari* di *Ailurus fulgens*.

Da esse *Uncinaria parvibursata* si distingue chiaramente soprattutto per i caratteri della borsa caudale del maschio, più piccola e con distribuzione diversa delle costole. In nessuna specie del genere infatti la costola laterale esterna è di proporzioni così ridotte rispetto alle altre due costole laterali e in nessuna altra specie il rapporto tra la distanza delle papille terminali delle costole posterolaterale mediolaterale e mediolaterale esternolaterale è così elevato. In *Uncinaria parvibursata* infatti, come abbiamo già ricordato, la distanza tra la papilla terminale esternolaterale-mediolaterale è più di tre volte della distanza delle papille terminali mediolaterale-posterolaterale. Infine le uova di *Uncinaria parvibursata* sono più piccole di quelle delle altre due specie.

Ci sembra interessante far rilevare che *Uncinaria parvibursata* non è stata raccolta da un animale mantenuto in cattività in Giardini Zoologici, ma da un animale ucciso nella sua zona di origine. Questa osservazione ci permette perciò non solo di escludere che si possa essere trattato di una infestazione presa in cattività e quindi riferibile a un eventuale parassita proveniente da un ospite diverso, ma soprattutto ci permette di stabilire che il genere *Uncinaria* è presente anche tra animali africani. Non ci risulta infatti che siano state segnalate prima di questa, altre uncinarie parassite di animali africani.

## 2) *Ancylostoma iperodontatum* sp. nov. (Tavola II).

Forniamo la descrizione parziale di una specie, che riteniamo nuova, del genere *Ancylostoma*, di cui possediamo solo un esemplare maschio trovato nell'intestino tenue di un esemplare di *Acinonyx jubatus* (Hunting Leopard) ucciso in Rhodesia del Nord (Collezione P. Le Roux). L'apertura boccale di questo parassita è munita di tre paia di denti ventrali e di tre paia di puntine chitinee dorsali. Per questa specie proponiamo perciò il nome *Ancylostoma iperodontatum* sp. nov.

### MORFOLOGIA.

*Maschio*: Corpo cilindrico, biancastro, striato trasversalmente, di piccole dimensioni. Lunghezza massima mm 4,1; larghezza massima mm 0,215. Estremità anteriore fortemente rivolta all'indietro. Capsula boccale robusta, presenta ventralmente due grandi placche chitinee, fornite di tre paia di voluminosi denti, di cui l'interno è leggermente più piccolo degli altri due. Margine dorsolaterale della apertura boccale con tre paia di punte chitinee o dentini dorsali piuttosto aguzzi. Il paio mediano delimita, come nelle altre specie, la incisura dorsale mediana; le due altre paia di dentini si trovano lungo l'ispessimento chitinoso dorsolaterale dell'apertura boccale. La cuticola ricopre parte dei denti ventrali e delle punte chitinee dorsali.



Lamine faringee presenti nella parete ventrale della capsula boccale, come nelle altre specie del genere.

Esofago lungo mm 0,480, è rigonfio nella sua metà posteriore ed è circondato verso la metà dell'altezza, dall'anello nervoso. In vicinanza di questa zona si osservano le papille cervicali e il poro escretore. Spicoli uguali sottili lunghi mm 1,15. Gubernaculum, lievemente angolare, lungo circa mm 0,090.

Robusto cono genitale nell'interno della borsa caudale. Borsa caudale relativamente piccola; papille preborsali presenti; i lobi laterali sembrano particolarmente corti. Costola dorsale lunga circa mm 0,135, divisa a breve distanza dall'estremità libera del lobo dorsale in due rami tridigitati. Le costole esternodorsali nascono a circa mm 0,020 dall'origine della costola dorsale e terminano a notevole distanza dal margine della borsa stessa. Le tre costole laterali hanno origine da un lungo tronco comune, sono relativamente corte e hanno un decorso molto poco divergente; soprattutto la direzione della seconda metà della costola esternolaterale si allontana dalla direzione della costola mediolaterale in maniera meno evidente che nelle altre specie del genere. Le costole ventrali nascono da un lungo tronco comune e decorrono parallele fino al margine della borsa caudale.

Dimensioni in millimetri:

Lunghezza . . . . .	4,100
Larghezza . . . . .	0,215
Esofago lunghezza . . . . .	0,480
Anello nervoso—estremità anteriore. . . . .	0,300
Papille cervicali—estremità anteriore . . . . .	0,305
Spicoli . . . . .	1,150
Gubernaculum . . . . .	0,090

Femmina: sconosciuta.

Localizzazione: intestino tenue.

Ospite: *Acinonyx jubatus* (Hunting Leopard).

Località: Rodesia del Nord.

Esemplare tipo depositato presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

#### DIAGNOSI DIFFERENZIALE.

L'unica specie del genere *Ancylostoma* la quale abbia qualche somiglianza con la nuova specie è *Ancylostoma martinagliai* Mönnig, 1931<sup>(4)</sup>, parassita di *Thos mesomelas*. Da essa *A. iperodontatum* si differenzia chiaramente per possedere tre paia di dentini dorsali nella capsula boccale al posto di due paia di dentini dorsali, per avere gli spicoli molto più corti e la disposizione delle costole nella borsa caudale chiaramente diversa. Nessuna possi-

(4) H. MÖNNIG, *A new hookworm Ancylostoma martinagliai from a jackal*, «Ondestp. J. S. Afr. Vet. Med. Ass.», 2, 125-127 (1931).

*Uncinaria parvibursata* n. sp.

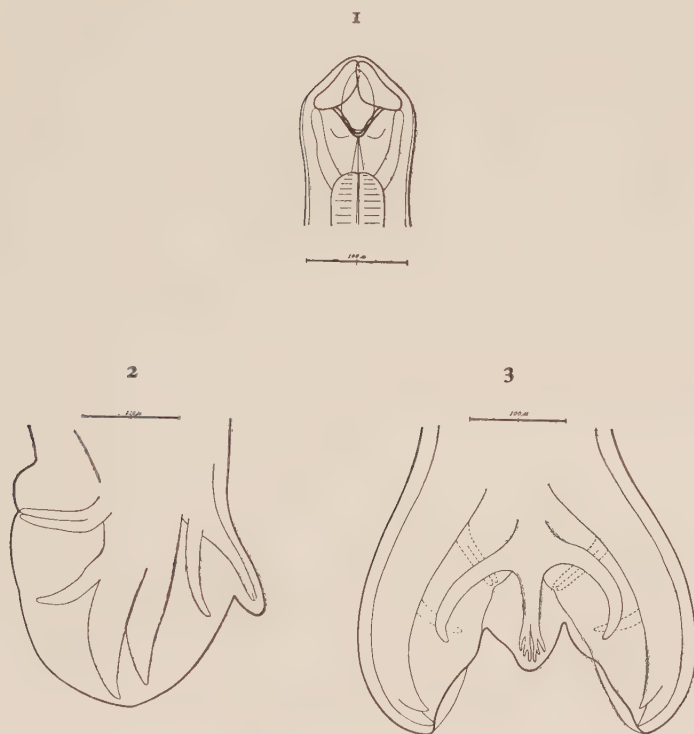


Fig. 1. - Estremità anteriore vista dorsalmente.

Fig. 2. - Estremità posteriore del maschio vista lateralmente.

Fig. 3. - Estremità posteriore del maschio vista dorsalmente.



*Ancylostoma iperodontatum* n. sp.

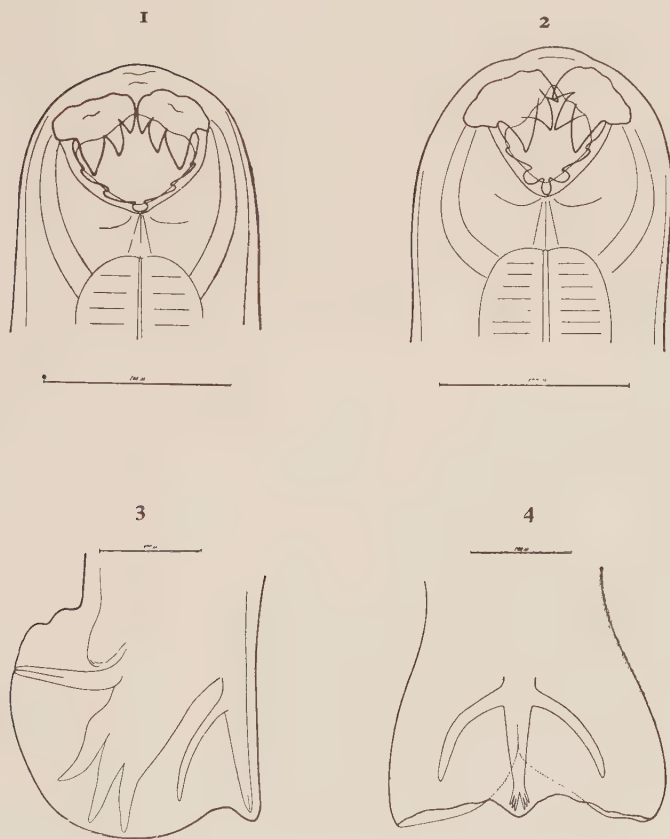


Fig. 1. - Estremità anteriore vista dorsalmente (bocca aperta).  
Fig. 2. - Estremità anteriore vista dorsalmente (bocca racchiusa).  
Fig. 3. - Estremità posteriore del maschio vista lateralmente.  
Fig. 4. - Estremità posteriore del maschio vista dorsalmente.





*Ancylostoma buckleyi* n. sp.

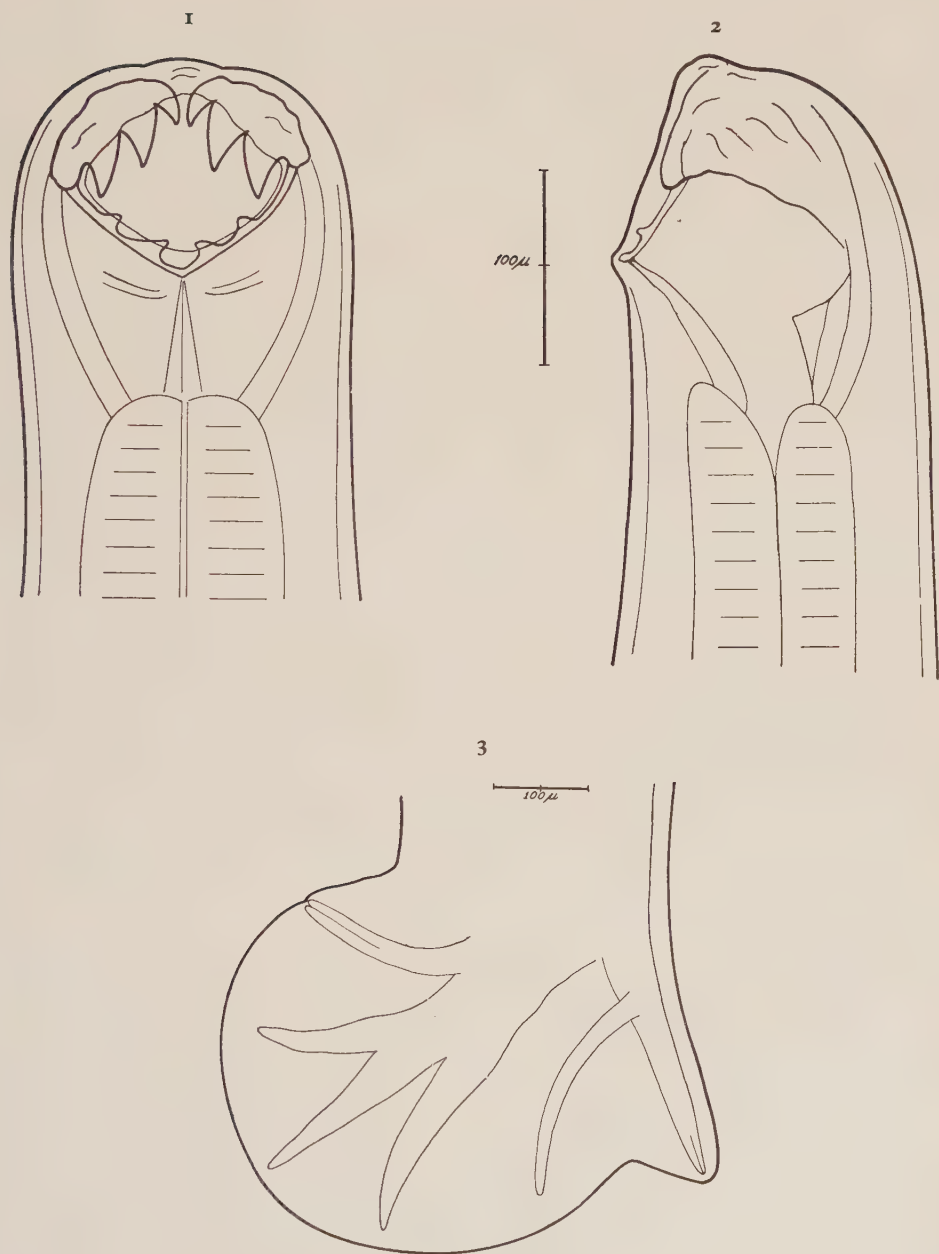


Fig. 1. - Estremità anteriore vista dorsalmente.

Fig. 2. - Estremità anteriore vista lateralmente.

Fig. 3. - Estremità posteriore del maschio vista lateralmente.



bilità di confusione esiste tra *A. pluridentatum* e *A. iperodontatum* perché, pur avendo ambedue le specie tre paia di dentini dorsali che in *A. pluridentatum* sono più robusti e meno aguzzi, esse differiscono totalmente negli altri caratteri della capsula boccale e della borsa caudale.

3) *Ancylostoma buckleyi* sp. nov. (Tavola III).

Tra gli anchilostomi della collezione della London School of Hygiene and Tropical Medicine, hanno attirato la nostra attenzione alcuni esemplari (maschi e femmine) raccolti da *Felis concolor*, provenienti dall'Argentina e morti nel Giardino Zoologico di Londra. Carattere di questi parassiti è di possedere due paia di robuste puntine chitinose nel margine dorsolaterale della capsula boccale, analogamente a quanto descritto in Africa per la specie *Ancylostoma martinagliai*, parassita di *Thos mesomelas*. Poiché *Ancylostoma martinagliai* possiede gli spicoli lunghi circa il doppio e una non identica distribuzione delle costole nella borsa caudale, è evidente che si tratti di specie diversa. Nel recipiente della collezione N. 3089 (Zoo 1180-1201/28) che probabilmente riunisce anchilostomi provenienti da più di una necropsia di *Felis concolor* si trovano, accanto ai parassiti con i caratteri sopra ricordati, anche numerosi anchilostomi senza il paio sopranumerario di puntine chitinose dorsali e riferibili alla specie *A. caninum*. Abbiamo ritenuto più opportuno proporre, sia pur con qualche riserva, la creazione di una specie nuova, perché il carattere che la distingue dalle altre è inconfondibile e immediatamente rivelabile e poiché nel recipiente di collezione N. 2942 e proveniente da un altro esemplare di *Felis concolor* sono conservati solo due femmine con due paia di puntine chitinose nel margine dorsolaterale della capsula boccale e nessun esemplare riferibile ad *A. caninum*, il che, molto verosimilmente, starebbe ad indicare la indipendenza delle due specie. Inoltre nel recipiente n. 2942 esiste un cartellino con la scritta *Ancylostoma* sp. nov. ad indicare che prima di noi, un altro osservatore era venuto alla stessa conclusione.

MORFOLOGIA.

Nematodi conservati in alcool glicerinato.

Corpo cilindrico, biancastro, trasversalmente striato, con estremità anteriore diretta dorsalmente. Capsula boccale robusta, apertura boccale limitata ventralmente da due placche chitinose che terminano con tre grandi denti ventrali di cui l'interno è più piccolo degli altri, diretti all'indietro e all'indietro. Il margine dorsolaterale dell'apertura boccale è relativamente spesso e nella parte mediana del margine esiste, come nelle altre specie del genere, la profonda incisura di forma quasi tondeggiante, la quale termina con due punte chitinose libere (o denti dorsali) piuttosto robuste ad estremità alquanto spessa. Il margine dorsolaterale inoltre porta due altre evidenti punte o denti dorsali. La cuticola delimita l'apertura boccale e da essa fanno spor-



genza le punte dei denti ventrali e dei dentini dorsali. Nel fondo ventrale della capsula boccale esistono le due lamine faringee.

Esofago claviforme; le papille cervicali, il poro escretore e l'anello nervoso si trovano in genere al livello della metà dell'altezza dell'esofago. La posizione però delle papille presenta notevoli oscillazioni.

*Maschio*: (misurazioni su 6 esemplari) lunghezza mm 8,8-10,9, larghezza massima mm 0,270-0,370; esofago mm 0,780-0,890; strie cuticolari distanti mm 0,0055-0,0081; spicoli lunghi mm 0,680-0,820 uguali, fuoriescono da un cono genitale ben evidente; gubernaculum con la forma leggermente angolare, come nelle altre specie del genere, lungo circa mm 0,080; papille preborsali presenti. Borsa caudale con forma dei lobi e distribuzione delle costole molto simile a quanto descritto dal Lane<sup>(5)</sup> e confermato da uno di noi (Biocca)<sup>(6)</sup> per *A. caninum*, sebbene leggermente meno sviluppata che in *A. caninum* del cane. Il lobo dorsale della borsa caudale è evidente e i lobi laterali sono abbastanza lunghi in corrispondenza delle costole laterali. La costola dorsale si divide nel suo sesto terminale in due ramificazioni tridigitate di cui la digitazione mediana è chiaramente la più piccola. In un esemplare le digitazioni sono anomale e irregolari. Le costole dorsali esterne hanno origine dalla dorsale nel suo terso prossimale in vicinanza col terzo medio; le costole laterali originano da un tronco comune piuttosto breve e sottile e sono chiaramente divergenti, la posterolaterale è la più lunga con un decorso diretto leggermente all'indietro, la mediana continua la direzione del tronco comune e la laterale esterna si dirige invece verso l'avanti ed è la più piccola. Il solco che divide la costola posterolaterale dalla mediolaterale è molto più profondo del solco che divide la mediolaterale dalla esternolaterale. Il rapporto tra le papille terminali delle costole posterolaterale-mediolaterale e mediolaterale-esternolaterale è, analogamente a quanto segnalato per *A. caninum* di circa 1 : 1,2. Le costole ventrali, che hanno origine da un tronco sottile comune, decorrono, come in tutte le altre specie del genere parallele raggiungendo quasi il margine della borsa.

*Femmina* (4 esemplari misurati): lunghezza mm 9,9-12,8, larghezza mm 0,320-0,405, strie cuticolari distano 7,1-9,1  $\mu$ ; esofago mm 0,880-0,960. Il corpo è ripieno di anse dei tubuli genitali che si spingono a breve distanza dal margine posteriore dell'esofago. La vulva si trova in genere nel terzo medio in vicinanza dell'unione del terzo medio col terzo posteriore del corpo. L'ano dista dalla punta della coda mm 0,190-0,205. L'estremità distale dopo l'ano assume una forma leggermente schiacciata nel senso anteroposteriore e termina con una spina.

(5) C. LANE, *The genus Ancylostoma in India and Ceylon*, « Ind. J. Med. Res. », 4, 71-92 (1916).

(6) E. BIOCCA, *Ridescrizione di Ancylostoma tubaeforme* (Zeder, 1800) *parassita del gatto, considerato erroneamente sinonimo di Ancylostoma caninum* (Ercolani, 1859) *parassita del cane*, « Riv. parassitol. », 15, 267-278 (1954).

Le uova con guscio trasparente e con alcuni blastomeri, misurate nell'interno dell'utero sono di  $\mu$  38-44  $\times$  55-60

Dimensioni in millimetri misurate su 6 maschi e 3 femmine

	Maschio	Femmina
Lunghezza . . . . .	8,8-10,9	9,9-12,8
Larghezza massima . . . . .	0,270-0,370	0,320-0,405
Esofago . . . . .	0,780-0,890	0,880-0,960
Spicoli . . . . .	0,680-0,820	
Gubernaculum . . . . .	0,080	
Vulva (estremità posteriore). . .		3,8-4,5
Ano (estremità posteriore) . . .		0,190-0,205

Ospite: *Felis concolor*.

Localizzazione: intestino tenue.

Località: Giardino Zoologico di Londra (Provenienza dall'Argentina).

Esemplari tipo depositati presso la London School of Hygiene and Tropical Medicine e presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

#### DIAGNOSI DIFFERENZIALE.

La specie da noi descritta presenta la maggior somiglianza con *A. caninum* nella maggior parte dei caratteri, ma può essere con facilità differenziata da *A. caninum* per la presenza di un paio supplementare di puntine chitinee o dentini dorsali che mancano assolutamente in quest'ultimo anchilostoma.

Non ci sembra che possa esistere possibilità di confusioni con altre specie del genere *Ancylostoma*. Infatti *A. martinagliai* di *Thos mesomelas*, carnivoro africano, ha una struttura boccale analoga a quella di *A. buckleyi* ma ha gli spicoli lunghi più del doppio. *A. iperodontatum* da noi descritto possiede tre paia di dentini dorsali mentre *A. buckleyi* ne possiede solo due paia, inoltre la lunghezza degli spicoli, la forma della borsa caudale e la distribuzione delle costole nella borsa caudale sono completamente diverse.

Lo studio sistematico della collezione di elminti raccolti in Sud Africa da P. Le Roux e della grande collezione di elminti della London School of Hygiene and Tropical Medicine ha permesso agli autori di identificare e descrivere tre nuove specie di nematodi parassiti: precisamente *Uncinaria parvibursata* n. sp. parassita di *Mellivora ratel* mustelide africano; *Ancylostoma iperodontatum* n. sp. parassita di *Acinonyx jubatus* felide africano e *Ancylostoma buckleyi* n. sp. parassita di *Felis concolor*, felide americano.

**Zoologia.** — *Il corpo cromatoide e l'eterogametia in Potamon fluviatile (Crustacea Decapoda).* Nota (\*) di GIORGIO M. BAFFONI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Illustrando la spermatogenesi in due Crostacei decapodi (*Cambarus virilis* e *C. immunis*), Fasten (1914) <sup>(1)</sup> ha descritto come « corpi cromatoidi » (*chromatoid body*) delle formazioni siderofile che si allineano presso ai cromosomi metafasici della prima divisione maturativa e che ha interpretato come cromosomi accessori (eterocromosomi). Strutture simili ai corpi cromatoidi osservati da Fasten ed alle quali è stato attribuito lo stesso valore, sono state descritte durante la spermatogenesi di *Telphusa fluviatilis* dalla Delpino (1934) <sup>(2)</sup> e di *Pandalus borealis* e *Nephrops norvegicus* da Leopold-seder (1934) <sup>(3)</sup>. Però in successive ricerche Fasten, forse tenendo presenti i rilievi di Wilson (1913) <sup>(4)</sup> sul comportamento del corpo cromatoide di un Insetto emittero (*Pentatoma*), si è progressivamente allontanato dalla prima interpretazione poiché i corpi cromatoidi, a differenza degli eterocromosomi:

a) in alcuni casi (in *Cancer magister* <sup>(5)</sup> e *Lophopanopeus bellus* <sup>(6)</sup>) possono venire espulsi dallo spermatide all'inizio della spermioistogenesi;

b) a volte (in *Lophopanopeus bellus* <sup>(6)</sup> e in *Cancer productus* <sup>(7)</sup>) passano indivisi anche nella seconda divisione meiotica, così che si formano il 25 % di spermatidi con corpo cromatoide ed il 75 % senza;

c) si distinguono dai cromosomi per una diversa affinità tintoriale per l'ematossilina ferrica, scomparendo prima di questi in seguito a prolungato differenziamento (Fasten 1918 <sup>(5)</sup>, p. 284; Fasten 1924 <sup>(7)</sup>, p. 50);

inoltre i corpi cromatoidi osservati da Fasten compaiono all'inizio della profase meiotica *nel citoplasma*, come è evidente dalle illustrazioni dell'Autore (1918 <sup>(5)</sup>, figg. 19-22; 1924 <sup>(7)</sup>, figg. 2-6, 20-26 e 46-50; 1926 <sup>(6)</sup>, figg. 16-21) e più di recente sono risultati Feulgen-negativi (Battalgil 1941 <sup>(8)</sup>).

In base a questi dati ed alle critiche mosse da Niiyama (1934-36) <sup>(9)</sup> alle tecniche di allestimento dei preparati (sezioni istologiche) con cui sono stati messi in evidenza, i corpi cromatoidi osservati da Fasten, Delpino e

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) N. FASTEN, « Journ. of Morphol. », vol. 25, p. 587 (1914).

(2) I. DELPINO, « Arch. Zool. Ital. », vol. 21, p. 19 (1934).

(3) F. LEOPOLDSER, « Zeitschr. Wiss. Zool. », vol. 145 p. 337 (1934).

(4) E. R. WILSON, « Biol. Bull. », vol. 24, p. 392 (1913).

(5) N. FASTEN, « Biol. Bull. », vol. 34, p. 277 (1918).

(6) N. FASTEN, « Biol. Bull. », vol. 50, p. 277 (1926).

(7) N. FASTEN, « Journ. of Morphol. Physiol. », vol. 39, p. 47 (1924).

(8) F. BATTALGIL, « Istanbul Univ. Fak. Mecmuasi », vol. 6, p. 49 (1941).

(9) H. NIIYAMA, « Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. », vol. 3, p. 41 (1934); *ibidem*, vol. 4, p. 59 (1936).

Leopoldseder attualmente sono ritenuti strutture citoplasmatiche e non di natura cromosomiale; infatti è stata descritta come corpo cromatoide una massa siderofila Feulgen-negativa osservata durante la spermatogenesi di *Leander treillanus* (Tuzet e Bessière 1948<sup>(10)</sup>).

Il fatto che i corpi cromatoidi dei Crostacei siano strutture Feulgen-negative, e che quindi non siano da considerarsi cromosomi sessuali, non pregiudica l'eterogametia di questi animali: infatti Niiyama in *Plagusia dentipes* ed *Eriocheir japonicus*<sup>(11)</sup> ed in *Hemigrapsus sanguineus*<sup>(12)</sup> ha documentato la presenza di cromosomi sessuali ed ha dimostrato che il sesso eterogametico è quello maschile, che risponde al tipo di digametia XY (come in *Lygaeus*).

Non è nota la natura né il significato dei corpi cromatoidi e pertanto ho voluto orientarmi, applicando una serie di reazioni istochimiche, circa la loro costituzione chimica; la loro basofilia faceva infatti supporre che essi fossero di natura cromidiale ed i fenomeni di espulsione osservati all'inizio della spermioistogenesi da Fasten<sup>(5,6)</sup> potevano indicare che anche nei Crostacei si verificassero quei processi di autotomia di spongioplasma e pentosonucleotidi illustrati di recente nei Nematodi (Pasteels 1948<sup>(13)</sup>) e nei Vertebrati superiori (Stefanelli e Urbani 1954<sup>(14)</sup>).

Come materiale di osservazione ho scelto il *Potamon (Telphusa) fluviatile* Latr. in cui il corpo cromatoide è stato descritto da Delpino (1934)<sup>(2)</sup>; secondo questo Autore il corpo cromatoide si mette in evidenza ai bordi della piastra equatoriale nella prima divisione meiotica, presenta una struttura duplice e si distribuisce in maniera che «si formano due specie di spermatociti II, con 38 e 40 cromosomi rispettivamente»; Delpino ritiene che il corpo cromatoide di *Potamon* rappresenti il cromosoma Y e che il sesso eterogametico sia quello maschile; il comportamento del cromosoma Y («in cui l'Y indica un gruppo di più cromosomi accessori») determinerebbe il sesso; Delpino inoltre riferisce di frequenti irregolarità di forma, dimensioni e comportamento dei cromosomi metafasici, le quali hanno costituito il fondamento per lo scetticismo e le critiche di Niiyama<sup>(9)</sup>.

Gli esemplari di *Potamon fluviatile* (in numero di 57) sono stati raccolti da marzo a settembre nelle «marane» della Magliana (Roma); la massima attività maturativa degli elementi delle gonadi maschili è stata riscontrata a metà del mese di luglio. Le gonadi sono state fissate in diversi liquidi (Carnoy-acetico, Flemming, Sanfelice, Carnoy-formolico, Helly), incluse in celloidina e paraffina e sezionate in serie a spessori diversi (5, 8 e 12  $\mu$ ); di ogni gonade alcuni preparati sono stati colorati con l'ematossilina ferrica, altri sono stati trattati con il reattivo di Schiff secondo il metodo di Feulgen-

(10) O. TUZET e C. BESSIÈRE, « Bull. Inst. Océan. » (Monaco), vol. 45°, n. 929 (1948).

(11) H. NIIYAMA, « Journ. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. », vol. 5, p. 283 (1937).

(12) H. NIIYAMA, « Japan Journ. Genetics », vol. 16 (1938) (cit. da BATTALGIL (8)).

(13) J. PASTEELS, « Arch. de Biol. », vol. 59, p. 405 (1948).

(14) AL. STEFANELLI e E. URBANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), vol. 16, p. 282 (1954).



Rossembeck standardizzato da Stowell<sup>(15)</sup> per la ricerca del DNA, altri ancora secondo la PAS-reazione di Hotchkiss<sup>(16)</sup> per la localizzazione dei glucidi insolubili, altri infine secondo il metodo di Yasuma e Ichikawa<sup>(17)</sup> per quella delle proteine; oltre all'allestimento dei relativi controlli, alcuni preparati sono stati trattati con la pironina-verde di metile secondo il metodo di Brachet modificato da Gerola e Vannini<sup>(18)</sup> per il riconoscimento dei pentosonucleotidi (PNA). I migliori preparati con il metodo di Feulgen sono risultati quelli fissati in Sanfelice, con il metodo di Brachet quelli fissati in Helly e in Carnoy-formolico. Memore delle critiche di Niiyama<sup>(9)</sup> ho controllato i computi dei cromosomi anche su preparati allestiti per schiacciamento in orceina acetica.

Diversamente dai corpi cromatoidi descritti da Fasten, quello di *Potamon fluviatile* non compare all'inizio della profase meiotica, ma si rende manifesto al termine della prima metafase maturativa: infatti da una ben definita porzione del fuso (paracentrale), guardando la piastra equatoriale di profilo, si osserva affiorare dai 38 bivalenti una massa voluminosa (ved. fig. 1) che si distacca con notevole anticipo verso uno solo dei due poli assumendo in un primo momento una forma clavata (ved. figg. 3 e 4) e quindi, staccatasi dalla piastra, una forma rotondeggiante (ved. fig. 5); in condizioni particolarmente favorevoli di osservazione ed ai più forti ingrandimenti la massa basofila presenta una scissura longitudinale fin da quando ha lo aspetto clavato (ved. fig. 4) o appare costituita da due masse (ved. figg. 9 e 10); durante l'anafase la massa basofila è raggiunta dai cromosomi a metà della distanza tra equatore e poli (ved. fig. 7) e si confonde con essi (ved. fig. 8) divenendo indistinguibile; nella seconda metafase maturativa, che a giudicare dalla bassa frequenza è molto rapida, non si ripete il fenomeno descritto durante la prima anafase e pertanto il comportamento del corpo cromatoide sfugge ad ogni analisi. Spingendo il differenziamento nei preparati colorati con ematossilina ferrica, la massa basofila di *Potamon* non si distingue dai cromosomi metafasici, scomparendo contemporaneamente a questi; per ciò, per il fatto che non compare nel citoplasma, ma sorge dall'allineamento dei cromosomi metafasici e per non aver osservato la sua eliminazione durante la spermioistogenesi, risulta che la formazione basofila di *Potamon* presenta un comportamento differente rispetto ai tipici corpi cromatoidi di Fasten ed a quelli di Leopoldseder.

Dati più decisivi sono emersi all'esame della massa basofila di *Potamon* in seguito al trattamento dei preparati con le diverse procedure istochimiche: essi infatti è risultata Feulgen-positiva (ved. figg. A e B) e Schiff-negativa

(15) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », vol. 20, p. 45 (1945).

(16) Ved. G. GOMORI, *Microscopic Histochemistry*, Chicago 1952.

(17) A. YASUMA e T. ICHIKAWA, « Journ. Lab. Clin. Med. St. Louis », vol. 41, p. 296 (1953).

(18) F. M. GEROLA e E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), vol. 5, p. 77 (1948).

nei controlli incubati senza HCl; inoltre essa presenta affinità anche con la pironina (colorazione violetta) nei preparati trattati secondo il metodo di Brachet, dimostrando di contenere anche PNA; essa reagisce intensamente al metodo delle proteine e negativamente con la PAS reazione. La massa basofila di *Potamon*, pertanto, si comporta come la cromatina dei nuclei post-cinetici dei Vertebrati<sup>(19)</sup>.

Ciò dimostra che il corpo basofilo che si mette in evidenza all'anafase della prima divisione maturativa durante la spermatogenesi di *Potamon fluviatile* non va interpretato come un « corpo cromatoide », ma è di natura cromatinica; la presenza di pentosonucleotidi indica che esso, almeno in parte, è costituito da eterocromatina<sup>(20)</sup>; strutture Feulgen-positive con una ampia zona eterocromatica e che presentano tipici fenomeni di precessione alla anafase meiotica, negli animali sono i cromosomi sessuali<sup>(21)</sup>. Il cromosoma eterocromatico di *Potamon*, inoltre, appare scissurato (come è stato già osservato dalla Delpino) e quindi già alla prima metafase appare distinto in due cromatidi; dato che alla seconda metafase maturativa non si verificano i fenomeni di precessione che sono stati descritti nella prima, suppongo che esso si divida regolarmente e contemporaneamente agli altri 38 univalenti distribuendosi a tutti gli spermatidi che hanno origine dagli spermatociti di 2° ordine che lo posseggono.

La Feulgen-positività, la presenza di eterocromatina, la costanza con cui si manifesta, la precisa posizione nella piastra equatoriale, i fenomeni di precessione e la distribuzione a solo metà degli spermatidi, dimostrano che la struttura descritta da Delpino si differenzia dai « corpi cromatoidi » descritti dagli altri ricercatori e che sia invece da interpretarsi come un cromosoma sessuale.

Osservando mitosi in elementi goniali e somatici (epatopancreas) di *Potamon*, di norma non ho riscontrato alcun comportamento simile a quello descritto nella prima divisione maturativa della meiosi maschile; eccezionalmente ho constatato spostamenti di cromosomi metafasici in sezioni istologiche, ma tale avvenimento è risultato incostante, sia per l'entità dello spostamento e dei cromosomi da esso coinvolti, sia per l'estrema rarità con cui il fenomeno si è verificato nelle sezioni più spesse (di 12  $\mu$ ), nelle quali non sono mai state interessate le mitosi comprese nello spessore del preparato; pertanto tali fenomeni vanno ritenuti effetto della tecnica di affettamento; tale effetto non può essere assolutamente invocato per ciò che riguarda il cromosoma sessuale osservato durante la prima metafase maturativa della spermatogenesi.

La precessione del cromosoma sessuale di *Potamon* è quindi un fatto reale, che può essere attribuito all'assenza del cromosoma omologo: infatti,

(19) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), vol. 20, p. 125 (1956); *ibidem*, vol. 21, p. 491 (1956); M. MARINI, *ibidem*, vol. 20, p. 373 (1956).

(20) Attribuisco a questo termine un valore esclusivamente *morfologico* essendo discusso il suo significato dal punto di vista chimico (ved. J. R. BAKER e H. G. CALLAN, « Nature », vol. 166, p. 227 (1950)).

(21) Ved. A. HUGHES, *The mitotic Cycle*, London 1952.

come già osservato da Delpino, posso asserire che al polo opposto a quello verso cui si dirige il cromosoma sessuale non esiste alcun corpicciolo di natura cromosomica, percepibile nei limiti del potere risolutivo del microscopio.

Rimane a questo punto da identificare il significato del cromosoma sessuale di *Potamon*; data la rarità delle mitosi nei tessuti germinali e somatici delle femmine e la difficoltà dello studio della meiosi femminile, non ho avuto l'opportunità di eseguire il computo esatto dei cromosomi presenti nelle femmine onde accertarmi della situazione dei cromosomi sessuali; durante la profase meiotica, però, negli ovociti in primo periodo di accrescimento ho sempre osservato un'ampia zolla eterocromatica aderente alla membrana nucleare; una massa simile, ma meno estesa e massiccia, l'aveva già osservata Delpino e l'ho riscontrata io stesso nella profase maschile: in ambedue i casi essa compare allo stadio di zigotene e resta evidente fino a pachitene avanzato; nell'ovocita scompare tardi all'inizio del secondo periodo di accrescimento, nello spermatocita, invece, si associa ad uno dei 39 corpi cromosomici, ma mi è stato impossibile seguirla dalla diacinesi alla metafase: la massa osservata è da interpretarsi come dovuta ad una precoce condensazione cromatinica (eteropicnosi positiva) che avviene tipicamente durante la profase meiotica nei cromosomi sessuali<sup>(21)</sup>; la maggior grandezza che essa presenta nelle femmine indica che in questo sesso i nuclei della linea germinale posseggono una doppia carica di eterocromatina, la quale non può essere attribuita che alla presenza dei due cromosomi sessuali (XX).

In base a questi fatti e considerazioni è molto verosimile che il cromosoma sessuale osservato durante la spermatogenesi maschile di *Potamon* non sia un cromosoma accessorio (cromosoma Y), sebbene un cromosoma X.

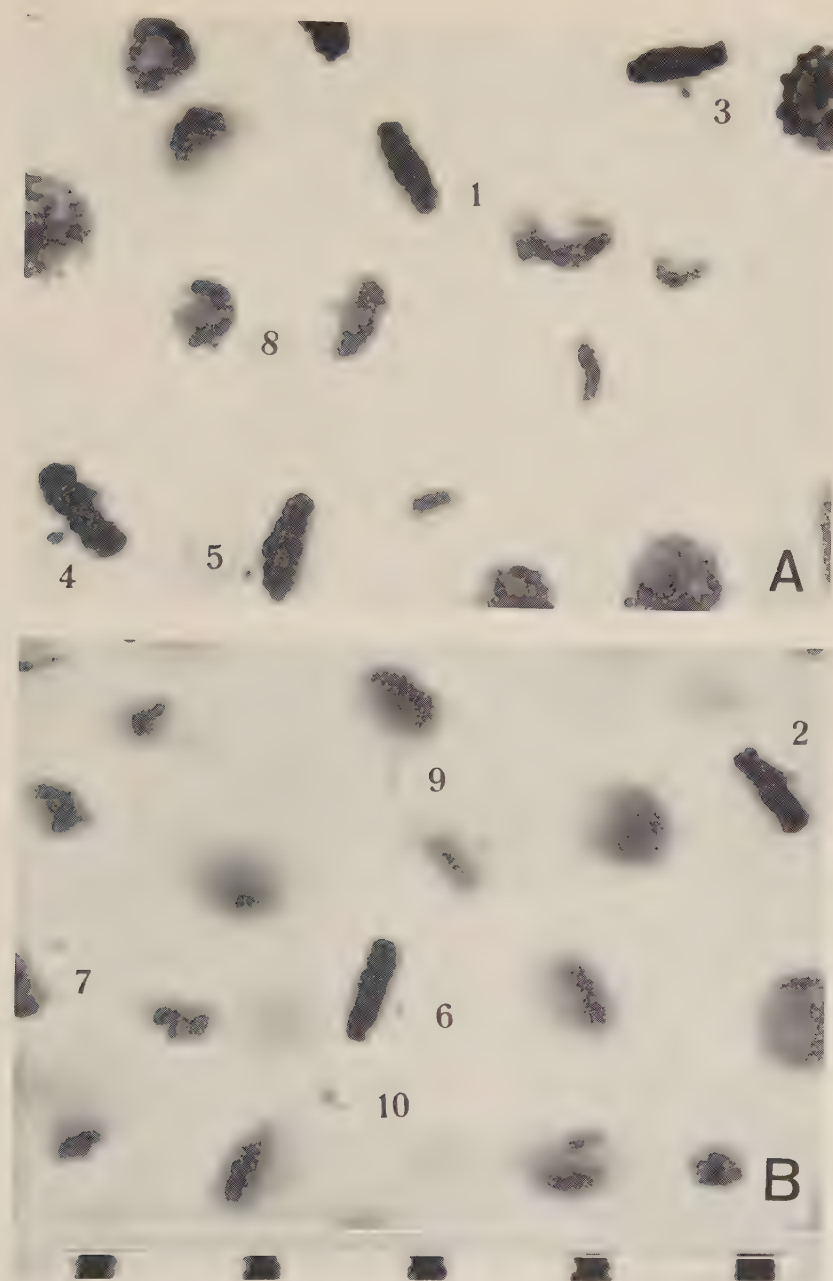
La presenza del cromosoma X in *Potamon*, la sua grossezza rispetto agli altri cromosomi metafasici e la sua carica di eterocromatina, mi hanno suggerito di esaminare alcuni tessuti di individui maschi e femmine onde verificare se la presenza dei due cromosomi X si manifestasse nel nucleo delle cellule somatiche femminili con una zolla di cromatina sessuale, quale è stata riscontrata da Geitler<sup>(22)</sup> in un Insetto emittero (*Gerris*) e da Barr e Collaboratori<sup>(23)</sup> in alcuni Mammiferi. In pieno accordo con le mie previsioni, nei nuclei intercinetici di alcuni tessuti provenienti da individui di sesso femminile, ho osservato una marcata zolla Feulgen-positiva che nei maschi, ove vi è un solo X, è assente o si confonde con gli altri granuli di cromatina aderenti alla membrana nucleare; la documentazione dettagliata di questo fatto sarà oggetto di una prossima Nota.

Dati tutti questi fatti posso pertanto asserire che in *Potamon fluviatile* il sesso femminile è omogametico; quello maschile è digametico, determinando la formazione di due tipi di spermatidi (il 50% con l'X ed il 50%.

(22) L. GEITLER, « Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat. », vol. 26, p. 641 (1937).

(23) Ved. K. L. MOORE e M. L. BARR, « Journ. Comp. Neurol. », vol. 98, p. 213 (1953).





Stadi di metafase-anafase della prima divisione meiotica nella spermatogenesi di *Potamon fluviatile*. Modalità dell'affioramento (2-4) e della precessione (5 7) dell'eterocromosoma sugli autosomi; ad anafase avanzata l'eterocromosoma viene raggiunto dai 38 univalenti (8) e si confonde con essi.

Notare la duplicità dell'eterocromosoma dall'inizio del suo movimento (4) al massimo della precessione (9 e 10: piastre equatoriali soprastanti al piano di taglio).

(Fiss.: Sanfelice; met.: Feulgen sec. Stowell; A = sezione di 5  $\mu$  di spessore, B = sezione di 12  $\mu$  di spessore;  $\times 1140$ ; ogni intervallo della scala micrometrica = 10  $\mu$ ).





senza X); quindi la determinazione genotipica del sesso in questo Decapode è di tipo *Protenor* (XX nella femmina e XO nel maschio) come nel seguente schema:

	cellule diploidi	gameti
Femmine (AA XX)	78 cromosomi	100% uova AX con 39 cromosomi
Maschi (AA XO)	77 cromosomi	{ 50% spermatozoi AX con 39 cromosomi { 50% spermatozoi A con 38 cromosomi

Va osservato in proposito che un eterogametia maschile di tipo XO nei Decapodi è un fatto nuovo poiché in questi Crostacei è stata fin'ora dimostrata una condizione di tipo XY (Niiyama <sup>(11, 12)</sup>).

Poiché il corpo cromatoide descritto in *Potamon fluviatile* è un cromosoma sessuale, per gli intenti che hanno motivato la presente ricerca, ho intrapreso una nuova serie di osservazioni in un altro Decapode [*Callinassa tyrrenensis* (Petagna) = *C. laticauda* Otto] all'esame delle cui gonadi maschili ho notato la presenza di un corpo basofilo che compare nel citoplasma allo inizio della profase meiotica e che alla prima metafase maturativa si dispone vicino, ma fuori dal fuso acromatico, comportandosi esattamente come i corpi cromatoidi veri e propri.

*Concludendo*: la struttura descritta come « corpo cromatoide » da Del-pino è da considerarsi come un cromosoma X; il suo comportamento dimostra che in *Potamon fluviatile* il sesso eterogametico è quello maschile; la digametia maschile di *Potamon* è da ritenersi di tipo XO.

**Patologia.** — *Inquadramento e nosologia di una nuova situazione morbosa: la reticolosi linfoide disprotidemica o Malattia di Waldenström* (\*). Nota di ANTONIO ASCENZI e RENATO DI GUGLIELMÒ, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

L'applicazione di alcune moderne metodiche di ricerca allo studio della patologia umana ha, in questi ultimi anni, fornito ampia materia di lavoro originale e di fruttuose osservazioni. Particolarmente interessante ci sembra l'individuazione, mediante l'elettroforesi e l'ultracentrifuga, seguite poi dalle ricerche di immunoematologia e dalla microscopia elettronica, di una nuova entità morbosa, oggi completata in un suo tipico quadro clinico, umorale

(\*) Le osservazioni e le ricerche sono state eseguite dai due Autori, per una parte, nell'Istituto di Clinica Medica (Dir. prof. E. Greppi) dell'Università di Firenze, e, per altra parte, nell'Istituto di Anatomia Patologica (Dir. prof. G. Bompiani) dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

e anatomo-patologico. Intendiamo parlare della malattia di Waldenström, individuata dal Clinico svedese nel 1944 e studiata, con varie precisazioni, negli anni successivi, da numerosi autori, per la maggior parte europei.

L'inquadramento e la sistemazione nosologica della nuova forma è ancor oggi argomento di vivo dibattito.

I risultati delle nostre ricerche (studio clinico-umorale di quattro casi e studio anatomo-istologico di tre di questi casi, dei quali ebbimo il reperto anatomico, parziale o totale) e la valutazione critica derivante dallo studio dei casi consegnati nella letteratura (circa 60 casi) ci inducono a formulare, in merito, il nostro giudizio, che possiamo esprimere nelle seguenti proposizioni conclusive, delle quali ci permettiamo fare l'oggetto della presente comunicazione:

1° La malattia di Waldenström corrisponde a un quadro morboso a sè stante, e non ad una variante di malattia già nota, e neppure ad un quadro derivante da una casuale associazione secondaria di sintomi. A questa convinzione siamo pervenuti per motivi d'indole clinica, umorale e anatomica:

a) *dal punto di vista clinico* la malattia presenta un quadro tipico e caratteristico: in persone di età avanzata, senza preferenza di sesso, si instaurano subdolamente anemia marcata, astenia, deperimento, quasi sempre associati a ripetute emorragie mucose (nasali, gengivali) e del fondo dell'occhio e a ingrandimento delle linfoghiandole, del fegato e della milza, in associazioni, fra loro, differenti.

Tale quadro è progressivo e di lunga durata, corrispondendo, per lo più, il decorso a quello di molti anni; e si conclude con esito letale, poichè non esiste una terapia efficace;

b) *dal punto di vista umorale* si assiste ad una spiccata modificazione delle proteine del siero di sangue, corrispondente a una fortissima iperprotidemia, con tracciato elettroforetico di tipo plasmocitomatoso (aumento cospicuo e con onda alta e aguzza di una frazione globulinica - di solito  $\gamma$ , o  $\beta$  - o intermedia fra le due). L'analisi con l'ultracentrifuga dimostra quasi sempre un forte aumento di globuline ad altissimo peso molecolare (circa 1.000.000), dette appunto «macroglobuline», che sono presenti soltanto in minima quantità, oppure assenti, nel siero normale.

Le ricerche di immunoematologia (con le tecniche di precipitazione, di diffusione in agar, e di immunoelettroforesi) hanno dimostrato che tali globuline sono capaci di provocare *immunsieri specifici*, con specificità di individuo e di malattia, forse in rapporto con la presenza di particolari complessi glico-proteici. Una tale *disprotidemia* porta come conseguenza numerosi fenomeni, fra cui l'aumento massimo della velocità di eritrosedimentazione, la positività della reazione di Sia (precipitazione delle euglobuline in acqua distillata) e di numerose prove di labilità colloidale. Si rileva anche un enorme aumento dei valori della viscosità, specialmente a basse temperature; talora sono presenti vere crioglobuline.

A questo interessante e complesso quadro umorale si era dato, in un primo tempo, importanza preminente, tanto che la malattia venne nota con il ter-

mine di «macroglobulinemia»; esso, però, oggi non può più essere considerato specifico, perchè il tracciato elettroforetico è identico a quello dei plasmocitomi; ma soprattutto perchè la configurazione macroglobulinica nella malattia di Waldenström può anche mancare, sia pure in casi molto rari.

Si è visto inoltre che può esistere un aumento – se pure non molto cospicuo – delle globuline ad altissimo peso molecolare, anche in altre situazioni morbose e, tra queste, anche nel plasmocitoma;

c) *dal punto di vista anatomico*, riteniamo di notevole interesse l'aver noi potuto rilevare, nei casi che abbiamo avuto la opportunità di studiare nei reperti istopatologici, che è caratteristica della malattia in questione, una *proliferazione sistematica*, e invasiva, *di un tessuto che definiamo «reticolare-linfoide»*; vi si associa una modesta partecipazione di plasmacellule, che – in genere – risultano normali e mature, e, in quota assai minore, di mastcellule.

Il detto tessuto di proliferazione può interessare non soltanto i distretti emopoietici, ma ogni altro distretto dell'organismo; la diffusione di tale tessuto è del tutto analoga a quella del tessuto della leucemia linfatica: è probabile che, in passato, questi casi siano stati descritti, appunto, come linfadenosi aleucemiche. Però un accurato esame microscopico delle sezioni istologiche dimostra che *le cellule* componenti, in misura precipua, il tessuto in istudio, *non corrispondono a veri linfociti*, ma a cellule con caratteri che potremmo dire intermedi fra il linfocito e la cellula reticolare. Nei preparati per striscio o per apposizione si rileva, adeguatamente, che le cellule proliferanti *corrispondono*, nei loro attributi morfologici, *alle «piccole cellule reticolari linfoide»* descritte da Rohr, e da altri, nel midollo osseo umano.

A sancire in modo evidente la differenza delle cellule del tessuto della malattia di Waldenström con i linfociti soccorrono le moderne ricerche di Braunsteiner e coll., con il microscopio elettronico: esse hanno dimostrato che le cellule della malattia di Waldenström posseggono una *struttura ergastoplasmica* (fitta di canalicoli) del citoplasma, che manca nei linfociti.

Così è che oggi la grande maggioranza degli Studiosi dell'argomento (e noi con essi) ritengono che si tratti di *elementi reticolo-endoteliali di aspetto linfoide* (cellule reticolari linfoide), distinte sia dalle plasmacellule che dai linfociti.

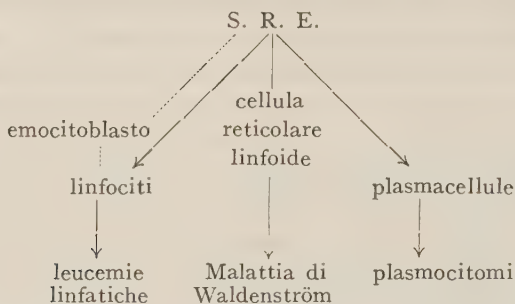
2° Dalle nostre osservazioni originali siamo indotti a ritenere che il tessuto d'infiltrazione sopradescritto sia l'elemento più caratteristico, e vorremmo dire (almeno fino alle attuali conoscenze) specifico, con valore di *alterazione primitiva*, nella malattia di Waldenström. Esso è inoltre elemento peculiare e fondamentale per la diagnosi della forma morbosa, anche se la massima parte delle volte la diagnosi stessa venga facilitata e confortata dalla pressochè costante e fortissima iperdisproteidemia, con la frequentissima (ma non obbligatoria, nè specifica) configurazione macroglobulinemica.

Per quanto sopra esposto, proponiamo di sostituire all'antica e diffusa denominazione di «macroglobulinemia», quella di *reticolosi linfoide disproteidemia*, come recentemente hanno proposto R. Di Guglielmo e Ruggieri.



3° La malattia di Waldenström non può elencarsi fra i processi schietamente leucemici, nè corrisponde a una varietà del plasmocitoma, per le differenze morfologiche e umorali sopra rilevate. Essa rientrerebbe invece tra i *processi emoblastosici con atteggiamento neoplastiforme*, come hanno concorso a stabilire le nostre osservazioni, soprattutto con i rilievi cito- ed istopatologici, e con lo studio della distribuzione del « tessuto d'infiltrazione leucemico-simile » che è peculiare della malattia di Waldenström.

Pertanto la malattia di Waldenström può trovare il proprio inquadramento nosografico tra le *reticoblastosi maligne sistemiche*, come nel seguente schema:



4° La patogenesi della malattia è per ora del tutto sconosciuta. La *disproteidemia* sembra essere *secondaria alla proliferazione reticolare linfoide*, come espressione di una deviazione dalla normale funzione protidopoietica, che oggi generalmente si attribuisce al reticolo-endotelio, in orientamento plasmocitario. Tale ipotesi non si può però considerare ancora interamente dimostrata.

Circa l'origine delle emorragie può dirsi, con molta verosimiglianza, che siano da imputare alla disproteidemia, in quanto che questa agisca paralizzando la funzione piastrinica, oppure in quanto che provochi una maggiore fragilità vasale, per le infiltrazioni e per eventuali fenomeni di endoallergia; è infine da considerare che inibisca la trasformazione del fibrinogeno in fibrina. L'incrementata produzione di sostanze anticoagulanti da parte delle mastcellule è stata prospettata, ma non provata.

#### BIBLIOGRAFIA.

- ASCENZI A., FABIANI F. e LUCENTINI L., *Studio anatomopatologico di un caso di macroglobulinemia di Waldenström*, « Haematologica », 42, 153 (1957).
- BRAUNSTEINER H., OSWALD E., PAKESCH F., REIMER E., *Zur hämorrhagischen Diathese bei der Makroglobulinämie Waldenström*, « Wien. Zschr. inn. Mediz. », 37, 349 (1956).
- DI GUGLIELMO R., *I plasmocitomi*, Abruzzini Edit., Roma, 1955.
- DI GUGLIELMO R. e RUGGIERI P., *La malattia di Waldenström. Reticolosi linfoide disproteidmica*, « XIV Congr. Soc. Ital. Emat. », Roma, 1956 (in corso di stampa).
- LENNERT K., *Die pathologische Anatomie der Makroglobulinämie Waldenström*, Frankf. Z. Path., 66, 201 (1955).
- WALDENSTRÖM J., *Incipient Myelomatosis or « Essential » Hyperglobulinemia with Fibrinogenopenia. A new Syndrom?*, « Acta Med. Scand. », 117, 216 (1944).

**Biologia vegetale.** — *Risultati di un trapianto di embrioni fra cariossidi di due razze colturali di grano* (\*). Nota di PAOLO MELETTI, presentata (\*\*) dal Socio A. CHIARUGI.

INTRODUZIONE. — Gli studi sulla ibridazione vegetativa, iniziati verso la fine del secolo scorso ad opera di Mitchourine e condotti praticamente senza interruzione fino ai nostri giorni, specialmente da ricercatori russi, sono diventati di grande attualità da quando si è cercato di dare una interpretazione al meccanismo di detta ibridazione.

Una buona parte della ricerca in questo senso è stata fatta sulle Graminacee, la ibridazione vegetativa delle quali è stata realizzata principalmente attraverso il trapianto degli embrioni nelle cariossidi. L'operazione, come tale, è piuttosto semplice: si tratta di staccare l'embrione dal proprio seme e di portarlo su un altro seme previamente privato dell'embrione.

Con una tecnica del genere, stando perlomeno ai dati forniti dalla letteratura sull'argomento, si sono ottenuti diversi risultati, tra i quali, particolarmente interessanti, fenomeni di eterosi (simili a quelli provocati dallo incrocio per via sessuale), modificazioni morfologiche a carico soprattutto della spiga e sue parti, modificazioni della rapidità del ciclo di sviluppo (Stroun 1956) (†).

È tenendo conto di questi fatti che abbiamo iniziato fin dal 1953 una serie di ricerche, tuttora in corso, sul trapianto degli embrioni fra cariossidi di Graminacee appartenenti a varietà, specie e generi differenti, allo scopo essenziale di studiare gli effetti di detto trapianto da un punto di vista prevalentemente morfologico.

Gli esperimenti fatti nel corso di questi tre anni ci hanno dato alcuni risultati interessanti, tra i quali abbiamo scelto, per riferirne qui brevemente, quelli ottenuti con l'innesto di embrioni di Albimonte su cariossidi di  $F_{5x}$  private dell'embrione. L'Albimonte e l' $F_{5x}$  sono due razze colturali di *Triticum vulgare* prodotte, per incrocio, dall'Istituto Nazionale di Genetica per la Cerealicoltura di Roma.

TECNICA. — Le cariossidi di Albimonte ed  $F_{5x}$  venivano tenute in acqua di fonte per un periodo di circa 24 ore, dopo di che si procedeva alla separazione degli embrioni dalle rispettive cariossidi (l'operazione, da eseguirsi con l'aiuto di una lametta allo scopo di realizzare tagli facili e regolari, richiede una certa cautela, in modo da non danneggiare gli embrioni e nel contempo da lasciare la minore quantità possibile di albume attaccata agli

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Cagliari.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(†) M. STROUN, *Contribution a l'étude du développement des Céréales*, Paul Lechevalier, Paris (1956).

embrioni stessi) e all'innesto, sulle cariossidi dell' $F_{51}$ , degli embrioni dell'Albimonte, sistemati con leggera pressione in posizione normale al posto degli embrioni dell' $F_{51}$ , previamente asportati.

Effettuato l'innesto le cariossidi venivano lasciate asciugare per un periodo di 48-96 ore ad una temperatura ambiente di 18-20°C e poi passate in piena terra. Le piante derivanti dai semi in parola, normalmente coltivate, venivano tenute sotto costante osservazione fino alla raccolta.

OSSERVAZIONI. - In generale le cariossidi dell' $F_{51}$ , portanti gli embrioni dell'Albimonte, diedero origine a piante di Albimonte perfettamente nor-



Fig. 1. - Albimonte (2/3 ca. della grandezza nat.).

mali, fatta eccezione per una pianta (su 30: di 50 cariossidi trattate 20 non germinarono) che produsse tre spighe notevolmente differenti rispetto a quelle dell'Albimonte e dell' $F_{51}$ , come risulta dalla seguente descrizione delle caratteristiche dei tre grani, compresa naturalmente la nuova forma, da noi indicata con la sigla I. v. (« ibrido vegetativo ») <sup>(2)</sup>, e ancora meglio dall'esame della Tabella I, nella quale sono riportati, per confronto, i principali caratteri distintivi degli stessi  $F_{51}$ , Albimonte ed I. v.

(2) Il termine « ibrido vegetativo » viene usato in senso generico ad indicare il risultato di una interazione fra i materiali riuniti con l'operazione di innesto (ved. appresso).

TABELLA I.

*Principali caratteri distintivi di F<sub>51</sub>, Albimonte e I.v.*

Carattere	F <sub>51</sub>	Albimonte	I.v.
SPIGA - Lunghezza . . . . .	da 6,5 a 8 cm.	da 10,5 a 13 cm.	da 6,5 a 7 cm.
Largh. di fronte . . . . .	da 1,1 a 1,5 »	da 0,8 a 1,3 »	da 0,8 a 1,2 »
di fianco. . . . .	da 1,6 a 2 »	da 0,8 a 1 »	da 1,3 a 1,8 »
Forma . . . . .	quadrata, clavata	oblunga, perfettamente regolare	quadrata
Colore . . . . .	giallo	rosso bruno	spiccata tendenza al bruno
Densità (media). . . . .	34-633	20,766	38,509
SPIGHETTE - Numero . . . . .	da 23 a 26	da 24 a 26	da 24 a 28
GLUME . . . . .	ovali, allungate, tronche all'apice, carenate, mucrone sempre 0,5 mm.	ovali, tronche all'apice, carenate, 2 nervature submarginali, mucrone da 1 a 2 mm.	ovali, piuttosto tozze, carenate, mucrone da 2 a 10 mm.
GLUMELLE . . . . .	ovali, giallo chiare, profonde. mucrone da 1 a 7 mm.	ovali, giallo bruno, intensa pigmentazione all'apice, reste da 2,5 a 6 cm.	ovali, giallo bruno, leggermente pigmentate all'apice, reste da 3,5 a 6,5 cm.
CARIOSSIDI - Numero . . . . .	da 63 a 93	da 70 a 88	da 61 a 81
Peso di 50 . . . . .	da 1,700 a 2,300 gr.	da 1,900 a 2,200 gr.	da 2 a 2,600 gr.
Lunghezza . . . . .	da 6,3 a 7 mm.	da 6,7 a 7 mm.	da 6,5 a 7,5 mm.
Larghezza . . . . .	da 2,5 a 3 »	da 2,5 a 3 »	da 2,5 a 2,9 »
Spessore . . . . .	da 2,5 a 3 »	da 2,5 a 2,8 »	da 2,5 a 3 »
CULMO- Altezza (media) . . . . .	85 cm.	100 cm.	100 cm.



F<sub>51</sub>

SPIGA. - Quadrata, clavata, più larga sui fianchi che di fronte, talora arcuata verso l'apice (in visione frontale), di colore giallo.

SPIGHETTE. - Tutte fertili, serrate, con 3-5 cariossidi ciascuna.

GLUME. - Ovali, abbastanza profonde, leggermente tronche all'apice, giallo chiare, glabre, superficie esterna provvista di caruncole; entrambe care-



Fig. 2. - F<sub>51</sub> (1/2 ca. della grandezza nat.).

nate, provviste di peli nel terzo superiore dell'interno, fornite di mucrone.

GLUMELLE. - Ovali, ampie e profonde, di colore giallo chiaro, provviste di peli nel terzo superiore dell'interno e di mucrone che, breve nelle spighette basali, aumenta progressivamente di lunghezza nelle terminali (verso la 15<sup>a</sup> spighetta raggiunge la lunghezza di 7 mm.)

CARIOSSIDE. - Bruno rossiccia; apice piuttosto stretto, provvisto di numerosi e lunghi peli; profilo ventrale quasi rettilineo, bordi acuti. Frattura farinosa.

RACHIDE. - Scarsamente flessibile, provvista di peli sui nodi e sugli internodi.

## ALBIMONTE.

SPIGA. — Regularissima, oblunga, più larga di fronte che sui fianchi, di colore rosso bruno.

SPIGHETTE. — Tutte fertili, con 3-5 cariossidi ciascuna, a disposizione uniforme sulla rachide.

GLUME. — Ovali, poco profonde, tronche all'apice, colore rosso bruno, macchiate di marron su quasi tutta la superficie con maggiore intensità verso l'apice e fornite di mucrone ricurvo verso l'interno lungo circa 1 mm. È presente la carena e, piuttosto marcate, due nervature submarginali ai lati di essa; il terzo superiore dell'interno è privo di peli.

GLUMELLE. — Ovali, giallo bruno, con intensa pigmentazione all'apice e lungo i margini, sono sprovviste di peli nel terzo superiore dell'interno, munite di piccola resta (2,5 cm.) all'altezza delle spighette basali: la resta si allunga notevolmente nelle spighette superiori, dove raggiunge la lunghezza di 6 cm.

CARIOSSIDE. — Bruno rossiccia; apice provvisto di peli; profilo ventrale quasi rettilineo, bordi acuti. Frattura farinosa.

RACHIDE. — Scarsamente flessibile, provvista di peli sui nodi e sugli internodi.

## I. v.

SPIGA. — Tipicamente quadrata, più larga sui fianchi che di fronte, più o meno arcuata verso l'apice (in visione frontale), di colore bruno rossiccio.

SPIGHETTE. — Tutte fertili, fortemente serrate, con 3-4 cariossidi ciascuna, a disposizione non uniforme sulla rachide.

GLUME. — Ovali, leggera curvatura elicoidale verso l'apice, screziate di scuro lungo i margini e verso l'apice; entrambe provviste di carena e di mucrone lungo circa 2 mm. nelle spighette basali, prossimo al cm. nelle terminali.

GLUMELLE. — Ovali, chiare su tutta la superficie fuorché all'apice, sono sprovviste di peli nel terzo superiore dell'interno; entrambe fornite di resta che, lunga circa 3,5 cm. nelle spighette basali, cresce progressivamente fino a 6,5 cm. nelle termali.

CARIOSSIDE. — Bruno rossiccia, fornita di numerosi peli all'apice; profilo ventrale quasi rettilineo con bordi arrotondati, talora acuti. Frattura farinosa.

NACHIDE. — Scarsamente flessibile, provvista di peli sui nodi e sugli internodi.

L'esame dei dati riportati consente di mettere in evidenza, come prima osservazione di rilievo, il fatto che l'I. v., derivato da un embrione di Albimonte innestato su una cariosside di F<sub>51</sub>, dell'Albimonte ha conservato

la pigmentazione, l'altezza dei culmi e le reste, portate queste ultime da una spiga di forma molto simile a quella dell' $F_{51}$ : questi si possono considerare gli unici caratteri derivati dalle forme «parentali».

Per gli altri caratteri l'I.v. si distacca nettamente sia dall'Albimonte che dall' $F_{51}$ : questo vale in particolare per la lunghezza della rachide, per il numero delle spiglette, per la densità della spiga, per la lunghezza delle reste, per il numero, il peso e la lunghezza delle cariossidi (ved. Tabella I).



Fig. 3. - I. v. (1/2 della grandezza nat.).

Sulla base di questi caratteri distintivi l'I.v. si può effettivamente considerare come una nuova razza di *Triticum vulgare*, la cui natura abbiamo cercato di precisare attraverso lo studio della discendenza.

Le colture in completo isolamento, a partire dal materiale ricavato direttamente dalla operazione di innesto, hanno permesso di constatare che le caratteristiche morfologiche dell'I.v. si sono mantenute sostanzialmente immutate per tre successive generazioni, se si esclude il carattere pigmentazione delle glume che tende a diventare gradualmente più scura. In altri termini l'I.v. ha dimostrato di essere, almeno per ora, perfettamente stabile, senza manifestare fenomeni disgiuntivi di sorta.

Un dato sperimentale di notevole valore è rappresentato dal fatto che l'I.v. è stato riottenuto, alla ripetizione di quelle stesse operazioni di innesto (embrione di Albimonte su cariossidi di  $F_{51}$ ) che lo avevano precedente-

mente originato, con caratteri praticamente immutati, fatta eccezione per i seguenti: rachidi leggermente più lunghe, minor numero di spiglette (e quindi spighe meno dense) e culmi notevolmente più corti (74 cm.).

Queste differenze, tra le due forme di I. v., non sono facilmente spiegabili, anche perché sempre aperto rimane il problema del meccanismo di formazione degli ibridi vegetativi, alla soluzione del quale problema pensiamo si possa più validamente contribuire ricorrendo alla ibridazione vegetativa di Graminacee geneticamente meglio definite di quanto non siano



Fig. 4. — Albimonte ed  $F_{51}$  in alto, ibrido sessuale  $F_1$  al centro, principali tipi disgiuntivi alla  $F_2$  in basso (1/4 ca. della grandezza nat.).

le due razze colturali da noi impiegate, le quali d'altronde furono utilizzate per lo svolgimento di una prima serie di ricerche fatte essenzialmente a titolo orientativo.

Si tenga presente ad ogni modo che, per quanto riguarda il meccanismo di formazione dell'I. v., noi possiamo escludere che esso sia il risultato di una ibridazione per via sessuale tra l'Albimonte e l' $F_{51}$ , come chiaramente dimostrato dai dati sperimentali a nostra disposizione ricavati da prove di incrocio fra gli stessi (Albimonte  $\times F_{51}$  e viceversa). Tra le forme di disgiunzione, derivanti da dette ibridazioni, non esiste nessun individuo che possa assomigliare, seppure lontanamente, all'I. v. (ved. fig. 4).



Un fatto del genere appare di grande interesse in quanto permette di intravedere la possibilità di utilizzare la ibridazione vegetativa come metodo per la creazione di forme vegetali non altrimenti realizzabili, specialmente nel caso in cui si riesca ad estendere con successo la tecnica da noi adottata ad altre piante, ciò che per l'istante potrà risultare dall'esito di nostre ricerche, attualmente in corso, sulla ibridazione vegetativa di Graminacee geneticamente marcate.

**Biologia.** — *Effetti del  $\gamma$ -dinitrofenolo sulle uova di «Aplysia limacina»*. Nota (\*) di FRANCESCA CARRANO, presentata(\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Numerose ricerche hanno stabilito che il dinitrofenolo esercita un'azione specifica sui mitocondri.

Loomis e Lipmann (1948) <sup>(1)</sup> avevano mostrato che il dinitrofenolo (DNP) blocca la fosforilazione ossidativa associata con l'ossidazione del glutamato. Green et al. (1949) <sup>(2)</sup>, e poi Harman (1950) <sup>(3)</sup> confermarono questi risultati con i mitocondri isolati dai tessuti dei mammiferi.

Per l'uovo non fecondato di riccio di mare vanno ricordati i lavori di Keltch et al. (1950) <sup>(4)</sup>: anche queste ricerche hanno mostrato che la fosforilazione ossidativa è bloccata, mentre non è modificata l'attività ossidativa. Recentemente Hishida & Nakano (1954) <sup>(5)</sup> hanno riconfermato questi dati su omogenati di uova di *Oryzias latipes*. Al contrario dell'ossidazione degli intermedi del ciclo di Krebs, l'ossidazione degli acidi grassi è invece bloccata dall'azione del DNP. A causa del modo di agire descritto, il DNP è considerato come uno degli «uncoupling agents»: tra questi sono da mettere anche l'acido usnico (Johnson et al., 1950) <sup>(6)</sup>; la gramicidina (Cross et al., 1949) <sup>(7)</sup> la tiroxina (Martius & Hess, 1955) <sup>(8)</sup>, la clorpromazina (Berger et al., 1956) <sup>(9)</sup>, l'aureomicina (Loomis, 1950) <sup>(10)</sup>.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della Università di Palermo, presso il Centro di Citofisiologia sperimentale del C.N.R. L'autore ringrazia il prof. G. Reverberi per aver diretto queste ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) W. F. LOOMIS & F. LIPMANN, «J. Biol. Chem.», 173, 807 (1948).

(2) D. A. GREEN, W. A. ATCHLEY, J. NORDMANN & L. J. TEPLY, «Arch. Biochem.», 24, 359 (1949).

(3) J. W. HARMAN, «Exptl. Cell Research», 1, 382 (1950).

(4) A. K. KELTCH, C. F. STRITTMATTER, C. P. WALTER & G. H. CLOWES, «J. Gen. Physiol.», 33, 547 (1950).

(5) T. O. HISHIDA & E. NAKANO, «Embryologia», 2, 67 (1952).

(6) R. B. JOHNSON, G. FELDT e H. A. LARDY, «Arch. Biochem.», 28, 318 (1950).

(7) R. J. CROSS, I. V. TAGGART, G. A. COVO & D. E. GREEN, «J. Biol. Chem.», 177, 655 (1949).

(8) C. MARTIUS & B. HESS, «Biochem. Zeitschr.», 326, 291 (1955).

(9) M. BERGER, H. J. STRECKER & H. WAELSCH, «Nature (London)», 177, 1234 (1956).

(10) W. F. LOOMIS, «Science», 111, 474 (1950).

Ancora in gran parte sconosciuto è il meccanismo d'azione del DNP. Secondo Lindberg & Ernster (1954)<sup>(11)</sup> questa sostanza scinderebbe in due frammenti l'enzima che catalizza il transfer del fosforo dal piridonfosfato all'ATP: risultato della scissione dell'enzima sarebbero due fosfatasi: queste a loro volta spezzerebbero rispettivamente l'ATP e il piridonfosfato. Secondo Harman (1950)<sup>(3)</sup> l'azione del DNP si eserciterebbe distruggendo soprattutto le strutture interne del mitocondrio: ciò sarebbe attestato dall'esame microscopico dei mitocondri trattati.

Da quello che è stato riferito, compare l'importanza di esaminare l'azione del DNP nello sviluppo embrionale, specialmente in quei casi in cui vi è una segregazione precoce e limitata dei mitocondri in determinati blastomeri.

Nello sviluppo dell'uovo di riccio di mare l'azione del DNP fu esaminata, già da tempo, da Clowes & Krahll (1936)<sup>(12)</sup>; tra le ricerche recenti sono da annoverarsi quelle di Hörstadius (1953)<sup>(13)</sup> e di Kriszat (1954)<sup>(14)</sup>. Nell'uovo di cavalletta va ricordato il lavoro di Bodine & Boell (1938)<sup>(15)</sup>; negli Anellidi le ricerche di Carrano (1955)<sup>(16)</sup>; negli Anfibi quelle di Dawson (1938)<sup>(17)</sup>, Andreassi (1941)<sup>(18)</sup>, Ornstein & Gregg (1952)<sup>(19)</sup>.

Nell'uovo di Molluschi non è stata compiuta alcuna ricerca al riguardo; l'importanza di tale ricerca scaturisce dal fatto che in queste uova, come in quelle di *Tubifex* (Lehmann & Wahli, 1954)<sup>(20)</sup>; Carrano e Palazzo, 1955)<sup>(21)</sup>; e di Ascidie (Reverberi, 1956)<sup>(22)</sup>, è stata messa in evidenza una segregazione precoce di mitocondri in determinati blastomeri. Attardo (1957)<sup>(23)</sup> infatti ha studiato la distribuzione dei mitocondri lungo il cell-lineage dell'uovo di *Aplysia limacina* facendo uso del verde Janus. Nell'uovo indiviso i mitocondri sono distribuiti in maggiore quantità nella regione animale, dove sono disposti in una zona anulare; allo stadio di due e di quattro blastomeri essi risultano localizzati nella regione animale e distribuiti secondo un'area circolare, attorno ai nuclei; negli stadi successivi i mitocondri vengono segregati nei micromeri e in determinati mesomeri; nella larva si ritrovano nel piede, nel velo e nel bordo del mantello, che derivano appunto da tali blastomeri.

(11) O. LINDBERG & L. ERNSTER, « Chemistry and Physiology of Mitochondria and Morcismes », *Protoplasmatologia*, III B 4 (1954).

(12) G. H. CLOWES & M. E. KRAHL, « J. Gen. Physiol. », 20, 145 (1936).

(13) S. HÖRSTADIUS, « J. Embryol. Exp. Morphol. », 1, 327 (1953).

(14) G. KRISZAT, « Exptl. Cell Research », 6, 425 (1954).

(15) J. H. BODINE & E. J. BOELL, « J. Cell. Comp. Physiol. », 11, 41 (1938).

(16) F. CARRANO, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 19, 85 (1955).

(17) A. B. DAWSON, « J. Exp. Zool. », 78, 101 (1938).

(18) G. ANDREASSI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 16, 663 (1941).

(19) N. ORNSTEIN & J. R. GREGG, « Biol. Bull. », 103, 407 (1952).

(20) E. F. LEHMANN & H. R. WAHLI, « Zeitschr. Zellforsch. », 39, 618 (1954).

(21) F. CARRANO & F. PALAZZO, « Riv. Biol. », 47, 193 (1955).

(22) G. REVERBERI, « Exper. », 12, 55 (1956).

(23) C. ATTARDO, « Acta Embryol. Morphol. Exper. », 1, 65 (1957).

Sulla base di questi risultati ho cercato di esaminare se si abbiano delle anomalie nei riguardi della morfogenesi in seguito all'azione del DNP.

### RISULTATI.

Le uova a partire dallo stadio indiviso, sono state fatte sviluppare in diverse concentrazioni di  $\gamma$ -dinitrofenolo (Merck): allo scopo, una soluzione molare di DNP fu diluita opportunamente con acqua di mare.

A) Il trattamento con soluzioni  $4$  e  $6 \times 10^{-5}$  M produce disturbi nella gastrulazione e arresto della embriogenesi.

B) In soluzione  $1$  e  $2 \times 10^{-5}$  M, invece, le uova si sviluppano, dando larve in grande percentuale normali: circa l'8 %. tuttavia delle larve presenta anomalie. Le anomalie sono a carico del *pie*de, del *velo* e del *bordo del mantello* (figg. 1-4). Nei riguardi di queste anomalie le larve possono distribuirsi nel seguente modo:

- 1° larve nelle quali, velo, bordo del mantello e piede sono ridotti;
- 2° larve con velo e bordo del mantello ridotti;
- 3° larve col solo piede ridotto.

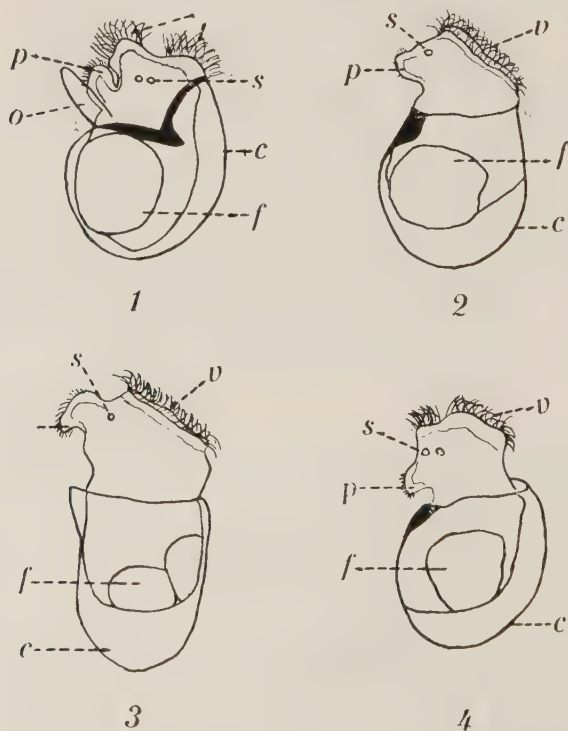


Fig. 1. - Larva controllo. Figg. 2, 3, 4: Larve con anomalie a carico del velo, del piede e della conchiglia, ottenute con trattamento con  $2 \times 10^{-5}$  M  $\gamma$ -dinitrofenolo.

(Abbreviazioni: c = conchiglia; f = fegato; o = opercolo; p = piede; s = otolite; v = velo).

Le anomalie a carico del piede consistono nel fatto che esso è più piccolo e più tozzo del normale; ha una forma ad uncino e non la consueta forma a suola; come il solito è provvisto di corte ciglia ma è privo di opercolo.

Le anomalie a carico del mantello consistono in una riduzione del bordo: questa riduzione interessa anche la forma della conchiglia, che si presenta d'aspetto rotondeggiante o allungata a cilindro.

Le anomalie a carico del velo consistono nel fatto che i suoi lobi sono ridotti e qualche volta sfrangiati; le ciglia sono presenti, mobili e di lunghezza normale ma il movimento muscolare manca quasi completamente.

Le larve che presentano anomalie a carico del solo velo, o del velo e del bordo del mantello sono capaci di movimento a causa della presenza delle ciglia; non avendo, però, la muscolatura del velo efficiente, non possono sollevarsi dal fondo del disco di cultura.

#### DISCUSSIONE.

Le presenti ricerche mostrano che il trattamento delle uova in sviluppo di *Aplysia* con opportune soluzioni di DNP induce, nelle larve, malformazioni soprattutto a carico del velo, del piede e del mantello; questi organi, oltre a essere ridotti, sono sprovvisti di muscolatura efficiente: il movimento delle larve si compie esclusivamente a opera delle ciglia.

Negli esperimenti non risultarono anomalie a carico di altri sistemi.

Lo studio della distribuzione dei mitocondri nell'uovo di *Aplysia*, nei diversi stadi dall'uovo insegmentato alla larva, mostra (Attardo, 1957) <sup>(23)</sup> che essi sono gradualmente segregati dapprima in blastomeri situati al polo animale, e terminalmente nel velo, nel bordo del mantello e nel piede, che da tali blastomeri derivano.

Se si ammette che i mitocondri siano impegnati in qualche modo alla formazione di queste strutture, il risultato ottenuto in conseguenza del trattamento col DNP riesce facilmente comprensibile.

Che i mitocondri partecipino, probabilmente come fornitori di energia, nel ciclo delle sintesi che sono il primo requisito per la edificazione delle strutture morfologiche, è suggerito, ormai, da diversi dati: soprattutto da quelli forniti dal trattamento con gli inibitori enzimatici specifici (cfr. Reverberi, 1957) <sup>(24)</sup>. Anche nel caso del trattamento con DNP probabilmente vengono interessati molti sistemi enzimatici, e sicuramente quelli preposti ai processi della fosforilazione ossidativa: ne consegue che tutto il sistema con cui l'energia è liberata e utilizzata deve essere profondamente alterato. Del resto le presenti ricerche collimano perfettamente con quelle precedentemente condotte sull'uovo di *Tubifex* (Carrano, 1955) <sup>(16)</sup>.

(24) G. REVERBERI, «Acta Embryol. Morphol. Exper», I, 12 (1957).



**Biologia.** — *Osservazioni sulle cellule nervose motorie del midollo spinale di Anfibi urodeli in seguito all'amputazione dell'arto.* Nota (\*) di BIANCA MARIA MARIANI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Nissl<sup>(1)</sup>, in possesso di un nuovo metodo di indagine istologica, ha osservato che la cellula nervosa, dopo la resezione del suo neurite, presenta tutta una serie di modificazioni a carico della sostanza basofila (o sostanza cromofila, o tigroide, o sostanza di Nissl).

In seguito al taglio della fibra nervosa, quando questa rigenera, le zolle tigroidi scompaiono dal corpo cellulare a partire dalle vicinanze del nucleo (cromatolisi perinucleare) e nel contempo il pirenoforo aumenta di volume (ipertrofia reattiva) ed il nucleo diviene eccentrico: tale periodo è stato detto « fase di reazione ». Ad esso segue la « fase di riparazione » caratterizzata dalla reintegrazione delle zolle tigroidi e dal ritorno del nucleo al centro della cellula accompagnati da una diminuzione progressiva del volume del pirenoforo, del nucleo e del nucleolo.

I fatti messi in evidenza da Nissl sono stati comprovati da numerosissime ricerche (Lugaro 1895-1906, Marinesco 1897, Ballet e Dutil 1897, Van Gehuchten 1897-1906, Foà 1899, Ito 1941, Hydén 1943, Bodian 1947, ecc.)<sup>(2)</sup>; è stato inoltre precisato che l'intensità e la gravità di queste lesioni sono in diretto rapporto con l'entità del trauma e con la vicinanza di questo al centro di origine.

Nel nostro Laboratorio, nell'ambito dello studio dei fenomeni della rigenerazione (Stefanelli 1943-1951)<sup>(3)</sup>, sono state eseguite osservazioni sui neuroni motori del midollo spinale di Rettili onde stabilire un confronto tra i fenomeni reattivi che si hanno in seguito alla rigenerazione del neurite (Marotta 1946, Zannone 1947)<sup>(4)</sup> e quelli che si hanno quando il neurone non rigenera e in breve tempo degenera (Baffoni 1950-1951)<sup>(5)</sup>. Da queste ricerche è stato dimostrato che in ambedue i casi si ha un eguale grado di ipertrofia del pirenoforo mentre diversificano i quadri della sostanza baso-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) F. NISSL, « Allg. Zeitschr. f. Psychiatr. », 48, p. 675 (1891-1892).

(2) ved.: G. MARINESCO, *La Cellule nerveuse*, Paris (1909); H. HYDEN, « Acta physiol. scand. », 6, suppl. 17° (1943); D. BODIAN, « Simp. Soc. Experim. Biol. », 1, p. 163 (1947); G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 10, p. 319 (1951).

(3) A. STEFANELLI, « Boll. Soc. ital. Biol. Sperim. », 19 (1943); « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 8, p. 498 (1950); *Genetic. Neurology* (Ed. P. Weiss), p. 210 (1950); « La Ric. Scientifica », 20, p. 609 (1950).

(4) M. MAROTTA, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 1, p. 1367 (1946); L. ZANNONE, « Ricerche di Morfologia » 22-23, p. 183 (1947).

(5) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 10, p. 319 (1951).

fila; confermando nel primo caso la cromatolisi perinucleare e dimostrando nel secondo caso che l'ipertrofia è accompagnata da cromatolisi diffusa. Il comportamento delle cellule nervose che degenerano in seguito a lesione traumatica del neurite diversifica da quello dell'involuzione fisiologica nel quale, invece, pirenoforo e nucleo si atrofizzano progressivamente e la sostanza basofila si rarefa e scompare a partire dalla periferia cellulare (cromatolisi periferica) <sup>(6)</sup>.

Nell'ambito di queste ricerche ho studiato i fenomeni reattivi dei neuroni motori spinali negli Anfibi urodeli in seguito all'amputazione dell'arto. Ho anche tentato, per un confronto, di impedire la rigenerazione dell'arto, ma senza successo: infatti, malgrado la suturazione e cicatrizzazione del tegumento, l'asportazione totale del femore, la completa estirpazione dell'emicino e persino lo strappamento dei nervi alla loro origine, si è costantemente formato il blastema rigenerativo e l'arto è rigenerato con un ritardo maggiore o minore rispetto a quello semplicemente amputato (dopo un mese nel caso di asportazione radicale di arto, emicino e nervi).

In questa Nota riferisco i risultati riguardanti i fenomeni reattivi dei neuroni motori spinali in seguito alla rigenerazione dell'arto poiché essi diversificano per alcuni aspetti da quelli dei Rettili e Mammiferi.

Per tali ricerche mi sono servita di un lotto di 20 individui adulti, di eguale taglia, di *Triturus cristatus carnifex* (Laur.) cui ho amputato l'arto posteriore destro a metà del femore. La zona lombare della colonna vertebrale degli animali operati è stata fissata (liquido di Helly) a vari tempi dall'operazione (dopo 5, 10, 15, 20, 60, 90 giorni). I segmenti isolati di midollo spinale sono stati inclusi in paraffina - celloidina e sezionati in serie trasversali (7  $\mu$  di spessore). I preparati sono stati colorati col metodo di Nissl al bleu di toluidina ( $10^{-4}$ ) in mezzo tamponato (a pH = 4,5 per 3<sup>h</sup> a 37°C).

Di ogni midollo ho misurato 20 o più elementi tra quelli di maggiori dimensioni delle corna anteriori; poiché le paia di nervi spinali che innervano l'arto sono quattro, per avere un criterio di valutazione esatto per la comparazione dei risultati, ho scelto i neuroni motori spinali al livello dell'uscita del secondo paio di nervi che è più cospicuo e in rapporto al quale ho notato le più accentuate modificazioni delle cellule motorie.

Negli *animali di controllo* (non operati) i neuroni motori del midollo spinale lombare (raggio medio del pirenoforo: 10,6  $\mu$ ) presentano, di massima, una forma allungata con nucleo ellissoidale (raggio medio: 6,6  $\mu$ ). Nel nucleo si osservano uno o due nucleoli. La sostanza basofila nel pirenoforo ha l'aspetto di zolle minute più numerose attorno al nucleo ove talvolta sono fuse a costituire delle calotte, alla base e nella porzione prossimale dei dendriti la sostanza basofila è in zolle filamentose (fig. 1).

*Cinque giorni* dopo l'amputazione dell'arto, la quasi totalità dei neuroni delle corna anteriori presenta il pirenoforo più voluminoso (raggio medio: 12,86  $\mu$ ) e il nucleo che non si discosta dai valori dei controlli (raggio medio:

(6) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 13, p. 281 (1952); G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. di Biol. », 43, p. 373 (1951).

6, 8  $\mu$ ); i nucleoli, più grossi che nei controlli e intensamente basofili, sono spostati verso la membrana nucleare. All'ipertrofia del pirenoforo si associano modificazioni della sostanza basofila che presenta ispessimenti contro la membrana cellulare e, nel contempo, una rarefazione di zolle tigroidi attorno al nucleo il quale, pertanto, può apparire circondato da un alone meno basofilo; le zolle più lontane dalla membrana cellulare mostrano per lo più contorni poco precisi (fig. 2). Ho osservato che alcuni neuroni conservano l'aspetto e le dimensioni dei controlli.

*Dieci giorni* dopo l'operazione quasi tutti i pirenofori sono ulteriormente ingrossati raggiungendo le loro massime dimensioni (raggio medio: 13,1  $\mu$ ); il nucleo presenta un aumento di volume (raggio medio: 7,2  $\mu$ ); i nucleoli (in genere due, a volte anche tre) sono divenuti molto voluminosi e più intensamente basofili. I fenomeni osservati a carico della sostanza basofila a cinque giorni dall'operazione, dopo dieci giorni sono accentuati; infatti, invece di zolle tigroidi, nel citoplasma appaiono granulosità minute ed a margini poco netti; restano sempre evidenti gli ammassi basofili alla periferia del pirenoforo. Si nota poi in numerosi elementi un alone meno basofilo attorno al nucleo (fig. 3). Anche a questa epoca alcuni neuroni presentano aspetti della sostanza basofila come nei controlli.

Dopo *quindici giorni* dall'amputazione dell'arto si osservano le più vistose modificazioni dei neuroni motori del midollo spinale. Mentre il pirenoforo mantiene lo stesso grado di ipertrofia (raggio medio: 13,1  $\mu$ ) il nucleo invece presenta un ulteriore aumento di volume (raggio medio: 7,5  $\mu$ ) ed è spostato verso la periferia della cellula; talora aderisce alla membrana cellulare ed a volte fa ernia all'esterno. Quando si spinge contro la membrana cellulare il nucleo è appiattito e la porzione della membrana nucleare rivolta verso il pirenoforo è per lo più concava. I nucleoli raggiungono il massimo grado dell'ingrossamento, sono intensamente basofili e generalmente si presentano in una posizione eccentrica. A questo stadio, tranne alla periferia del pirenoforo ove restano ancora ammassi intensamente basofili, il citoplasma si presenta affatto privo di zolle tigroidi; in corrispondenza alla porzione centrale della concavità formata dalla membrana nucleare appaiono minutissimi granuli basofili che formano una specie di cono con la base contro la concavità e il vertice verso il centro del pirenoforo (fig. 4). Questi quadri hanno suggerito l'ipotesi che la sostanza basofila venga sintetizzata nel nucleo (Hatai, Scott, Holmgren, Rohde, Spatz, Stöhr, Hydén, ecc.)<sup>(2)</sup>. In alcune cellule ho osservato quadri basofili molto simili a quelli dei neuroni motori a 10 giorni dall'operazione.

*Venti giorni* dopo l'amputazione dell'arto la cellula nervosa, in genere, ritorna ad avere un aspetto allungato, per quanto si mantenga voluminosa (raggio medio del pirenoforo: 13  $\mu$ ); il nucleo raggiunge le dimensioni massime (raggio medio: 7,7  $\mu$ ), è ellittico ed ancora un po' spostato verso la periferia cellulare; il nucleolo si presenta piuttosto voluminoso: è frequente la presenza di due nucleoli in uno stesso nucleo. Nel pirenoforo sono comparse le zolle basofile: esse sono più minute di quelle dei controlli e, come



in questi, sono più numerose attorno al nucleo; talvolta si addossano alla membrana nucleare costituendo due calotte coniche il cui asse è parallelo a quello della maggiore lunghezza della cellula (fig. 5). In alcuni elementi nervosi la sostanza basofila appare così abbondante e fitta che non è possibile distinguerne le singole zolle.

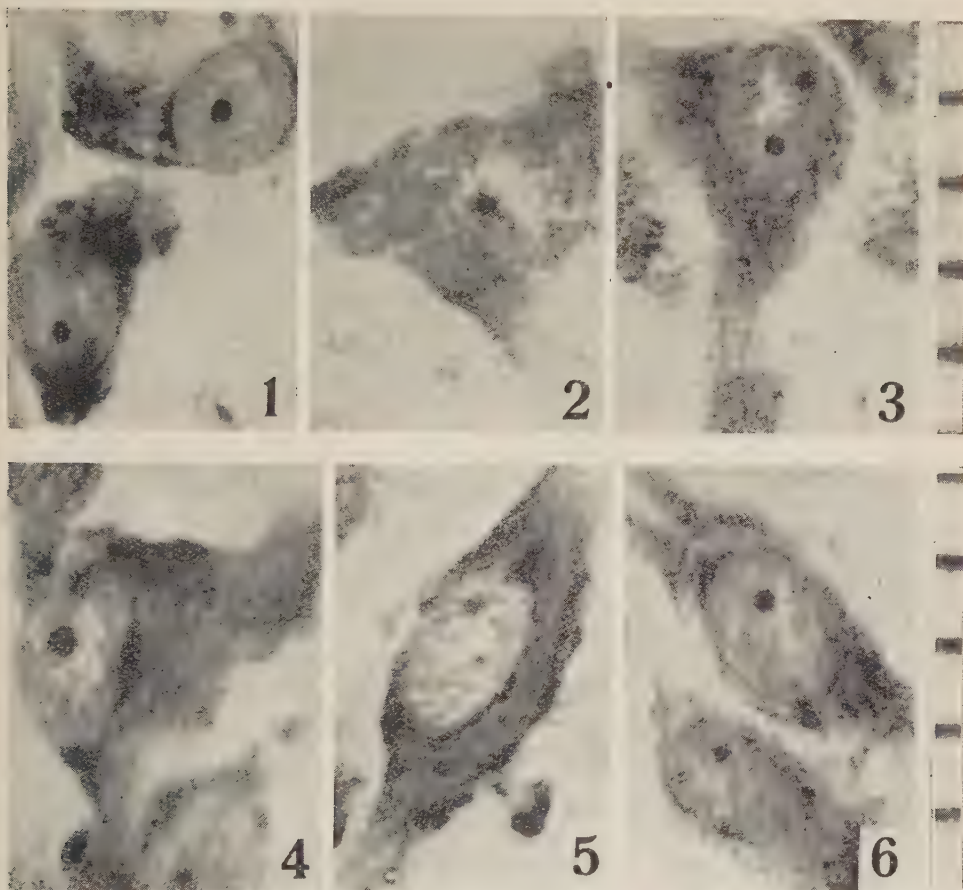


Fig. 1. — Aspetti della sostanza basofila nei neuroni motori del midollo spinale di Anfibiolele non operati (1) e dopo 5 gg. (2), 10 gg. (3) 15 gg. (4), 20 gg. (5) e 90 gg. (6) dalla amputazione dell'arto (Ogni intervallo della scala a fianco = 10  $\mu$ ).

Sessanta giorni dopo l'operazione le cellule nervose delle corna anteriori del midollo spinale sono tornate per dimensioni ed aspetti simili a quelle dei controlli; il pirenoforo infatti, torna a valori molto vicini ad essi (raggio medio: 11,3  $\mu$ ); il nucleo, invece, è ancora voluminoso (raggio medio: 7,1  $\mu$ ) ma si presenta al centro della cellula ed in esso vi sono indifferentemente uno o due nucleoli, ma meno voluminosi che nel periodo reattivo. Nel pirenoforo la sostanza basofila appare in quantità maggiore che nei controlli, però il suo aspetto e la sua distribuzione sono simili a questi. Nelle cellule si presentano molto ispessite le due calotte basofile ai poli del nucleo.



Dopo *novanta giorni* dall'amputazione dell'arto i valori dimensionali sia del pirenoforo (raggio medio:  $11,7 \mu$ ) che del nucleo (raggio medio:  $7,5 \mu$ ) restano invariati rispetto a quelli del periodo precedente. Il nucleo occupa la porzione centrale del pirenoforo, la sostanza basofila è a zolle con distribuzione e forma simili a quelle degli animali non operati (fig. 6). Alcuni neuroni presentano aspetti simili a quelli descritti dopo 60 giorni dall'operazione.

Dai dati esposti risulta che nelle cellule nervose delle corna anteriori del midollo spinale degli Anfibi urodeli in seguito all'amputazione dell'arto si verificano quadri della sostanza basofila corrispondenti a quelli riscontrati, durante i processi di rigenerazione della fibra nervosa, in neuroni di altri Vertebrati; infatti anche negli Urodeli si osserva l'ipertrofia del pirenoforo accompagnata dai quadri basofili della cromatolisi perinucleare. A questa prima fase di reazione fa seguito la fase di riparazione durante la quale il volume cellulare e nucleare diminuiscono e l'aspetto e la quantità della sostanza basofila tornano normali.

Tempi dall'operazione	Diametri cellulari		Diametri nucleari		N/P
	massimo	minimo	massimo	minimo	
Controllo . . . . .	30,75 $\mu$	16,45 $\mu$	15,4 $\mu$	12,06 $\mu$	24
5 gg. dall'operazione . . .	36,7 »	20,25 »	15,6 »	12,5 »	15
10 » . . .	38,6 »	20 »	17,2 »	12,86 »	17
15 » . . .	40,1 »	19,2 »	17 »	14 »	19
20 » . . .	41,6 »	18,3 »	18 »	14 »	21
60 » . . .	34,3 »	16,6 »	15,8 »	13,4 »	25
90 » . . .	33,7 »	18,2 »	18 »	13,7 »	26

Le variazioni dell'indice N/P (vedi tabella) dimostrano che l'ipertrofia nel primo periodo della fase reattiva avviene prevalentemente a carico del citoplasma; infatti dopo 5 giorni mentre il pirenoforo è già ipertrofico il nucleo non modifica il proprio volume; quello del pirenoforo raggiunge i massimi valori dopo 10-15 giorni, quello nucleare li raggiunge dopo 20 giorni e li mantiene più a lungo: ciò conferma che il nucleo segue con ritardo le variazioni volumetriche del pirenoforo <sup>(6)</sup>.

Non tutti i neuroni di uno stesso centro reagiscono con la stessa sincronia: mentre la maggior parte di essi è ad un determinato stadio reattivo o riparativo alcuni, invece, possono presentare gli aspetti di stadî già superati; poiché dopo 5 giorni dall'operazione ho osservato con una certa frequenza aspetti simili a quelli dei controlli e poiché questi sono divenuti man mano più rari, il fenomeno non appare dovuto alla diversa durata del processo reattivo o riparativo nei singoli neuroni, ma piuttosto alla diversa epoca in cui esso inizia.

La comparazione tra quanto è stato messo in evidenza negli Anfibi urodeli e negli altri Vertebrati dimostra che, pure essendo eguali le modificazioni reattive dei neuroni motori durante la rigenerazione del neurite, la durata in cui esse si manifestano diversifica; infatti mentre i quadri più tipici della cromatolisi perinucleare si hanno nei Mammiferi dopo 5-7 giorni<sup>(2)</sup>, nei Rettili essi si verificano dopo 9-10 giorni (4,5) e negli Anfibi urodeli solo dopo 15 giorni. Ne consegue che negli Urodeli la durata dei fenomeni reattivi è maggiore che nei Rettili e nei Mammiferi, cioè la reazione è più lenta pure essendo le capacità rigenerative più intense.

Dal confronto fra Rettili e Anfibi urodeli, inoltre, risulta che i fenomeni reattivi (almeno per ciò che riguarda l'ipertrofia) sono molto più accentuati nei primi che nei secondi; infatti mentre il raggio del pirenoforo nei neuroni motori dei Rettili aumenta del 110%, quello degli elementi nervosi negli Anfibi urodeli aumenta solo del 34%.

L'unica relazione che potrebbe renderci conto della diversa durata dei processi nei due gruppi di animali è l'aver constatato che la sostanza basofila nel pirenoforo dei neuroni motori spinali degli Urodeli è molto più scarsa che in altri Vertebrati; è noto che la quantità di sostanza basofila è espressione dell'intensità delle sintesi (specialmente di quelle proteiche) che avvengono nella cellula nervosa; la scarsità della sostanza basofila nei neuroni motori degli Urodeli indica, pertanto, che in questi animali l'attività delle sintesi proteiche è meno intensa e può spiegare perché la durata del processo reattivo è di conseguenza maggiore.

Va ancora osservato che, mentre nei Mammiferi e nei Rettili ogni nucleo ha un solo nucleolo, negli Anfibi urodeli invece il numero dei nucleoli è variabile; durante la fase reattiva i nucleoli oltre a diventare ipertrofici e più basofili (come avviene negli altri Vertebrati) aumentano anche di numero: il computo dei nucleoli per ogni neurone, eseguito su un centinaio di nuclei di animali non operati (controlli) rispetto a quelli operati ha dato nei primi una media di 1,63 mentre nei secondi di 2 (il massimo valore della media dei nucleoli si ha dieci giorni dopo l'operazione ove è pari a 2,3).

Ricordo che di recente nel nostro Laboratorio la variabilità numerica dei nucleoli in neuroni di Anfibi urodeli è stata osservata durante lo sviluppo (Marini)<sup>(7)</sup>.

Concludendo: le presenti osservazioni dimostrano che, malgrado la imponente capacità rigenerativa che presentano gli Anfibi urodeli rispetto agli altri Vertebrati, le modificazioni reattive dei neuroni motori durante la rigenerazione del neurite sono meno intense ed hanno una maggiore durata; i quadri della sostanza basofila sono simili a quelli degli altri Vertebrati, ma i nucleoli variano di numero durante l'attività rigenerativa del neurone.

(7) M. MARINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 20, p. 373 (1956).

## COMMEMORAZIONI

**Commemorazione del Socio Nazionale Federico Sacco**

tenuta (\*) dal Socio MICHELE GORTANI.

Era il 1911. Dopo una sequela di malattie e lutti familiari io ero rimasto solo; mentre da tempo, per attendere a casa, avevo dovuto lasciare il posto di assistente a Bologna. Chi mi sollevò, riportandomi a vita operosa nel campo dei miei studi, fu la mano amica di Federico Sacco. Rimasi due anni con lui; e quanto io gli debba, testimonia questo mio dire, che non vuol essere commemorazione soltanto, ma anche segno di non dimentica ed affettuosa riconoscenza.

Ci vedemmo la prima volta nel 1903, sull'Amiata; egli nella piena maturità, io ancora studente. La reciproca simpatia divenne amicizia due anni più tardi, durante il congresso geologico che per incarico del venerando prof. Taramelli preparai nel mio settore di lavoro in Friuli. Amicizia che restò salda fino all'ultimo, per mutare di tempi e di eventi, e malgrado le parziali divergenze delle nostre vedute così su metodi e problemi delle ricerche, come su questioni politiche e sociali.

Nel periodo in cui gli vissi accanto, tutt'e due assorbiti nel diuturno lavoro, egli mi fu esempio costante per dirittura morale, nobiltà d'animo, austerità di vita, operosa tenacia. Le risorse della fortissima fibra dedicava per intero allo studio: dodici ore quotidiane in laboratorio nei giorni di scuola, almeno altrettante sul terreno durante le ferie. Fedele alla norma che «seggiendo in piuma - in fama non si vien, né sotto coltre», teneva per sé a vile non pure ogni mollezza, ma ogni agio che i suoi mezzi gli avrebbero agevolmente concesso; e quanto negava alla sua persona profondeva nell'esplorare la natura e struttura geologica del nostro suolo e nello stampare e diffondere le opere sue. Si spiega così la straordinaria abbondanza della sua produzione, condotta col ritmo di dieci lavori all'anno per tutti i tredici lustri della sua lunga attività di studioso.

Tutto d'un pezzo, piemontese di buona razza, Federico Sacco era nato il 5 febbraio 1864 a Fossano, nella «provincia grande». L'alta fronte e lo sguardo limpido e sereno correggevano l'asimmetria del volto, ingentilito dalla bionda cornice della chioma un po' ribelle e della barba a volte scomposta. L'abituale austerità dell'espressione, frutto di un severo dominio di sé, sapeva a tratti addolcirsi familiarmente in un franco e quasi ingenuo sorriso. Nobilmente eretto il capo su l'alta e asciutta persona; che l'agile

(\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.



compasso delle lunghe gambe portò sistematicamente a percorrere una fitta rete di itinerari in tutte le contrade d'Italia.

Come altri geologi della passata generazione, dovette il Sacco farsi quasi per intero da sé. Quando, alla fine del 1879, varcò la soglia dell'università, erano appena scomparsi Angelo Sismonda e Bartolomeo Gastaldi, pionieri della geologia del Piemonte; e la cattedra di Torino era temporaneamente affidata a Martino Baretto, cresciuto alla loro scuola, ma che lasciò assai meno durevole impronta. Col Baretto s'iniziò il giovane alla conoscenza delle Alpi, e insieme con lui pubblicò un lavoro sul Margòzzolo, l'isolato nodo montuoso che divide il lago d'Orta dal lago Maggiore.

Ma diverso era il suo orientamento spontaneo. Fin da studente, si era appassionato alla geologia e paleontologia del bacino terziario e quaternario piemontese, ampiamente aperto e disteso tutto in giro alla sua Fossano; e su questo, a vent'anni appena, aveva scritto i primi lavori. Primi di una lunga serie, che lo condusse in pochi anni di fervida attività a pubblicare la completa monografia di quel bacino sotto gli aspetti geomorfologico, stratigrafico, paleontologico e geologico-applicato; monografia che, insieme agli studi preparatori complementari di essa, gli valse, giovanissimo ancora, la nomina a membro onorario della Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. A soli 25 anni Federico Sacco dava alle stampe questo lavoro poderoso, che neppure oggi, dopo tredici lustri, si può trascurare; e in cui troviamo delineati gli argomenti, l'indirizzo ed il metodo che informeranno gran parte della sua feconda attività.

Come dal bacino quaternario dell'alto Piemonte egli venne estendendo analisi e sintesi all'intera Valle Padana, così la perfetta conoscenza della classica stratigrafia terziaria ligure-piemontese fu il punto di partenza per lo sviluppo metodico delle sue ricerche fino all'intero Appennino, di cui in un ventennio giunse a dare, settore per settore, una visione ed una rappresentazione unitarie. Per suo merito avemmo che nel 1910 fosse così delineata anche cartograficamente la fisionomia geologica dell'Appennino, precedendo di mezzo secolo, per vastissime zone, il rilevamento sistematico dell'apposito Ufficio statale.

Di questo, forse, l'autore avrebbe dovuto esser pago. Ma egli volle andare più oltre, fino a dare il suo nome a 40 fogli della Carta geologica d'Italia al 100.000, pubblicati fra il 1922 e il 1942. E in queste date è la loro debolezza.

Non era fattibile da una sola persona, per quanto alacre e robusta, un lavoro cui basterebbe a mala pena l'intera attività di cinque operatori per un quarantennio; senza contare il tempo richiesto dallo studio di complessi molto discussi e difficili, dalle grandi variazioni della serie stratigrafica da un capo all'altro della penisola, dalle interpretazioni strutturali che per vaste regioni sono tutt'ora controverse.

Il Sacco risolse il problema percorrendo una rete di itinerari quanto più fitta poté, e giovandosi, per colmare i vuoti, dei rilevamenti geologici d'altri, interpretati alla luce dei propri; il che portava, alle volte, a molti-



plicare manchevolezze ed errori. D'altra parte, era ormai tramontato il periodo in cui ai rilevatori si poteva chiedere un'approssimazione assai larga, bastevole a far conoscere nelle grandi linee come sono disposti i terreni. Per tali motivi, a una così notevole somma di fatiche fisiche e intellettuali non corrispose adeguato riconoscimento. Gli si diede torto anche dove, con esatta intuizione, avea percorso i tempi - come nell'attribuire al periodo cretaceo le « argille scagliose » dell'Appennino settentrionale; e troppo fu trascurato ciò che di positivo si doveva all'autore; il quale, se potè errare nel metodo seguito e nel prefiggersi un troppo vasto disegno, fu primo a darci un'attendibile carta geologica di molte e vaste aree della nostra penisola e ad illustrarla con monografie d'insieme, frutto di innumerevoli osservazioni personali e di lunghe, sistematiche analisi.

Valgono riflessioni analoghe per molta parte della multiforme produzione del Sacco; della quale possiamo qui cercare soltanto di cogliere alcuni aspetti da cui meglio resti lumeggiata la figura del maestro e dello studioso.

Da lui, professore per un quarantennio nel Politecnico di Torino, la funzione pratica della geologia non fu soltanto insegnata dalla cattedra, ma divulgata con gli scritti e approfondita con gli studi. A lui dobbiamo una delle prime raccolte organiche di norme geologiche relative ai laghi artificiali; ed alla sistemazione dei torrenti e delle pendici montane; un quadro delle caratteristiche geologico-pratiche di molte regioni italiane; studi numerosi di geo-idrologia, culminanti con la preziosa raccolta critica di notizie su le acque sotterranee della pianura del Po. Completa e lumeggia questo lavoro una lunga collana di scritti su le formazioni quaternarie della Valle Padana e la glaciologia attuale e passata della cerchia alpina.

Tali argomenti diedero ampia materia a un'altra branca della inesauribile attività di Federico Sacco: la divulgazione scientifica. La quale, a differenza dei francesi che ne sono maestri, troppi da noi considerano perduto tempo, o tengono a vile, col risultato di lasciarla ad incompetenti che non giovano a rendere popolare la scienza. Se anche non ebbe lo stile avvincente di uno Stoppani, fu il Sacco divulgatore efficace e apprezzato; e il campo della materia trattata estese fino all'evoluzione biologica e al divenire dei mondi. Perché la versatilità dell'ingegno gli aveva dato anche di potersi sva-gare con problemi astronomici, e di risalire dallo schema generale dell'orogenia della Terra alla interpretazione geologica delle fattezze lunari.

Fin dalla prima giovinezza Federico Sacco si era avviato alla paleontologia sotto la guida di Luigi Bellardi; e da tale disciplina fu attratto così da tenerne per trent'anni l'insegnamento nell'università di Torino. Con la venuta di Carlo Fabrizio Parona, grande maestro egli pure, i legami del Sacco con l'Istituto geologico di Palazzo Carignano si fecero sempre più stretti; e quivi egli si accinse a continuare la grande opera che il Bellardi aveva iniziata: l'illustrazione monografica dei molluschi terziari del Piemonte e della Liguria. Opera fondamentale, da lui condotta a compimento fra il 1889 e il 1904; di gran lunga la maggiore e migliore che noi abbiamo sulle faune terziarie italiane, e la sola nostra che possa tenere il confronto con le

grandi monografie paleontologiche di oltr'alpe e di oltre mare. Per essa il nome di Federico Sacco non ha soltanto un posto d'onore nella storia della geologia italiana, ma è tutt'ora vivo e vivrà nel futuro.

Ho finito; e non so se mi sia riuscito di tratteggiare a modo la personalità complessa del Sacco, come uomo di scuola e di scienza. Ligio fino all'ultimo giorno alla sua fede religiosa e politica, alla famiglia e alla patria, nell'adempimento del dovere che si prefisse e senza decamparne mai, trovò pace al suo spirito anche nei gravi dolori che funestarono gli ultimi decenni della sua lunga esistenza. Fedele al suo ideale di lavoro, riposo non cercò né ebbe, se non alternando l'una con l'altra fatica. Perché buono, fu amato; perché modesto e sapiente, stimato; perché saggio, ascoltato.

Conoscitore *de visu*, come nessun altro, della geologia di ogni regione d'Italia, fu membro autorevole del Consiglio superiore delle Miniere e per tre lustri degnamente presiedette il Comitato geologico del nostro paese. La Società geologica di Londra lo iscrisse fra i suoi membri onorari.

Noi lo ricordiamo in quest'aula dove per un quarto di secolo sovente risuonò la sua voce, anche se fioca negli ultimi tempi in seguito a una dolorosa operazione subita.

Mancò ai vivi il 2 ottobre 1948; lasciando a noi, insieme al rimpianto, l'onore di avere avuto collega ed amico Federico Sacco.

#### BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE.

##### Geologia generale

- Il terrazzamento dei litorali e delle vallate*, « Ann. R. Acc. Agric. Torino », 28, 40 p., 1 t. (1885).
- Sull'origine delle vallate e dei laghi alpini, in rapporto coi sollevamenti delle Alpi e coi terreni pliocenici e quaternari della pianura Padana*. « Atti R. Acc. Sc. Torino », 20, 24 p., carta geol. (1885).
- Fenomeni stratigrafici*, « Atti Acc. Sc. Torino », 20, 10 p. 1t. (1885), e 40, 14 p., 5 t. (1904).
- Les lois fondamentales de l'orogénie de la Terre*, Torino, 26 p., 1 carta (1906).
- Essai schématique de Sélénologie*, Torino, 47 p., 4 t. (1907).
- L'évolution biologique et humaine*, Torino, 430 p. (1910).
- Universo. Saggio di sintesi cosmica*, Torino, 308 p., 4 t. (1916).
- Les oscillations glaciaires*. « Livre jubilé. Soc. géol. Belgique », 1 t. (1924).
- Il fenomeno diluvio-glaciale delle Alpi durante l'era terziaria*, « Boll. Soc. geol. it. », 55, 52 p. carta geol. al 100.000 (1936).
- Origine del Sistema solare. Evoluzione cosmica*, « Atti Acc. Sc. Torino », 79, 35 p., 1 t. (1944).
- Le fratture e le rughe della crosta terrestre*, « Rend. Acc. Lincei » (8) 1, 10 p. t. (1946).
- Urania*, « Rivista di Astronomia, Geologia, Mineralogia, Chimica e Fisica », Annate 9-32, 1919-1943.

##### Geologia regionale e stratigrafica

- Massima elevazione del Pliocene marino al piede delle Alpi*, « Atti Acc. Sc. Torino », 20, 19 p., carta geol. al 25.000 (1885).
- La valle della Stura di Cuneo dal Ponte dell'Olla a Bra e Cherasco*, « Atti Soc. it. Sc. nat. », 29, 76 p. (1886).

- Sulla costituzione geologica degli altipiani isolati di Fossano, Salmour e Banale*, «Ann. Acc. Agric. Torino», 29, 42 p., carta geol. al 25.000 (1886-87).
- Il piano messiniano nel Piemonte*, «Boll. Soc. geol. it.», 5, 50 p. (1886).
- Le Fossanien, nouvel étage du Pliocène d'Italie*, «Bull. Soc. géol. Fr.», (3), 15, 10 p. (1886).
- Studio geologico dei dintorni di Voltaggio*, «Atti Acc. Sc. Torino», 22, 16 p., carta geol. al 25.000 (1887).
- Studio geologico dei dintorni di Guarene d'Alba*, Ibid., 23, 20 p., carta geol. al 25.000. (1888).
- I terreni della Collina di Torino*, «Atti Soc. it. Sc. nat.», 30, carta geol. al 25.000 (1887).
- Classification des terrains tertiaires conforme à leur facies*, «Bull. Soc. belge de Géol. etc.», 1, 19 p., 1 t. (1887).
- Le Ligurien*, «Bull. Soc. géol. Fr.», (3) 17, 17 p., 1 tab.
- Un coin intéressant du Pliocène d'Italie*, «Bull. Soc. belge de Géol. etc.», 3, 28 p., carta geol. al 25.000 (1889).
- Il bacino terziario del Piemonte*, «Atti Soc. it. Sc. nat.», 31-32, 568 p., carta geol. al 100.000 (1889-90).
- Il bacino quaternario del Piemonte*, «Boll. R. Com. geol. It.», 21, 66 p., carta geol. al 500.000 (1890).
- (Le due parti unite, insieme con «La geologia applicata del bacino terziario e quaternario del Piemonte» in un solo volume di 936 p., e 3 carte col titolo: *Il bacino terziario e quaternario del Piemonte*, 1889-90. A parte 19 carte geologiche al 25.000 e al 50.000 delle zone più interessanti).
- La géotectonique de la Haute Italie occidentale*, «Bull. Soc. belge de Géol. etc.», 4, 26 p., carta geol. 1 : 1.500.000 (1890).
- L'Appennino Settentrionale*, Parte I (parte centrale), «Boll. Soc. geol. it.», 10, 227 p., 2 t. (1892); Parte II (L'Appennino dell'Emilia), ibid., 11, 178 p. (1892); Appendice, ibid., 12, 34 p. (1893); Parte III (La Toscana), ibid., 14, 49 p. (1895); Parte IV (L'Appennino della Romagna), ibid., 18, 66 p. (1899). Le varie parti corredate, rispettivamente, da 4 grandi carte geol. al 100.000, colorate a mano e distribuite direttamente dall'A.
- Sur la classification des terrains tertiaires*, «C.R. VI Congr. géol. intern.», Zürich 1894, 12 p., 1 tab.
- La Valle Padana. Schema geologico*, «Ann. Acc. Agric. Torino», 43, 252 p., carta geol. 1 : 800.000 (1900).
- L'Appennino Settentrionale e Centrale. Studio geologico sintetico*, Torino 1904, 168 p., cartina orotettonica, carta geol. al 500.000 in 2 fogli.
- (Unito nel volume lo studio «Geologia applicata dell'Appennino Settentrionale e Centrale»).
- Les formations ophiolitifères du Crétacé*, «Bull. Soc. belge de Géol. etc.», 19, 20 p., 1 t. (1905).
- Les étangs et les faunes du Bassin tertiaire du Piémont*, «Bull. Soc. géol. Fr.», (4) 5, 24 p., 2 carte geol. al 100.000 (1906).
- Gli Abruzzi*, «Boll. Soc. geol. it.», 26, 84 p., cartina tett., carta geol. al 500.000 (1907).
- Il gruppo del Gran Sasso d'Italia*, «Mem. Acc. Sc. Torino» (2) 59, 28 p., carta geol. al 100.000 (1907).
- Il gruppo della Majella*, Ibid., 60, 39 p., carta geol. al 100.000 (1908-1909).
- Il Molise*, «Boll. Soc. geol. it.», 27, 50 p., carta geol. al 100.000 (1908).
- Il gruppo dell'Argentera*, «Mem. Acc. Torino» (2), 61, 60 p., carta geol. al 100.000 (1910-1911).
- L'Appennino Meridionale*, «Boll. Soc. geol. it.», 29, 51 p., carta geol. al 500.000 (1910).
- La Puglia*, Ibid., 30, 110 p., carta geol. al 500.000 (1911).
- La geotettonica dell'Appennino Meridionale*, Ibid., 31, 10 p., cartina geotett. al milionesimo (1912).
- Las Alpes Occidentales*, Torino, 196 p. in-4, carta tett. e carta geol. (1913).
- La pianura di Alessandria*, «Ann. Acc. Agric. Torino», 59, 34 p., carta geol. al 100.000 (1916-17).
- L'evoluzione del fiume Tanaro durante l'era quaternaria*, «Atti Soc. it. Sc. nat.», 76, 22 p., carta geol. al 100.000 (1916).



*L'Istria. Cenni geologici generali*, «Mem. descr. Carta geol. It.», 19, 105 p. (1924); e *Schema geologico dell'Istria*, «L'Universo», 5, con carta geol. al 500.000 (1924).

*Le «facies» del Cretaceo nell'Appennino*, «Atti Acc. Sc. Torino», 66, 18 p. (1930).

*I problemi delle formazioni ofiolitifere delle Alpi e dell'Appennino*, «Boll. Uff. geol. It.», 59, 58 p. (1934).

*Le Alpi* (opera di divulgazione), 697 p., Milano (1934).

*L'Alta Italia durante l'era quaternaria*, «L'Universo», 20, 32 p., 2 carte al milionesimo (1939).

*Carta Geologica d'Italia alla scala 1:100.000*. Fogli: *Asti* (1922), *Alessandria* (1923), *Vercelli* (1924), *Carmagnola* (1924), *Torino* (1925), *Mortara* (1928), *Pavia* (1928), *Voghera* (1929), *Vasto* (1929), *Chieti* (1929), *Piacenza* (1929), *Fiorenzuola d'Arda* (1930), *Cremona* (1930), *Lanciano* (1930), *Novara* (1930), *Milano* (1930), *Treviglio* (1930), *Cuneo* (1931), *Mantova* (1931), *Ascoli e Giulianova* (1931), *Fermo* (1931), *Ancona* (1931), *Parma* (1931), *Legnago* (1932), *Modena* (1932), *Reggio Emilia* (1932), *Bologna* (1932), *Senigallia* (1932), *Imola* (1932), *Faenza* (1933), *Castelnuovo ne' Monti* (1933), *Macerata* (1933), *Pontremoli* (1933), *Vergato* (1934), *Forlì e Rimini* (1934), *Pesaro* (1935), *Ceva* (1936), *Monte Falterona* (1940), *Genova* (1942).

*Note illustrative della Carta geologica d'Italia alla scala 1:100.000*. Fogli: *Voghera e Pavia* (1930), *Piacenza e Fiorenzuola d'Arda* (1930), *Vasto e Lanciano* (1930), *Ascoli Piceno e Giulianova* (1931), *Parma e Castelnuovo ne' Monti* (1932), *Modena e Reggio* (1932), *Pontremoli* (1933), *Bologna e Vergato* (1935), *Torino Vercelli, Asti, Ceva e Voghera* (1935), *Ancona, Jesi, Fermo e Macerata* (1936), *Imola, Faenza, Forlì e Rimini* (1937), *Pesaro e Senigallia* (1937), *M. Falterona e Dicomano* (1940), *Ceva e Genova* (1942).

### Geologia applicata

*Geologia applicata del Bacino terziario e quaternario del Piemonte*, «Boll. Com. geol. It.», 21, 36 p., 1 carta (1890).

*Geologia applicata dell'Appennino Settentrionale e Centrale*, «Ann. Acc. Agric. Torino», 47, 220 p. (1904).

*L'avvenire della Geotermica applicata*, «Natura», 3, 14 p. (1912).

*Geoidrologia dei Pozzi profondi della Valle Padana*, Parte I, «Ann. Acc. Agric. Torino», 54, 387 p., carta geoidrol. al milionesimo (1911); Parte II, «Pubbl. Uff. Idrogr. del Po», 180 p. (1924); Parte III, id., 532 p., 4 t. (1933).

*La sistemazione idrico-forestale dei bacini montani*, «Giorn. Geol. prat.», 14, 58 p., 3 t. (1918).

### Glaciologia

*L'anfiteatro morenico di Rivoli*, «Boll. Com. geol. it.», 18, 42 p., carta glac. al 100.000 (1887).

*L'anfiteatro morenico del Lago Maggiore*, «Ann. Acc. Agric. Torino», 35, 66 p., carta glac. al 100.000 (1892).

*Gli anfiteatri morenici del Lago di Como*, Ibid., 36, 57 p., carta glac. al 100.000 (1893).

*L'apparato morenico del Lago d'Iseo*, Ibid., 37, 34 p., carta glac. al 100.000 (1894).

*L'anfiteatro morenico del Lago di Garda*, Ibid., 38, 54 p., carta glac. al 100.000 (1895-96).

*Gli anfiteatri morenici del Veneto*, Ibid., 41, 64 p., 2 carte glac. al 100.000 (1898).

*L'esogenia quaternaria del gruppo dell'Argentera*, «Giorn. Geol. prat.», 9, 48 p., carta glac. al 100.000 (1911).

*I ghiacciai antichi ed attuali delle Alpi Marittime centrali*, «Atti Soc. it. Sc. nat.», 51, 34 p., carta glac. al 100.000 (1912).

*Il glacialismo antico e moderno nelle valli di Ayas e di Gressoney*, «Boll. Com. geol. it.», 47, 83 p., carta glac. al 100.000 (1920).

*Il glacialismo della valle di Susa*, «L'Universo», 2, 32 p., carta glac. al 100.000 (1921).

*Il glacialismo nelle valli dell'Orco e della Soana*, «Boll. Com. glaciol. it.», 6, 32 p., 2 carte glac. al 100.000 (1925).



- Il glacialismo nel gruppo del Monviso*, Ibid., 7, 36 p., carta glac. al 25.000 (1927).  
*Il glacialismo della Valle d'Aosta*, «Pubbl. Uff. idrogr. del Po», 66 p., 2 carte glac. al 100.000 (1927).  
*Il glacialismo nelle valli di Pinerolo*, «Boll. Uff. geol. It.», 73, 25 p., carta glac. al 100.000 (1928).  
*Il glacialismo nelle valli di Lanzo*, «Pubbl. Uff. idrogr. del Po», 29 p., 5 t., carta glac. al 100.000 (1928).  
*Il glacialismo nelle valli Sesia-Strona-Anza e nell'Ossola*. Ibid., 100 p., 7 t., 2 carte glac. al 100.000 (1930).  
*Il glacialismo nelle Alpi Marittime italiane*, Ibid., 42 p., 2 carte glac. al 100.000 (1932).  
*Il glacialismo nell'Appennino*, «L'Universo», 22, 34 p., carta glac. al milionesimo.

### Paleontologia

- Nuove specie fossili di Molluschi lacustri e terrestri in Piemonte*, «Atti Acc. Sc. Torino», 19, 1 t. (1884).  
*Fauna malacologica delle alluvioni plioceniche del Piemonte*, «Mem. Acc. Sc. Torino», (2) 27, 36 p., 2 t. (1885).  
*Nuove specie terziarie di Molluschi terrestri, d'acqua dolce e salmastra del Piemonte*, «Atti Soc. it. Sc. Nat.», 29, 52 p. 2 t. (1886).  
*Aggiunte alla fauna malacologica estramarina fossile del Piemonte e della Liguria*. «Mem. Acc. Sc. Torino» (2), 39, 36 p., 2 t. (1888).  
*I Brachiopodi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria*, Torino, 40 p. in-4, 6 t. (1902).  
*I Molluschi dei terreni terziari del Piemonte e della Liguria*. Parti VI-XXX. (Parti I-V di L. Bellardi). Torino 1890-1904, 25 volumi in-4 con numerosissime tavole.  
*Origine ed evoluzione della Vita*, Milano, 330 p., 108 fig., 1 t. (1937).

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio G. Levi, nell'assumere la presidenza, desidera fare presente che, secondo l'ordine di anzianità, avrebbe dovuto presiedere il Collega Majorana, il quale, però, gli ha rivolto preghiera di voler sostituirlo.

### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte avvenuta in Torino il 19 gennaio c. a., del Socio Corrispondente Giuseppe Albenga, della Categoria I, Sezione Meccanica, e invia, alla memoria dell'illustre Collega scomparso, un pensiero di reverente omaggio.

Il Socio Levi dà poi la parola al Collega Michele Gortani che rievoca la figura e l'opera del compianto prof. Federico Sacco.

Il Presidente ringrazia il Collega Gortani per la sua elevata e commossa orazione e, dopo aver comunicato che i familiari del prof. Sacco e il Collega Giorgio Dal Piaz, impossibilitati ad intervenire alla seduta, hanno inviato messaggi di fervida adesione, si rende interprete del rinnovato cordoglio della Classe per la scomparsa dell'insigne Scienziato.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Puntoni presenta il volume II della nuova edizione del suo «Trattato d'Igiene», dedicato all'epidemiologia e profilassi, mettendo in evidenza che tale nuova edizione ha richiesto un lungo lavoro per l'aggiornamento dell'opera, non soltanto dal lato scientifico, ma anche da quelli legislativo e statistico.

Il Presidente ringrazia vivamente il Collega Puntoni.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Carobbi, Graffi, Tonzig, G. Bompiani, Cotronei, G. B. Dal Piaz, Puntoni, Amoroso, E. Bompiani, Rossi-Fanelli e Chiarugi.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

AMOROSO L. – L'equazione canonica della funzione logistica. Nota II.

BATTAGLIA E. – Metodo Feulgen in Ematologia: un procedimento semplificato (idrolisi a temperatura ambiente) e rapido (30 minuti) (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

BOSCO G. – Sulla metodologia di studio della parete cellulare dei batteri (pres. dal Socio V. PUNTONI).

GARAVELLI C. L. – Bonattite: un nuovo minerale di alterazione del giacimento elbano di Capo Calamita (pres. dal Socio G. CAROBBI).

MARRÈ E. e SERVETTAZ O. – Sul meccanismo dell'azione attivante della florizina sulla fotosintesi e sulla reazione di Hill (pres. dal Socio S. TONZIG).

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 9 febbraio 1957*

- AKADEMIJA NAUK SSSR. — *Referaty naučno-issledovatel'skikh rabot za 1945 g. Otdelenie biologičeskikh nauk.* Moskva-Leningrad, 1947. Pp. 386, in-8°.
- ALEKSEEV S. P. — *Šum.* Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, Sovet po Naučno-Tehničeskij Propagande, 1948. Pp. 99, in-8°, con figg.
- BORISOVA A. G. — *Flora Zabajkal'ja.* Fasc. VI: *Pokrytosemennye-dvudol'nye (Bobovye).* Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, Botaničeskij Institut im. V. L. Komarova, 1954. Pp. 263, in-8°, con figg.
- CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS. MADRID. — *Colaboradores e investigadores.* Madrid, 1956. Pp. 442, in-8°.
- Doklady na soveščanii po stacionarnym geobotaničeskim issledovanijam.* Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, Botaničeskij Institut imeni V. L. Komarova, 1954. Pp. 295, in-8°, con tavv.
- GARCÍA GODOFREDO. — *Los tres «efectos cruciales» resueltos por la teoría clásica.* Estr. da «Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Lima», a. XIX, vol. XIX, 1956, fasc. 1-2-3-4.
- HYNEK J. A. — Vedi: WHIPPLE F. L. and HYNEK J. A.
- Impianto idroelettrico Piave-Boite - Maè - Vajont.* Estr. da «L'Energia Elettrica», voll. XXXI, XXXII e XXXIII.
- Klucze do oznaczania owadów Polski.* Vol. IX-X, XI, XII; vol. XXVII, nn. 45 b, 53 a; vol. XXVIII, nn. 19, 23, 26, 35-36, 77-78. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1956. Fasc. 10, in-8°, con figg.
- KNEISSL M. — *Beiträge zur indirekten Streckenmessung mit 2 m-Invarbasislatte und Sekundentheodolit.* Stuttgart. K. Wittwer, 1956. Pp. 36, in-8°, con figg.
- MACEPURO M. E. — *Tvorčeskoe Primenenie učenija Akademika V. P. Gorjačkina v naučnyh issledovanijah po mehanizacii sel'skogo hozjajstva.* Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Mehanizacii i Elektrifikacii Sel'skogo Hozjajstva, 1956. Pp. 208, in-8°, con figg.
- MARCUZZI Giorgio. — *Fauna delle Dolomiti.* Venezia, Istituto Veneto, 1956. Pp. 595, in-8° (Memorie, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, vol. XXXI).
- MAXIA Carmelo. — *Bibliografia geologica d'Italia.* Vol. I: *Lazio.* Roma. Consiglio Nazionale delle Ricerche, 1956. Pp. 173, in-8°.
- Naučnaja sessija po voprosam biologii i sel'skogo hozjajstva.* Riga, 22-26 oktjabrja 1951 g. Moskva, Akademija Nauk SSSR, 1953. Pp. 575, in-8°, con figg.
- NIKITIN I. F. — *Brachiopody kembrija i nižnego ordovika severo-vostoka central'nogo Kazahstana.* Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Geologičeskikh Nauk, 1956. Pp. 143, in-8°, con tavv.
- Očerki po istorii geologičeskikh znanij.* Vol. II. Moskva, Akademija Nauk SSSR, Institut Geologičeskikh Nauk, 1953. Pp. 259, in-8°, con tavv.
- PETRIŠČEVA P. A. — Vedi: SKRJABIN K. J., ŠČEGOLEV V. N. i PETRIŠČEVA P. A.
- Proceedings of the International Conference on electron transport in metals and solids.* Estr. da «Journal of Physics», vol. XXXIV, 1956, n. 12 A (Supplementary number).
- PUNTONI Vittorio. — *Trattato d'igiene.* Vol. II: *Epidemiologia e profilassi.* Roma, Tumminelli, 1956. Pp. VII-712, in-8°, con figg.
- RADČENKO M. J. — *Flora dolinskoj i tentekskoj svit Karagandinskogo bassejna.* Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1956. Pp. 42, in-8°, con tavv.

- Rol' snežnogo pokrova v zemledelii*. Moskva, Akademija Nauk SSSR, Institut Geografii, 1953. Pp. 111, in-8°, con figg.
- ŠČEGOLEV V. N. — Vedi: SKRJABIN K. J., ŠČEGOLEV V. N. i PETRIŠČEVA P. A.
- SKRJABIN K. J., ŠČEGOLEV V. N. i PETRIŠČEVA P. A. — *Čtenija pamjati Nikolaja Aleksandroviča Holodkovskogo*. 1953 g. Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, 1954. Pp. 78, in-8°, con figg.
- ŠLYK A. A. — *Metod meženyh atomov v izučanii biosinteza hlorofilla*. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Biologii, 1956. Pp. 299, in-8°, con figg. e tavv.
- ŠMAL'GAUZEN I. I. — *Faktory evoljucii* (Teorija stabilizirujuščego otbora). Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, 1946. Pp. 396, in-8°, con figg.
- Sornye rastenija Tadžikistana*, Vol. I. Moskva-Leningrad, Akademija Nauk Tadžikskoj SSR, 1953. Pp. 450, in-8°, con tavv.
- Spišov rastenij gerbarija flory SSSR izdavaemogo botaničeskim Institutom im. V. L. Komarova Akademii Nauk SSSR*. Vol. XI, fasc. LXV-LXX (nn. 3201-3500). Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, 1949. Pp. 171, in-8°.
- Symposium o niektórych lekach syntetycznych*. Materiały Sesji Problemowej Polskiego Towarzystwa Chemicznego Gdańsk-Sopot, 27-29 wrzesnia 1954. Wrocław-Warszawa, Polska Akademia Nauk, 1956 (Zestyty Problemowe Nauki Polskiej, IX).
- Vo prosy travopol'noj sistemy zemledelija*. T. II. Moskva, Akademija Nauk SSSR, 1953. Pp. 659, in-8°, con figg.
- WHIPPLE F. L. and HYNEK J. A. — *A research program based on the optical tracking of artificial earth satellites*. Estr. da «Proceedings of the I.R.E.», vol. XLIV, 1956, n. 6.
- ZEL'DOVIČ Ja. B. — *Teorija udarnyh voln i vvedenie v gazodinamiku*. Moskva-Leningrad, Akademija Nauk SSSR, Institut Himičeskoj Fiziki, 1946. Pp. 186, in-8°, con figg.

A. SIGNORINI e G. COTRONEL.





# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 9 marzo 1957*  
*Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI*

---

### NOTE DI SOCI

**Statistica matematica.** — *L'equazione canonica della funzione logistica.* Nota II<sup>(\*)</sup> del Socio LUIGI AMOROSO.

Come abbiamo annunciato alla fine della Nota precedente rappresentiamo, in una Tabella, posizione, velocità, accelerazione del punto rappresentato sulla curva canonica.

Così i parametri (2) che caratterizzano la rappresentazione determinano, in ogni istante, la posizione del punto rappresentativo sulla equazione canonica, e questa posizione a sua volta determina la velocità e l'accelerazione del movimento, sulle quali i parametri stessi non hanno più *diretta* influenza. In altri termini tutte le popolazioni, che in un determinato istante sono rappresentate sulla equazione canonica da uno stesso punto, procedono di pari passo nel movimento per tutta la durata del ciclo. Evidentemente siffatto sincronismo non si conserva nella scala empirica, dato che all'unità di misura del tempo della scala naturale può corrispondere e generalmente corrisponde una diversa unità di misura della scala empirica, 30 anni o 40 anni o 20 o altro intervallo qualsiasi. Per questo la scala empirica può dirsi scala propria del tempo (*tempo proprio*), mentre la scala naturale è una scala assoluta (*tempo assoluto*). Lo sviluppo demografico è di anno

(\*) Presentata nella seduta del 9 febbraio 1957.

in anno diverso da caso a caso, anche se il punto rappresentativo occupa la stessa posizione nella scala naturale. Il sincronismo sulla curva canonica ha questo significato: *invecchiano contemporaneamente*.

TABELLA IV.

*Movimento della popolazione sulla curva canonica.*

T	P	1-P	$\frac{dP}{dT}$ velocità	1-2 P	$\frac{d^2P}{dT^2}$ accelerazione	
- 4	0.0180	0.9820	0.0177	+ 0.9640	+ 0.01706	
- 3	0.0474	0.9526	0.0452	+ 0.9052	+ 0.04092	
- 2	0.1192	0.8808	0.1050	+ 0.7616	+ 0.07997	
- 1.40	0.1978	0.8022	0.1587	+ 0.6042	+ 0.09589	
- 1.3169	0.2113	0.7887	0.1667	+ 0.5774	+ 0.09625	accelerazione massima
- 1.30	0.2142	0.7858	0.1683	+ 0.5716	+ 0.09620	
- 1	0.2689	0.7311	0.1966	+ 0.4622	+ 0.09087	
- 0.50	0.3775	0.6225	0.2350	+ 0.2450	+ 0.05757	
0	0.5000	0.5000	0.2500	0	0	flesso della curva, velocità massima
+ 0.50	0.6225	0.3775	0.2350	- 0.2450	- 0.05757	
+ 1	0.7311	0.2689	0.1966	- 0.4622	- 0.09087	
+ 1.30	0.7858	0.2142	0.1683	- 0.5716	- 0.09620	
+ 1.3169	0.7887	0.2113	0.1667	- 0.5774	- 0.09625	accelerazione minima
+ 1.40	0.8022	0.1978	0.1587	- 0.6042	- 0.09589	
+ 2	0.8808	0.1192	0.1050	- 0.7616	- 0.07997	
+ 3	0.9526	0.0474	0.0452	- 0.9052	- 0.04092	
+ 4	0.9820	0.0180	0.0177	- 0.9640	- 0.01706	

5. Così la rappresentazione canonica consente di dare un significato preciso all'antitesi fra *popolo giovane* e *popolo vecchio*. Di due popolazioni che in uno stesso istante sono rappresentate sulla curva canonica da due punti diversi, è più giovane quella che è rappresentata dal punto più arretrato. Assumendo come punto di separazione il flesso della curva, che cade nel punto ( $T = 0$ ,  $P = 1/2$ ) ed ha quindi posizione centrale sia rispetto all'ascissa  $T$  (variabile da  $-\infty$  a  $+\infty$ ), sia rispetto alla ordinata  $P$  (variabile da  $P = 0$  a  $P = 1$ ), poniamo per definizione che in un determinato istante è *giovane* ogni popolazione che in quell'istante precede in flesso, *vecchia* ogni popolazione, che lo segue.

Si possono assumere come elementi accessori di separazione i due punti in cui l'accelerazione è rispettivamente massima o minima ed allora il ciclo demografico viene diviso in quattro fasi:

I fase, che può dirsi *della primavera dei popoli*, in cui è  $P < 1/6 (3 - \sqrt{3})$ , approssimativamente  $P < 0.2113$ , mentre velocità ed accelerazione del movimento sono entrambe funzioni positive crescenti del tempo naturale  $T$ ;

II fase, *dell'estate*, in cui  $P$  è compresa fra  $1/6 (3 - \sqrt{3})$  e  $P + 1/2$ , mentre la velocità del movimento continua ad essere funzione positiva crescente di  $T$ , l'accelerazione ne è funzione decrescente, restando positiva, fino ad annullarsi per  $P = 1/2$ ;

III fase, *dell'autunno*, in cui è  $1/2 < P < 1/6 (3 + \sqrt{3})$ , mentre la velocità e l'accelerazione sono entrambe funzione decrescenti di  $T$ ; positiva la prima, negativa la seconda;

IV fase, *dell'inverno*, in cui è  $P > 1/6 (3 + \sqrt{3})$ , mentre la velocità del movimento continua ad essere funzione positiva decrescente di  $T$ , l'accelerazione ritorna ad essere funzione crescente, pur restando sempre negativa, tendente asintoticamente allo zero.

Il comportamento dell'accelerazione del movimento rappresentativo del ciclo di espansione demografica è così formalmente analogo a quello della durata del giorno considerato in antitesi alla notte, del movimento annuo della Terra lungo la sua orbita: massimo nel *solstizio d'estate*, che segna il passaggio dalla primavera all'estate, minimo nel *solstizio d'inverno*, che segue il passaggio dall'autunno all'inverno.

Il fatto che il valore minimo dell'accelerazione demografica avviene al momento del passaggio dalla terza alla quarta fase, ha determinato un errore di previsione, che fino ad oggi è stato quasi universale. Negli ultimi anni del secolo XIX il ciclo demografico in Francia era già nella fase autunnale e la popolazione (da 38 a 39 milioni di abitanti) cresceva lentamente, sempre più lentamente, tanto che ancora nel periodo compreso fra le due guerre mondiali gli statistici prevedevano che (al netto dell'aumento provocato dall'annessione dell'Alsazia Lorena) il movimento della popolazione era alla vigilia di una inversione, che avrebbe posto termine al periodo di espansione, dando origine ad un periodo di contrazione. Prevedevano insomma che entro un termine non lungo, la popolazione in Francia, sarebbe andata decrescendo. E poiché il movimento osservato in Francia si riproduceva, con ritardo di fase, in altri paesi dell'Europa occidentale, prevedevano che entro pochi decenni il fenomeno sarebbe divenuto — nella zona indicata — universale. Su questa idea è incardinata l'opera *La population future de l'Europe*, pubblicata nel 1944, che è pure una delle opere più pregevoli fra le tante pubblicate, dalla Società delle Nazioni. L'esperienza ha smentito queste previsioni come ne dà prova la Tabella V.

Mancano i dati della Germania, perché le previsioni della Società delle Nazioni si riferiscono all'intero territorio nei confini del 1939 e indicano 72 milioni nel 1950, 72 milioni e 200 mila nel 1955. Nell'«Annuario» delle Nazioni



Unite (ONU) viceversa si riferiscono alla sola Germania occidentale ed indicano 47 milioni 519 mila nel 1950, 49 milioni 995 mila nel 1955 con un aumento per la parte occidentale del territorio di 2 milioni 364 mila contro 200 mila previsto dalla Società delle Nazioni per lo stesso periodo (1950-55) per l'intero territorio.

TABELLA V.

anno	Popolazione <i>prevista</i> nell'opera pubblicata dalla Società delle Nazioni nel 1944 (pp. 262-303)		Popolazione quale risulta dall'« Annuario » demografico delle Nazioni Unite (ONU) anno 1955 (pp. 122-124)		
	migliaia di abitanti		migliaia di abitanti		
	1950	1955	1950	1954	1955
Austria . . . . .	6.700	6.680	6.935	6.969	—
Belgio . . . . .	8.340	8.270	8.639	8.819	—
Francia . . . . .	40.300	39.700	41.212	43.000	43.300
Inghilterra e Galles .	40.900	40.400	43.820	44.274	44.441
Olanda . . . . .	9.550	9.780	10.014	10.615	10.747
Norvegia . . . . .	3.040	3.020	3.265	3.392	—
Svezia . . . . .	6.370	6.310	7.017	7.214	7.260
Svizzera . . . . .	4.150	4.050	4.694	4.923	4.978

Negli ambienti delle Nazioni Unite (ONU) si parla oggi di una ripresa demografica: il termine è corretto, l'errore sta nel farlo apparire come fatto nuovo ed inaspettato, mentre non è che la *espressione di una legge generale del ciclo di espansione demografica*.

6. Forze esterne possono rompere il ciclo. Così avvenne per esempio alla fine del mondo antico nel V secolo dopo Cr. e la rottura rovesciò allora il senso del movimento, che divenne e restò per secoli un movimento di flessione demografica. Nel secolo XVI invece quando cadde in Italia la libertà politica e colla rivoluzione protestante cadde la supremazia spirituale di Roma, mentre Firenze perdeva la posizione di centro finanziario europeo e Venezia quello di centro marittimo, la rottura del ciclo demografico non portò alla flessione, ma all'inizio di un nuovo e diverso ciclo di espansione demografica. Esso si manifestò in tutta la sua *vitalità* nell'ottocento ed oggi continua rigogliosamente nonostante le perdite demografiche provocate prima dalla emigrazione, poi dalle guerre.

TABELLA VI.

*Sviluppo della popolazione italiana dal 1571 al 1991.*

Scala empirica			Scala naturale	
Data	t	N	T	P
1571	— 20 : 6	12.136	— 5.799	0.0033
1631	— 14 : 6	12.512	— 4.971	0.0076
1691	— 8 : 6	13.385	— 4.143	0.0172
1751	— 2 : 6	15.309	— 3.215	0.0386
1761	— 1 : 6	15.799	— 3.077	0.0441
1771	0	16.356	— 2.939	0.0502
1781	+ 1 : 6	16.986	— 2.801	0.0573
1791	+ 2 : 6	17.698	— 2.663	0.0652
1801	+ 3 : 6	18.501	— 2.525	0.0738
1811	+ 4 : 6	19.403	— 2.387	0.0844
1821	+ 5 : 6	20.416	— 2.249	0.0988
1831	1	21.548	— 2.111	0.1080
1841	+ 7 : 6	22.810	— 1.973	0.1220
1851	+ 8 : 6	24.209	— 1.835	0.1376
1861	+ 9 : 6	25.756	— 1.697	0.1549
1871	+ 10 : 6	27.458	— 1.559	0.1737
1881	+ 11 : 6	29.319	— 1.491	0.1944
1891	2	31.343	— 1.283	0.2170
1901	+ 13 : 6	33.533	— 1.145	0.2402
1911	+ 14 : 6	35.885	— 1.007	0.2675
1921	+ 15 : 6	38.392	— 0.869	0.2954
1931	+ 16 : 6	41.044	— 0.731	0.3249
1941	+ 17 : 6	43.828	— 0.593	0.3559
1951	3	46.724	— 0.455	0.3881
1961	+ 19 : 6	49.712	— 0.317	0.4213
1971	+ 20 : 6	52.764	— 0.179	0.4553
1981	+ 21 : 6	55.854	— 0.041	0.4896
1991	+ 22 : 6	58.953	+ 0.097	0.5241

Il vigore demografico tuttora in corso è dimostrato dalla Tabella VI, in cui tempo e popolazione sono espressi nella scala empirica e nella scala naturale. Il valore della Tabella poggia sulla aderenza delle cifre calcolate alle cifre osservate nel periodo 1751-1951. Non senza perplessità ho indicato le cifre *extrapolate* verso il passato (fino al 1571) e verso il futuro (fino al 1991). Verso il passato, per dare un punto di riferimento allo storico, che dagli archivi volesse e sapesse trarre notizie circa la situazione demografica nell'età di Galileo. Verso il futuro, perché resti negli Atti della nostra Accademia un documento, in base al quale il matematico che fra 35 anni si occuperà di demografia, possa vagliare alla prova dei fatti la efficienza del metodo.

Il metodo indica, che oggi, nell'*attuale ciclo demografico*, la popolazione italiana è ancora nella fase della giovinezza e lascia prevedere che solo fra una generazione, nel decennio che va dal 1981 al 1991 supererà al traguardo  $T = 0$ , che corrisponde al flesso della curva logistica e separa la fase della giovinezza da quella della senilità.

Sol di Settembre, tu nel cielo stai  
Come l'uom che i migliori anni finì  
E guarda triste innanzi; i dolci rai  
Tu stendi verso i tenebrosi dì,

cantò un giorno il Carducci. Il Settembre è per due terzi ancora estate, ma già mostra i segni, che preannunciano l'inverno. Ma, se pur giunge all'inverno, la vita dei popoli torna a fiorire prima o poi in una nuova primavera. Il terzo verso della strofe carducciana non trova quindi applicazione nei confronti del popolo italiano, che non guarda triste innanzi e confida che sul ciclo attuale possa innestarsi - come già avvenne alla fine del cinquecento - un nuovo ciclo, che porti alla formazione di una quarta Italia, ancora più splendida della terza, faro di civiltà e di cultura in una libera Federazione Europea.

**Analisi matematica.** — *Riduzione dimensionale del problema dell'integrazione, in grande, dei sistemi di equazioni ai differenziali totali* (\*). Nota (\*\*) del Socio MAURO PICONE.

Siano:  $T$  un campo (insieme aperto di punti) connesso di uno spazio euclideo  $S_{(v+n)}$ , a  $v + n$  dimensioni, del punto  $x_1, x_2, \dots, x_v, u_1, u_2, \dots, u_n$ ,  $C$  il campo proiezione ortogonale di  $T$  sullo spazio  $S_{(v)}$ ,  $e^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, v$ ),  $v$  vettori assegnati a  $n$  componenti  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)}$ , funzioni dei punti  $x(x_1, x_2, \dots, x_v)$  e  $u(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , continue, in  $T$ , con le derivate

$$\frac{\partial e^{(i)}}{\partial x_j}, \frac{\partial e^{(i)}}{\partial u_k} \quad (i, j = 1, 2, \dots, v; k = 1, 2, \dots, n) \quad (1).$$

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) Basterebbe prendere in considerazione le derivate  $\partial e^{(i)} / \partial x_j$ , per  $i \neq j$ , ma, in questa Nota, non mi propongo di fare economia di ipotesi per le derivate.

Dirò che il sistema di equazioni ai differenziali totali, nel vettore  $u$ ,

$$(I) \quad du = \sum_{i=1}^v e^{(i)}(x, u) dx_i,$$

è integrabile in  $C$ , se vi possiede un integrale  $u$  (monodromo) di classe uno, tale che il punto  $(x, u)$  appartenga sempre a  $T^{(2)}$ .

Dirò conseguenze differenziali del sistema (I) le  $\binom{v}{2}$  equazioni

$$\frac{\partial e^{(i)}}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n e_k^{(j)} \frac{\partial e^{(i)}}{\partial u_k} = \frac{\partial e^{(j)}}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n e_k^{(i)} \frac{\partial e^{(j)}}{\partial u_k} \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, v)$$

che devono essere verificate in  $C$  da un vettore soluzione del sistema, supposto integrabile in  $C$ , esprimenti, quando si tenga conto del verificarsi della (I), l'eguaglianza delle due derivate

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Supposte, per esempio, le funzioni  $e^{(i)}$ , lineari nelle componenti  $u_1, u_2, \dots, u_n$  del vettore  $u$ , e identicamente verificate le conseguenze differenziali del sistema (I), si può, senz'altro, com'è ben noto, asserire l'integrabilità, in  $C$ , del sistema, soltanto quando il campo  $C$  soddisfi a talune condizioni, sia, per esempio, stellato rispetto ad un suo punto  $x^{(0)}$ , cioè sia tale che appartenga sempre per intero al campo il segmento rettilineo congiungente il punto  $x^{(0)}$  con un qualunque altro punto del campo. Anzi, in tal caso, si può prescrivere all'integrale di coincidere, in un punto, comunque fissato del campo, con un vettore arbitrariamente assegnato, in seguito a che l'integrale riesce determinato.

In generale, l'integrabilità in  $C$ , del sistema lineare, anche supponendovi identicamente verificate le sue conseguenze differenziali, dipenderà dalle condizioni della connessione del campo  $C$  e dal verificarsi di talune equazioni integrali il cui soddisfacimento può anche limitare la scelta o renderla persino impossibile del vettore iniziale che si vuol prescrivere all'integrale in un fissato punto di  $C$ , la determinazione delle quali costituisce un problema alla cui risoluzione si oppongono, sovente, gravi difficoltà che crescono ben rapidamente al crescere del numero delle dimensioni dello spazio a cui appartiene il campo.

È, dunque, senza alcun dubbio, utile il possesso di un teorema che dia condizioni sufficienti per l'integrabilità in un dato campo del sistema (I) — vi siano o no identicamente verificate le conseguenze differenziali del sistema — in virtù di quelle di sistemi in campi appartenenti a spazi ad un numero minore di dimensioni.

(2) Si dice di classe  $m$  in un campo una funzione quando vi è continua con tutte le sue derivate parziali, fino a quelle, incluse, d'ordine  $m$ .



Scopo di questa Nota è di indicare un tale teorema, che potrà dirsi *di riduzione dimensionale del problema dell'integrazione, in grande, dei sistemi di equazioni ai differenziali totali*.

I. UN CASO PARTICOLARE. - Il teorema sarà più facilmente inteso se si premette la considerazione del caso particolarissimo dell'integrazione, in un campo connesso  $C$  dello spazio  $(x, y, z)$  a tre dimensioni, dell'equazione nel vettore  $u$ :

$$(1) \quad du = e(x, y, z) dx + f(x, y, z) dy + g(x, y, z) dz.$$

Supposti, i vettori  $e, f, g$  funzioni di classe uno in  $C$ , le conseguenze differenziali dell'equazione (1) consistono nelle identità

$$(2) \quad e_y = f_x,$$

$$(3) \quad g_x = e_z, \quad g_y = f_z.$$

Indicherò, in un primo esempio, con  $A$ , il campo, esso pure connesso, del piano  $(x, y)$ , proiezione ortogonale del campo  $C$  sul detto piano e supporrò che la sezione del campo  $C$  con ogni retta, normale al piano  $(x, y)$ , di piede in un qualsivoglia punto  $(x, y)$  di  $A$ , sia sempre un intervallo  $B(x, y)$ , dell'asse  $z$ , ed inoltre che la superficie di equazione

$$z = \varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$  designando una funzione reale, di classe uno, definita in  $A$ , sia contenuta in  $C$ . Sussiste allora il teorema:

I. *Condizione necessaria affinché il sistema (1) sia integrabile in  $C$ , è che il sistema*

$$(4) \quad du^{(0)} = \left[ e(x, y, \varphi) + g(x, y, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx + \left[ f(x, y, \varphi) + g(x, y, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dy,$$

*lo sia in  $A$ . Soddisfatta questa condizione, è sufficiente che vi siano verificate identicamente le equazioni (3).*

Basta dimostrare l'asserita sufficienza. Detto  $u^{(0)}(x, y)$  un integrale di (4), si ponga, per ogni punto  $(x, y, z)$  di  $C$ ,

$$u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) + \int_{\varphi(x, y)}^z g(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Si ha  $\partial u / \partial z = g$ , e, in virtù delle (4) e (3),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e(x, y, \varphi) + g(x, y, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\varphi(x, y)}^z g(x, y, \zeta) d\zeta =$$

$$e(x, y, \varphi) + \int_{\varphi(x, y)}^z e_z(x, y, \zeta) d\zeta = e(x, y, z), \dots$$

C.V.D.

Vale la pena di osservare anche quanto segue. Supposta la funzione  $\varphi(x, y)$  dotata della derivata  $\partial^2 \varphi / \partial x \partial y$ , continua in  $A$ , e supposte verificate le identità (3), le conseguenze differenziali, del sistema (4), si scrivono:

$$(5) \quad e_y(x, y, \varphi) = f_x(x, y, \varphi)$$

e se  $A$  è  $\lambda + 1$  volte connesso, con le lacune  $L_1, L_2, \dots, L_\lambda$ , condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (4) sia integrabile in  $A$ , è che <sup>(3)</sup> sia ivi identicamente verificata la (5) e che per  $\lambda$  curve regolari semplici e chiuse,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\lambda$ , tracciate in  $A$ , arbitrariamente fissate, avendo la curva  $\Gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \lambda$ ), nel proprio interno, la lacuna  $L_k$  e soltanto questa, si abbia

$$(6) \quad \int_{\Gamma_k} [e(x, y, \varphi) dx + f(x, y, \varphi) dz] + \int_{\Gamma_k} g(x, y, \varphi) d\varphi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \lambda).$$

Adunque, in virtù del teorema dimostrato, supposto il campo  $A$  semplicemente connesso, il verificarsi delle (3) e (5) ha di conseguenza il verificarsi della (2), supposto  $\lambda + 1$  volte connesso ciò avviene se, inoltre, sono verificate le (6). Se, però, le  $e, f, g$  sono dotate delle derivate  $e_{yz}, f_{zx}, g_{xy}$ , continue in  $A$ , l'identità (2) è anche conseguenza differenziale delle (3) e (5), poiché dalle (3) segue

$$\frac{\partial}{\partial z} (e_y - f_x) = e_{yz} - f_{xz} = g_{xy} - g_{xy} \equiv 0,$$

e quindi che  $e_y - f_x$  è funzione soltanto di  $x$  e di  $y$ , identicamente nulla, in virtù della (5).

Supposto, per un secondo esempio, che la sezione del campo  $C$  con ogni piano normale all'asse  $x$ , in un qualsivoglia punto dell'intervallo  $A$ , proiezione ortogonale di  $C$  sull'asse  $x$ , sia sempre un campo connesso  $B(x)$  del piano  $(y, z)$  ed inoltre che la curva di equazioni

$$y = \varphi(x) \quad , \quad z = \psi(x),$$

$\varphi(x)$  e  $\psi(x)$  designando funzioni di classe uno definite in  $A$ , sia contenuta in  $C$ , sussiste il teorema:

II. *Condizione necessaria affinché il sistema (1) sia integrabile in  $C$  è che, per ogni  $x$  in  $A$ , il sistema*

$$(7) \quad du = f(x, y, z) dy + g(x, y, z) dz,$$

*lo sia in  $B(x)$ . Soddisfatta questa condizione, è sufficiente che in  $C$  abbiano luogo le identità  $f_x = e_y, g_x = e_z$ .*

Detta, infatti,  $u^{(0)}(x)$  una primitiva, nell'intervallo  $A$ , della funzione

$$e(x, \varphi, \psi) + f(x, \varphi, \psi) \varphi' + g(x, \varphi, \psi) \psi',$$

(3) Cfr., per esempio, PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi matematica*, vol. II, teor. XIV del n. 46 (editore Tumminelli, Roma 1956).

l'integrale del sistema (7), in  $B(x)$ , verificante la condizione

$$(8) \quad u[x, \varphi(x), \psi(x)] = u^{(0)}(x),$$

è un integrale del sistema (1). Infatti, in virtù della (7), posto  $\delta \equiv u_x - e$ , si trova  $\delta_y \equiv f_x - e_y \equiv 0$ ,  $\delta_z \equiv g_x - e_z \equiv 0$ , e, derivando la (8),  $\delta(x, \varphi, \psi) \equiv 0$ , donde  $\delta \equiv 0$ .

2. IL CASO GENERALE. - Indichino  $p$  e  $q$  due numeri naturali di somma  $v$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q$  le coordinate (reali) di punti di  $S_{(p+q)}$ ;  $x$  e  $y$ , rispettivamente, i punti di coordinate  $x_1, x_2, \dots, x_p$  e  $y_1, y_2, \dots, y_q$ ;  $f^{(i)}(x, y, u)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) e  $g^{(h)}(x, y, u)$  ( $h = 1, 2, \dots, q$ ) assegnati vettori a  $n$  componenti reali, funzioni del punto  $(x, y, u)$ , di classe uno, definite nel campo connesso  $T$  dello spazio  $S_{(p+q+n)}$ , avente il campo  $C$  per proiezione ortogonale sullo spazio  $S_{(p+q)}$  e si debba integrare, in  $C$ , il seguente sistema di  $n$  equazioni ai differenziali totali, nelle  $n$  funzioni incognite reali  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,

$$(1) \quad du = \sum_{i=1}^p f^{(i)}(x, y, u) dx_i + \sum_{h=1}^q g^{(h)}(x, y, u) dy_h.$$

Le conseguenze differenziali, di tale sistema, consistono nei seguenti tre gruppi, rispettivamente, di  $\binom{p}{2}$ ,  $\binom{q}{2}$ ,  $pq$  equazioni,

$$(2) \quad \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n f_l^{(j)} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial u_l} = \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^n f_l^{(i)} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial u_l} \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, p),$$

$$(3) \quad \frac{\partial g^{(h)}}{\partial y_k} + \sum_{l=1}^n g_l^{(k)} \frac{\partial g^{(h)}}{\partial u_l} = \frac{\partial g^{(k)}}{\partial y_h} + \sum_{l=1}^n g_l^{(h)} \frac{\partial g^{(k)}}{\partial u_l} \quad (h \neq k; h, k = 1, 2, \dots, q),$$

$$(4) \quad \frac{\partial f^{(i)}}{\partial y_h} + \sum_{l=1}^n g_l^{(h)} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial u_l} = \frac{\partial g^{(h)}}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^n f_l^{(i)} \frac{\partial g^{(h)}}{\partial u_l} \quad (i = 1, \dots, p; h = 1, \dots, q).$$

Supporremo che, comunque si assuma il punto  $x$  nel campo connesso  $A$  dello spazio  $S_{(p)}$ , proiezione ortogonale del campo  $C$  sullo spazio  $S_{(p)}$ , il campo  $B(x)$ , sezione di  $C$  con lo spazio  $S_{(q)}$ , normale a  $S_{(p)}$  nel punto  $x$ , risulti sempre connesso e la varietà  $V$ , a  $p$  dimensioni, di equazione

$$y = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$  designando un vettore a  $q$  componenti reali, funzioni di classe uno, definite in  $A$ , sia contenuta in  $C$ . Sussiste allora il teorema:

III. Condizioni necessarie affinché il sistema (1) sia integrabile nel campo  $C$ , sono:

a) che il sistema

$$(5) \quad du^{(0)} = \sum_{i=1}^p \left[ f^{(i)}(x, \varphi, u^{(0)}) + \sum_{h=1}^q \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_i} g^{(h)}(x, \varphi, u^{(0)}) \right] dx_i,$$

sia integrabile in  $A$ ;

b) che per un certo integrale  $u^{(0)}(x)$  del sistema (5), esista, in  $B(x)$ , per ogni  $x$  in  $A$ , un integrale del sistema

$$(6) \quad du = \sum_{h=1}^q g^{(h)}(x, y, u) dy_h,$$

verificante la condizione iniziale

$$(7) \quad u[x, \varphi(x)] = u^{(0)}(x).$$

Soddisfatte queste condizioni, è sufficiente

c) che la soluzione delle (6) e (7) verifichi le  $pq$  equazioni (4), in particolare, è sufficiente che queste equazioni siano delle identità nel campo  $T$ .

Ogni soluzione delle (5) e (7) è allora un integrale del sistema (1).

Basta dimostrare la sufficienza della condizione c). L'integrale  $u(x, y)$  del sistema (6), verificante la condizione iniziale (7), riesce, com'è noto, di classe uno in  $C$  e ivi dotato delle derivate parziali  $\partial^2 u / \partial x_i \partial y_h$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $h = 1, 2, \dots, q$ ) continue. Avremo dimostrato che questa funzione  $u(x, y)$  è soluzione, in  $C$ , del sistema (1), se verificheremo che vi riesce, identicamente,

$$(8) \quad \delta^{(i)}(x, y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i} - f^{(i)}(x, y, u) = 0.$$

Ora, tenendo conto della (6) e del verificarsi delle (4), si trova

$$(9) \quad \frac{\partial \delta^{(i)}}{\partial y_h} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial g^{(h)}}{\partial u_l} \delta_l^{(i)} \quad (i = 1, \dots, p; h = 1, \dots, q),$$

e derivando la (7), rispetto a  $x_i$ , in forza delle (6) e (5),

$$(10) \quad \delta^{(i)}[x, \varphi(x)] \equiv 0.$$

Data la connessione di  $B(x)$ , le (9) e (10) assicurano che, per ogni  $i$  e per ogni  $x$  in  $A$ , si ha sempre  $\delta^{(i)}(x, y) = 0$ , in  $B(x)$ . C.V.D.

Facciamo ora, sino alla fine, l'ipotesi che le conseguenze differenziali (2), (3), (4) siano identicamente verificate in  $T$  e che il vettore  $\varphi(x)$  sia dotato anche delle derivate parziali  $\partial^2 \varphi / \partial x_i \partial x_j$  ( $i \neq j$ ), continue in  $A$ , allora le conseguenze differenziali del sistema (5) sono, esse pure, identicamente verificate, per  $x$  in  $A$  e per  $u^{(0)}$  tale che il punto  $[x, \varphi(x), u^{(0)}]$  sia in  $T$ , comunque sia stata scelta la  $\varphi(x)$ .

Supponiamo che il sistema (6) sia, per ogni  $x$ , lineare in  $u$ , sussiste allora il teorema:

IV. Se il campo  $B(x)$ , per ogni  $x$  in  $A$ , è sempre stellato, la a) del teorema III è condizione sufficiente per l'integrabilità del sistema (1) in  $C$ , e ad un suo integrale si può prescrivere, in un punto  $[x^{(0)}, \varphi(x^{(0)})]$ , ogni vettore iniziale che possa essere assegnato, nel punto  $x^{(0)}$ , ad un integrale in  $A$  del sistema (5).

Supponiamo che il vettore  $\varphi(x)$  sia tale che il sistema (5) risulti lineare in  $u^{(0)}$ , si ha allora il teorema:



V. Se il campo  $A$  è stellato, condizione sufficiente per l'integralità del sistema (I), in  $C$ , è la  $b$ ) del Teorema III.

Per esempio, indichino  $x$  e  $y$  due variabili reali e  $\lambda_0(x)$  e  $\lambda_1(x)$  due funzioni continue della  $x$ , definite sull'intero asse reale e tali che l'equazione differenziale

$$(11) \quad \frac{du^{(0)}}{dx} = \lambda_0(x) + \lambda_1(x)u^{(0)}$$

possieda, sul detto asse, un integrale  $u^{(0)}(x)$  il cui modulo non superi la quantità  $\mu$ ; sia  $b$  una quantità positiva e nella striscia aperta  $C$  del piano  $(x, y)$ , luogo dei punti per cui è  $|y| < b$ , si definiscano, arbitrariamente, tre funzioni  $g_0, g_1, g_2$  di classe uno, verificanti le limitazioni

$$3(1 + \mu)^2 b |g_h(x, y)| < 1 \quad (h = 0, 1, 2);$$

siano, infine,  $f_0, f_1, f_2$  tre funzioni, continue in  $C$ , che soddisfino le equazioni:

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{\partial g_0}{\partial x} + g_1 f_0 - g_0 f_1, \quad f_0(x, 0) = \lambda_0(x),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial x} + 2g_2 f_0 - 2g_0 f_2, \quad f_1(x, 0) = \lambda_1(x),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x} + g_2 f_1 - g_1 f_2, \quad f_2(x, 0) = 0.$$

Ebbene, in base al teorema V, l'equazione ai differenziali totali, nella funzione incognita  $u$ :

$$(12) \quad du = (f_0 + f_1 u + f_2 u^2) dx + (g_0 + g_1 u + g_2 u^2) dy,$$

nonostante la sua *non linearità* è integrabile nella striscia *illimitata*  $C$ , ed un suo integrale è dato dalla soluzione delle equazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g_0(x, y) + g_1(x, y)u + g_2(x, y)u^2, \quad u(x, 0) = u^{(0)}(x).$$

Se, in particolare, le funzioni  $\lambda_0(x)$  e  $\lambda_1(x)$ , sono sommabili sull'asse reale esistono due costanti non negative  $\alpha$  e  $\beta$ , per le quali, per ogni integrale  $u^{(0)}(x)$  dell'equazione (11) si può assumere, comunque si fissi un punto  $x_0$ ,  $\mu = \alpha + \beta |u^{(0)}(x_0)|$ ; pertanto, ad un integrale, nella striscia  $C$ , dell'equazione (12) si può allora prescrivere, in un punto  $(x_0, 0)$ , ogni valore  $u_0$ , per cui risulti

$$3(1 + \alpha + \beta |u_0|)^2 b |g_h(x, y)| < 1 \quad (h = 0, 1, 2).$$

Supponiamo, infine, che il sistema (I) sia esso stesso lineare, si ha allora che:

VI. Se il campo  $A$  è stellato e sempre tale il campo  $B(x)$  rispetto al punto  $[x, \varphi(x)]$ , dal che non segue che  $C$  debba, necessariamente, esser stellato, il sistema (I) riesce integrabile in  $C$  e ad un suo integrale si può arbitrariamente prescrivere il vettore iniziale, in un qualsivoglia punto  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  di  $C$ .

Ciò segue dal fatto che si può sempre definire una funzione  $\psi(x)$  che soddisfi alle ipotesi poste per la  $\varphi(x)$ , da sostituire a questa e per la quale si abbia  $y^{(0)} = \psi(x^{(0)})$ . Siano, invero,  $\rho$  e  $\sigma$  due numeri positivi tali che appartengano ad A tutti i punti  $x$  del dominio circolare  $D(x^{(0)}, \rho)$ , di centro nel punto  $x^{(0)}$  e raggio  $\rho$  e a C tutti i punti  $(x, y)$  per cui  $x$  è in  $D(x^{(0)}, \rho)$  e  $|y - \varphi(x)| < \sigma$ ,  $\varepsilon$  un numero positivo ( $< \rho$ ) tale che, per  $|x - x^{(0)}| \leq \varepsilon$ , tutti i segmenti rettilinei dello spazio  $S_{(p+q)}$  di grandezza  $|y^{(0)} - \varphi(x^{(0)})|$  e di origine nel punto  $[x, \varphi(x)]$ , orientati come il segmento rettilineo avente origine nel punto  $[x^{(0)}, \varphi(x^{(0)})]$  e termine nel punto  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  appartengano a C. Detto  $\mu$  un numero naturale non inferiore a 3, si ponga

$$\psi(x) \begin{cases} = \varphi(x) + [y^{(0)} - \varphi(x^{(0)})] \left[ 1 - \frac{|x - x^{(0)}|^2}{\rho^2} \right]^\mu, & \text{per } |x - x^{(0)}| \leq \rho, \\ = \varphi(x), & \text{per } |x - x^{(0)}| > \rho. \end{cases}$$

Questa funzione  $\psi(x)$ , continua in A, vi è dotata delle derivate  $\partial\psi/\partial x_i$ ,  $\partial^2\psi/\partial x_i \partial x_j$  ( $i \neq j$ ) continue, la varietà di equazione  $y = \psi(x)$  passa per il punto  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  ed è certo contenuta in C, non appena si sia scelto  $\mu (\geq 3)$  tanto grande da risultare

$$|y^{(0)} - \varphi(x^{(0)})| \left[ 1 - \frac{|x - x^{(0)}|^2}{\rho^2} \right]^\mu < \sigma, \quad \text{per } |x - x^{(0)}| > \varepsilon.$$

**Matematica.** — *Dilatazioni di varietà differenziabili.* Nota (\*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

INTRODUZIONE. — Uno dei capitoli fondamentali della geometria algebrica è quello che si occupa dello studio delle trasformazioni birazionali fra varietà algebriche. In siffatte trasformazioni compaiono generalmente e c c e z i o n i alla biunivocità della corrispondenza: la considerazione di queste ultime — essenziale per una visione approfondita della geometria sulle varietà algebriche — ha notevoli riflessi anche dai punti di vista della teoria delle funzioni e della topologia, ed è stata recentemente estesa alle varietà a struttura complessa (su tutto ciò ved. Segre [9] ed i lavori ivi richiamati, con l'aggiunta di Hopf [4] e Stoll [10] ai lavori citati nel § 3).

Nella presente Nota mostro come varie delle nozioni e delle proprietà di quelle trasformazioni birazionali non dappertutto regolari che (in [5, 6]) ho denominate *dilatazioni* possano venire trasportate alle *varietà differenziabili*. La materia qui esposta ha già formato oggetto di una conferenza da me tenuta presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica in data 18 gennaio 1957, dopo la quale ho appreso l'esistenza di recentissimi lavori di Guggenheimer [1, 2] su argomento affine. Non v'è

(\*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1957.

però sovrapposizione fra i due punti di vista, in quanto le trasformazioni introdotte dal Guggenheimer - sotto il nome di *modificazioni* - risultano *a priori* più generali delle nostre dilatazioni, e vengono da lui investigate limitatamente al caso in cui la varietà che si dilata abbia dimensione 0, 1 o 2, e senza soffermarsi sulle relative questioni esistenziali. Tali questioni vengono invece qui esaminate per le dilatazioni, esaurendone lo studio relativamente a quelle dilatazioni che denomino d'indice 1 (n. 1); ciò mette in luce il carattere essenziale di queste ultime per la topologia delle varietà differenziabili, fornendo in pari tempo i mezzi più semplici per estendere al campo differenziale nozioni e proprietà - ben note nel campo algebrico - sulle successioni covarianti di immersione (n. 3), sulle intersezioni irregolari (n. 4), e sulle successioni canoniche (n. 5).

Molti sono i problemi interessanti tuttora aperti, suggeriti dal presente lavoro, fra i quali vanno particolarmente segnalati i seguenti quattro.

Dovrebbe anzitutto venir perseguito lo studio delle intersezioni irregolari fra cicli differenziabili sopra una varietà differenziabile e delle questioni ad esse connesse, al di là di ciò che qui vien detto nel n. 4, seguendo la linea tracciata pel caso algebrico in Segre [7], Cap. III e IV. Dovrebbero inoltre venire stabiliti i legami fra le varietà covarianti d'immersione e le varietà canoniche suddette, da un lato, e le classi caratteristiche di Stiefel-Whitney, dall'altro, analogamente a quanto è stato fatto nel caso algebrico dal Vesentini [11, 12] in relazione alle classi caratteristiche di Chern.

Sarebbe poi opportuno decidere se o meno esistano modificazioni che non siano dilatazioni: a norma di un risultato di Hirsch [3], la risposta a questa domanda è negativa per ciò che concerne il caso più semplice delle modificazioni in un punto; l'estensione di tale risultato a tutte le modificazioni offrirebbe grande interesse e condurrebbe ad ulteriori approfondimenti delle ricerche menzionate di Guggenheimer. Si dovrebbero infine meglio indagare le questioni esistenziali relative alle dilatazioni d'indice superiore (n. 6), sul quale problema conto di ritornare prossimamente in questi « Rendiconti ».

1. DILATAZIONI DI INDICE 1. - Salvo esplicito avviso in contrario, tutte le varietà considerate in questo lavoro verranno supposte differenziabili (reali) di classe  $C^r$  e compatte; ma taluno dei risultati qui ottenuti potrebbe venir esteso senza difficoltà al caso di varietà non compatte o dotate di singolarità. Dimostriamo anzitutto il seguente teorema.

*Date comunque due varietà  $U, V$ , rispettivamente di dimensioni  $c, d$  ( $0 \leq c < d$ ), tali che  $U \subset V$ , ad esse resta coordinata univocamente (a meno di un omeomorfismo differenziabile) una coppia di varietà  $U', V'$ , di dimensioni rispettive  $d-1, d$ , tali che  $U'$  risulti una varietà fibrata di base  $U$  e fibra uno spazio proiettivo  $S_r$  di dimensione*

$$(1) \quad r = d - c - 1,$$

*con la condizione ulteriore che sia  $U' \subset V'$  e che le  $U, V$  possano venir dedotte ordinatamente dalla  $U', V'$  identificando fra loro i punti di ciascuna fibra  $S_r$  di  $U'$ .*

Per definire  $V'$  (e quindi pure  $U'$ ), basterà mostrare come, da un ricoprimento di  $V$  mediante  $d$ -celle (aperte)  $E_d$  in ciascuna delle quali sia noto (almeno) un sistema di coordinate permissibili, possa ricavarsi un ricoprimento analogo relativo a  $V'$ . Distinguiamo due casi, secondochè  $E_d$  non contiene o contiene (all'interno) punti di  $U$ . Mentre nel primo caso considereremo ancora  $E_d$  quale cella del ricoprimento cercato di  $V'$ , conservando le relative coordinate, nel secondo caso conveniamo di procedere come segue.

Possiamo intanto ovviamente sostituire  $E_d$ , nel ricoprimento di  $V$ , con un numero finito di  $d$ -celle, per modo che in una qualunque di queste — che non sia del primo tipo e che, per semplicità, continuiamo a chiamare  $E_d$  — si possano scegliere coordinate permissibili  $(x_1, x_2, \dots, x_d)$  soddisfacenti alla

$$(2) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 < 1,$$

con la condizione che la porzione di  $U$  interna ad  $E_d$  sia una  $c$ -cella  $E_c$  rappresentata in  $E_d$  dalle equazioni.

$$(3) \quad x_{c+1} = x_{c+2} = \dots = x_d = 0;$$

e non si vien meno alla condizione di ricoprimento se si sostituisce la (2) con la limitazione più forte

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 < 1 - \varepsilon,$$

ove  $\varepsilon$  denoti una costante positiva sufficientemente piccola. Le (3), in un  $S_d$  in cui  $x_0 = 1$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_d$  siano coordinate proiettive omogenee, definiscono un  $S_c$  ad esso subordinato; la dilatazione di  $S_d$  di base  $S_c$  fornisce una varietà algebrica (ved. Segre [5], § 1), definita a meno di una trasformazione birazionale ovunque regolare, a modello della quale può per esempio prendersi quella, di uno spazio proiettivo [di dimensione  $d(d+3)/2 - c(c+3)/2 - 1$ ] in cui le  $X_{ij}$  siano coordinate proiettive omogenee, data dalle equazioni parametriche

$$(5) \quad X_{ij} = x_i x_j \quad (i = 0, 1, \dots, d; \quad j = c+1, \dots, d; \quad i \leq j).$$

La falda reale di quest'ultima è una varietà differenziabile, e la porzione su essa delimitata dalla (4) può venir ricoperta da un numero finito di  $d$ -celle appartenenti ciascuna alla porzione delimitata dalla (2), in guisa che su ciascuna di esse i rapporti di  $d$  opportune delle  $X$  ad una (non nulla) delle rimanenti possano venir scelti quali coordinate permissibili. Otteniamo così le celle e le coordinate permissibili relative a  $V'$ , da sostituire ad  $E_d$  ed alle  $x$  quando si passi da  $V$  a  $V'$ .

La coerenza dei sistemi di coordinate introdotti nelle varie  $d$ -celle di  $V'$ , e le altre proprietà relative ad  $U'$  e  $V'$  enunciate nel teorema, seguono ora subito dalle proprietà note delle dilatazioni nel campo algebrico. In particolare, l'univocità di  $U'$  e  $V'$  (a meno di un omeomorfismo differenziabile di classe  $C^1$ ) segue da ciò che  $V'$  può pensarsi dedotta — nel modo dianzi specificato — dalla varietà tagliata  $V - U$ , col chiuderla mediante la varietà



$U'$  avente come «punti» (astratti) le faccette (o elementi differenziali)  $(c+1)$ -dimensionali che - nei singoli punti  $P$  di  $U$  - risultano simultaneamente tangenti ad  $U$  ed a  $V$  (ossia passano per l' $S_c$  tangente in  $P$  ad  $U$  e giacciono nell' $S_d$  tangente in  $P$  a  $V$ ): in corrispondenza a ciascun punto  $P$ , tali faccette costituiscono una *stella* - avente per dimensione il numero  $r$  dato dalla (1) - assimilabile in senso astratto ad uno spazio proiettivo  $S'_r$  [e data appunto da uno spazio siffatto sul modello locale (2), (5)], il cui luogo - al variare di  $P$  su  $U$  - costituisce precisamente la varietà fibrata  $U'$ .

Alle stesse varietà  $U'$  e  $V'$  si può anche giungere, in forma più intuitiva, nel modo seguente. Si munisca la  $V$  - com'è certamente possibile - di una *metrica riemanniana* compatibile con la sua struttura differenziale, e si asporti quindi da essa la varietà tubolare chiusa  $d$ -dimensionale,  $W$ , di mediana  $U$  e raggio  $\rho$  abbastanza piccolo; si ottiene in tal guisa una varietà aperta  $V^* = V - W$ , omeomorfa alla  $V - U$ . Il contorno di  $V - W$  coincide col contorno  $U^*$  della  $W$ , e consta quindi di  $\infty^c$   $r$ -sfere geodetiche  $\Sigma^*_p$  di raggio  $\rho$ , provenienti dai singoli punti  $P$  di  $U$ , ciascuna situata sulla varietà riempita dalle geodetiche uscenti dal  $P$  relativo e normali in  $P$  ad  $U$ . Le varietà  $V'$ ,  $U'$ ,  $S'_r$  precedentemente definite non differiscono da ciò a cui rispettivamente riduconsi le  $V^*$ ,  $U^*$ ,  $\Sigma^*_p$  quando si identifichino i due punti delle varie coppie antipodali su ciascuna delle  $r$ -sfere  $\Sigma^*_p$ ; e resta così provato, in base a ciò che precede, che la costruzione di  $U'$ ,  $V'$  e delle relative coordinate permissibili, che in tal guisa si ottiene, non viene a dipendere, di fatto, nè dalla scelta di  $\rho$  nè dalla metrica attribuita a  $V$ .

Il caso in cui si assuma  $c = d - 1$  è banale, in quanto per esso le  $U'$ ,  $V'$  risultano manifestamente omeomorfe alle  $U$ ,  $V$ . Quando invece si supponga

$$(6) \quad 0 \leq c \leq d - 2,$$

la  $U'$  viene a possedere dimensione  $d - 1$  maggiore della dimensione  $c$  di  $U$ ; pertanto diremo allora che si passa da  $V$  a  $V'$  applicando a  $V$  la *dilatazione*  $T$  di base  $U$ , e da  $V'$  a  $V$  mediante la *contrazione*  $\Theta = T^{-1}$  che riduce a punti le singole fibre  $S'_r$  di  $U'$  [ciascuna delle quali, in base alle (1), (6), ha dimensione  $r > 0$ ]. Quando occorra, le dilatazioni testè definite verranno dette di *indice*  $I$ , per distinguerle da altre - di indice superiore - introdotte più tardi (n. 6).

2. ORIENTAZIONI; DILATAZIONI MOD 2. - Dal n. 1 discende che l'intorno su  $U'$  di un  $S'_r$  generatore di  $U'$  ha la struttura di un prodotto  $E_c \times S'_r$ ; sicchè dall'orientabilità di  $U$  segue l'orientabilità di  $U'$  se  $r$  è dispari, ossia [in virtù della (1)] se

$$c \equiv d \pmod{2},$$

ed in tal caso soltanto.

Si vede poi agevolmente che per l'orientabilità di  $V'$  occorre, ma non basta, che  $V$  sia orientabile. Così, per esempio, se  $V$  è orientabile e  $c = 0$  (e cioè se la  $U$  è ridotta ad un punto),  $V'$  è orientabile se, e soltanto se,  $d$  è dispari (nel qual caso, però,  $U'$  risulta non orientabile).

Nel seguito studieremo talune proprietà omologiche di  $U$  in  $V$ , deducendole da proprietà simili di  $U'$  e  $V'$ . Allo scopo di non dover escludere i casi di non orientabilità di  $U'$  o  $V'$ , ci limiteremo a considerare proprietà omologiche  $\text{mod } 2$ , il che potrà esprimersi dicendo che facciamo uso delle *dilatazioni mod 2*. Va però avvertito che, sotto opportune condizioni, argomentazioni dello stesso tipo di quelle che seguono potrebbero anche venir svolte sopra l'anello degli interi.

3. SUCCESSIONI COVARIANTI D'IMMERSIONE. — Conservando le notazioni del n. 1, supponiamo che valgano le (6); inoltre, a norma del n. 2, sia su  $V$  che su  $V'$  le catene continue ed i cicli (nonché le omologie e le intersezioni a questi relative) verranno considerate  $\text{mod } 2$ , talché sarà lecito prescindere dalle orientazioni. Se  $A$  designa una catena continua serrata di  $V$ , che non giaccia su  $U$ , denoteremo con

$$(7) \quad A' = T(A)$$

la catena di  $V'$  che si ottiene completando il luogo dei trasformati mediante  $T$  dei punti di  $A$  che non stanno su  $U$  coi loro punti di accumulazione. Del pari, indicheremo con  $\Theta(C')$  il  $k$ -ciclo di  $V$  trasformato di un  $k$ -ciclo  $C'$  di  $V'$  mediante la trasformazione univoca continua  $\Theta = T^{-1}$ ; è chiaro che, se  $C'$  giace su  $U'$  ed incontra i singoli  $S'_r$  generatori di  $U'$  secondo cicli di dimensione positiva, l'insieme dei punti costituenti  $\Theta(C')$  ha dimensione inferiore a  $k$ , sicché allora il  $k$ -ciclo  $\Theta(C')$  risulta omologo allo zero.

Siano  $A$  e  $B$  due  $(d-1)$ -cicli di  $V$  fra loro omologhi, il secondo dei quali non passi per  $U$ , mentre il primo contenga  $U$  avendo un punto semplice nel generico punto  $P$  di  $U$ ; non escludiamo, però, che  $A$  possa possedere delle singolarità in punti particolari di  $U$ . Definito  $A'$  con la (7), in virtù del n. 1 risulta su  $V'$ :

$$A' S'_r \sim S'_{r-1},$$

ove i due membri rispettivamente designano l'intersezione dei due cicli  $A', S'_r$  di  $V'$  ed un iperpiano dello spazio proiettivo  $S'_r$ , trasformato di  $P$  mediante  $T$ ; ne consegue che, con ovvie notazioni, per ogni intero  $p = 1, 2, \dots, r$  si ha:

$$A'^p S'_r \sim S'_{r-p}.$$

D'altro canto, l'ipotesi  $A \sim B$  implica l'esistenza di una  $d$ -catena  $D$  di  $V$  avente  $A + B$  come contorno. Poiché ogni accetta  $(c+1)$ -dimensionale tangente in  $P$  ad  $U$  e  $V$  penetra in  $D$ , così — su  $V'$  — la  $d$ -catena  $D' = T(D)$  viene ad avere per contorno  $A' + B' + U'$ , talché risulta

$$(8) \quad A' \sim B' + U'.$$

Ora si ha  $B' S'_r \sim 0$ , poichè  $B'$  non ha punti a comune con  $S'_r$  in quanto  $B$  non passa per  $P$ , e pertanto:

$$U' S'_r \sim A' S'_r \sim S'_{r-1};$$

più generalmente, si vede del pari che sussistono le omologie

$$U'^p S'_r \sim S'_{r-p} \quad (p = 0, 1, \dots, r).$$

Ne consegue che è

$$(9) \quad \Theta(U'^k) \sim 0 \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, r;$$

mentre invece

$$(10) \quad U_{V,i} = \Theta(U'^{r+i+1}) \quad \text{per } i = 0, 1, \dots, c$$

risulta un  $(c-i)$ -ciclo - generalmente non nullo - di  $U$ , coincidente con lo stesso  $U$  per  $i = 0$ .

I cicli (10) - per il modo stesso come li abbiamo ottenuti - sono definiti ciascuno a meno di un'omologia (mod 2), non appena si assegnino  $U$  e  $V$  soddisfacenti alla  $U \subset V$ . Diremo quindi che

$$\{U_V\} = U, U_{V,1}, U_{V,2}, \dots, U_{V,c}$$

è la *successione covariante d'immersione* di  $U$  in  $V$ , per analogia anche col caso algebrico (cfr. Segre [8], nn. 2-5).

4. INTERSEZIONI IRREGOLARI. - Analogamente a quanto accade nel caso algebrico (cfr. Segre [7], Cap. II, III, IV), anche sulle varietà differenziabili le successioni covarianti d'immersione godono di svariate proprietà, e possono servire ad impostare e risolvere problemi d'intersezione irregolare fra cicli e questioni molteplici sulle singolarità a questi relative. Qui ci limiteremo a dare un solo esempio, riguardante un problema del primo tipo.

Fissato un intero  $s$  soddisfacente alle limitazioni

$$d - c + 1 \leq s \leq d,$$

e posto

$$(11) \quad t = s - d + c,$$

consideriamo  $s$   $(d-1)$ -cicli qualsiasi di  $V$ :

$$(12) \quad A_1, A_2, \dots, A_s.$$

Mostreremo che:

*Alle classi di omologia definite su  $V$  dai cicli (12) e da  $U$  resta coordinata una classe di omologia  $(d-s)$ -dimensionale, che denoteremo con*

$$(A_1 A_2 \dots A_s)_V^U,$$

un rappresentante della quale può venire ottenuto come intersezione residua ad  $U$  di  $s$  cicli differenziabili omologhi ai cicli (12) i quali passino semplicemente per  $U$ ; vale inoltre l'omologia

$$(13) \quad (A_1 A_2 \cdots A_s)_V^U \sim A_1 A_2 \cdots A_s + \sum_{i=0}^t U_{V,t-i} V_i [A],$$

ove nel secondo membro i prodotti vanno effettuati nell'anello di omologia (mod 2) su  $V$ , e  $V_i [A]$  denota la somma di tutti i prodotti dei cicli (12) presi ad  $i$  ad  $i$  senza ripetizioni.

La prima parte si ha subito osservando che, con notazioni ovvie suggerite dal n. 3, risulta

$$(14) \quad (A_1 A_2 \cdots A_s)_V^U \sim \Theta (A'_1 A'_2 \cdots A'_s).$$

Si stabilisce poi la parte rimanente come segue. Anzitutto, in base alla (8), si ha

$$A'_1 A'_2 \cdots A'_s \sim (B'_1 + U') (B'_2 + U') \cdots (B'_s + U'),$$

ossia, avuto riguardo alle (1), (11),

$$A'_1 A'_2 \cdots A'_s \sim B'_1 B'_2 \cdots B'_s + \sum_{k=1}^r U'^k V'_{s-k} [B'] + \sum_{i=0}^t U'^{r+t-i+1} V'_i [B'].$$

Basta allora applicare  $\Theta$  ai due membri di questa omologia, ed usufruire delle relazioni evidenti

$$\Theta (V'_i [B']) \sim V_i [A]$$

e delle (9), (10), (14), per dedurne la (13).

5. SUCCESSIONI CANONICHE. — Una qualunque varietà differenziabile  $V$  può venire identificata con la varietà diagonale del prodotto  $W = V \times V$ . Si ha allora  $V \subset W$ , sicchè risulta definita in modo intrinseco la successione  $\{V_W\}$  covariante d'immersione di  $V$  in  $W$  (n. 3). Una funzione algebrica di questa, detta la sua inversa (e definita come nel caso algebrico: cfr. Segre [7], nn. 6, 7), può venir chiamata la *successione canonica* di  $V$ , per analogia con ciò che accade nel caso algebrico (cfr. Segre [7], nn. 66, 87). Essa consta di  $d+1$  classi di omologia mod 2, una per ciascuno dei valori  $0, 1, \dots, d$  della dimensione, definite su  $V$  in modo invariante di fronte agli omeomorfismi differenziabili.

È presumibile che fra tali successioni canoniche e le successioni covarianti d'immersioni intercedano relazioni analoghe a quelle valevoli nel caso algebrico, sicchè per esempio (cfr. Segre [7], n. 67):

Se  $U \subset V$ , la successione covariante d'immersione di  $U$  in  $V$  uguagli il prodotto della successione canonica di  $U$  per l'inversa della successione canonica di  $V$ .

6. DILATAZIONI D'INDICE SUPERIORE. — Se  $V'$  è la varietà che si ha (come al n. 1) applicando a  $V$  la dilatazione  $T$  di base  $U$ , può darsi che  $V'$  possa anche ottenersi in guisa similare a partire da una varietà,  $V_1$ , non omeomorfa a  $V$ .



Il caso piú interessante è quello in cui la  $U' = T(U)$  possa venir fibrata differenziabilmente mediante sottospazi  $S'_k$  dei suoi  $S'_r$  generatori: allora può porsi

$$V_1 = \Theta_1(V'),$$

dove  $\Theta_1$  denoti la contrazione che riduce ciascuna di quelle fibre  $S'_k$  ad un sol punto. Escluderemo i casi estremi  $k = 0$  e  $k = r$  perchè banali, in quanto per essi  $V_1$  risulta rispettivamente omeomorfa a  $V'$  od a  $V$ , ossia supporremo

$$0 < k < r.$$

Allora si passa da  $V$  a  $V_1$  applicando il prodotto

$$(15) \quad T_1 = \Theta_1 T$$

(effettuato da destra a sinistra); e questo dilata i singoli punti di  $U$  in varietà di dimensione

$$r - k = d - c - (k + 1) > 0,$$

costituenti le basi delle fibrazioni mediante  $S'_k$  dei singoli  $S'_r$  generatori di  $U'$ , mutando quindi  $U$  in una varietà  $U_1$  di dimensione

$$c + (r - k) = d - (k + 1).$$

Diremo pertanto che  $T$  è una *dilatazione d'indice*  $k + 1$ , di  $V$  in  $V_1$ , avente per base  $U$ .

Tenuto conto del n. 1, le dilatazioni così ottenibili possono anche venir definite direttamente a partire da  $U$  e da  $V$ , senza cioè ricorrere a  $V'$ . A tal uopo, basta riferirsi alla varietà  $U^*$  - fibrata da  $r$ -sfere  $\Sigma_p^*$  - introdotta nel n. 1: fibrando  $U^*$  con  $k$ -sfere equatoriali di tali  $\Sigma_p^*$ , si ricava  $V_1$  da  $V^*$  con l'identificare fra loro i punti di ciascuna di queste  $k$ -sfere. Tutto ciò può naturalmente altresì venir interpretato entro le stelle delle faccette  $(c + 1)$ -dimensionali tangenti ad  $U$  e  $V$  nei singoli punti di  $U$ , con riferimento alla varietà tagliata  $V - U$  (n. 1).

Così, ad esempio, se  $V$  è una varietà a struttura complessa (e quindi di dimensione reale  $d$  pari) ed  $U$  denota una sua sottovarietà appartenente a detta struttura, si vede subito che la struttura complessa di  $V$  definisce intrinsecamente una *fibratura* mediante cerchi delle sfere  $\Sigma_p^*$  suddette. Ne consegue in modo intrinseco una *dilatazione d'indice 2* di base  $U$ , della  $V$  in un'altra varietà  $V_1$  a struttura complessa, la quale dilata la  $U$  in una sottovarietà  $U_1$  (di dimensione reale  $d-2$ ) della  $V_1$ , appartenente alla struttura complessa di quest'ultima.

È chiaro però che, *a priori*, dilatazioni d'indice 2 o superiore possono anche esistere in altri casi, e che il loro studio può venire effettuato attraverso la (15). La questione più importante resta quella costruttivo-esistenziale, includente il (e, per  $c = 0$ , equivalente al) problema di *determinare le possibili fibrazioni differenziabili di uno spazio proiettivo mediante spazi subordinati*. Di questo mi occuperò in una Nota successiva.

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] H. GUGGENHEIMER, *Modifications of a manifold in one point*, «Math. Japonicae», 4, 5-11 (1956).
- [2] H. GUGGENHEIMER, *Modifications in real and complex curves*, «Math. Japonicae», 4, 33-47 (1956).
- [3] G. HIRSCH, *La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés*, «Coll. Internat. de Topol. Algèbr.», 35-42 (Paris 1947).
- [4] H. HOPF, *Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten*, «Comm. Math. Helv.», 29, 132-156 (1955).
- [5] B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche*, «Ann. di Mat.», (4) 33, 5-48 (1952).
- [6] B. SEGRE, *Dilatazioni e comportamenti associati nel campo analitico*, «Rend. Circ. Mat. Palermo», (2) 1, 373-379 (1952).
- [7] B. SEGRE, *Nuovi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche*, «Ann. di Mat.», (4) 35, 1-128 (1953).
- [8] B. SEGRE, *Dilatazioni e varietà canoniche sulle varietà algebriche*, «Ann. di Mat.», (4) 37, 139-155 (1954).
- [9] B. SEGRE, *Corrispondenze birazionali e topologia di varietà algebriche*, «Ann. di Mat.», (4) 43, 1-23 (1957).
- [10] W. STOLL, *Ueber meromorphe Modifikationen* (Habilitationsschrift, Tübingen 1954), riprodotto in cinque Note uscite dipoi in «Math. Zeitschr.» e nei «Math. Annalen».
- [11] E. VESENTINI, *Classi caratteristiche e varietà covarianti d'immersione*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8) 16, 199-204 (1954)<sub>1</sub>.
- [12] E. VESENTINI, *Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietà covarianti d'immersione*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8) 17, 196-203 (1954)<sub>2</sub>.

**Astronomia geodetica.** — *Sulla determinazione degli errori di lettura di una livella dovuti a imperfezioni della costruzione.* Nota (\*) del Socio GIOVANNI SILVA.

I. Gli strumenti che permettono di misurare piccoli angoli con una precisione massima sono il micrometro oculare e la livella. Del primo la precisione viene di solito accresciuta con la determinazione degli errori progressivi e periodici della vite micrometrica che permettono di togliere dalle misure l'influenza dei difetti della costruzione. Un'analoga determinazione degli errori di lettura delle livelle di grande sensibilità, destinate a misure di inclinazioni di alta precisione, procurerebbe un eguale vantaggio e d'altra parte non sembrerebbe presentare gravi difficoltà. W. Chauvenet, fin dalla metà del secolo scorso, affermava <sup>(1)</sup> che, se una livella è difettosa e non la si può sostituire, «una ricerca accurata potrebbe determinare un sistema di correzioni da applicare alle varie letture». Non mi risulta però che

(\*) Presentata nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) *Manual of spherical and practical Astronomy*. IV ed. London, 1868, vol. II, § 60, p. 76.

questo problema, di data tanto lontana, abbia avuto finora una soluzione soddisfacente.

La difficoltà della ricerca proviene dal fatto che una sola misura, eseguita con una livella, richiede due letture sulla sua graduazione, rilevate agli estremi della bolla e queste due letture, insieme con i relativi errori, devono variare con la lunghezza della bolla.

2. Nella consueta teoria della livella si ammette che la superficie di separazione tra il liquido contenuto nella canna e la « bolla », occupata dal vapore di tale liquido, sia un piano orizzontale, prescindendo dalla capillarità, che genera il menisco lungo il contorno di quella superficie; supposta poi la livella bene sistemata per il suo uso, si considera il piano verticale che divide longitudinalmente in due eguali metà sia la superficie interna

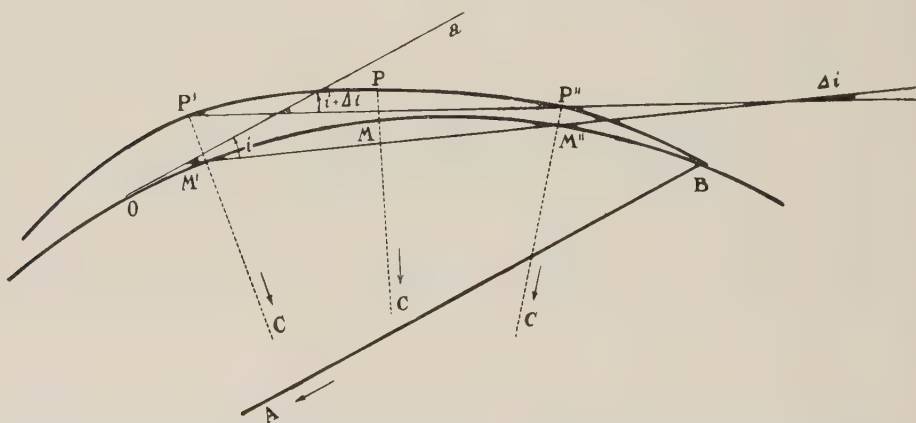


Fig. 1.

della canna, sia la detta superficie di separazione tra bolla e liquido e si assimila ad un arco di circonferenza  $\gamma$  l'intersezione di quel piano con la prima delle due superficie, limitata alla sua parte superiore, mentre l'intersezione con la seconda è evidentemente una corda dell'arco  $\gamma$ ; gli estremi di questa corda  $M' M''$  si dicono anche estremi della bolla. La loro posizione è definita dalle letture  $l' l''$  che si fanno in loro corrispondenza su una graduazione generalmente incisa sull'esterno della canna ed è evidente che il punto centrale della bolla, cioè il punto di mezzo  $M$  dell'arco  $M' M''$ , rimane definito dalla lettura

$$(1) \quad l = \frac{l' + l''}{2} .$$

È inoltre evidente che la tangente alla circonferenza nel punto  $M$  è orizzontale come  $M' M''$ .

Supposto che lo zero della graduazione coincida con il punto  $O$  di  $\gamma$  che si trova a eguale distanza dagli estremi  $A$  e  $B$  della graduazione stessa, la tangente  $Oa$  alla circonferenza nel punto zero prende il nome di asse

della livella; esso è parallelo alla corda AB di  $\gamma$  e all'asse del tubo da cui è stata ottenuta la livella, il che giustifica il suo nome. Ma nulla vieta di mantenere questa definizione anche quando lo zero è ad un estremo della graduazione, al quale attribuiremo l'indicazione A. In questo secondo caso il senso delle letture crescenti, da A verso B, è indicato dalla graduazione stessa. Nel primo caso riterremo che sia ancora da A verso B, ma la distinzione fra i due punti dovrà essere fissata convenzionalmente, con riguardo a qualche particolare esterno della costruzione della livella, ad esempio con riguardo alla posizione delle viti di rettifica; naturalmente si dovrà dare il segno - alle letture da O verso A e il segno + a quelle da O verso B. All'asse della livella e a una corda qualsiasi M' M'' sarà sempre dato il senso delle letture crescenti.

Indicato con  $p$  l'intervallo tra due tratti successivi della graduazione (generalmente mm 2.26 equivalenti alla vecchia linea di Parigi) e con R il raggio della circonferenza  $\gamma$  (dell'ordine di m 466 nelle livelle di grande precisione a 1'') il valore angolare di una parte in secondi d'arco è

$$(2) \quad \sigma = \frac{206265'' p}{R} .$$

Per quanto è stato premesso l'inclinazione  $i$  dell'asse della livella Oa sull'orizzontale M' M'' è data dall'ampiezza dell'arco OM e vale

$$(3) \quad i = \sigma l = \frac{\sigma(l' + l'')}{2} .$$

Essa risulta positiva o negativa, a seconda che l'asse della livella, nella sua orientazione positiva, è in salita o in discesa.

3. Nella costruzione di una livella di grande precisione, la superficie interna del tubo di vetro dal quale la si ricava viene di solito leggerissimamente consumata, senza diminuirne, anzi accrescendone la levigatezza, e conservandole la figura di rotazione intorno all'asse del tubo; la generatrice, partendo dalla retta della forma cilindrica primitiva, deve, o meglio dovrebbe, divenire l'arco di cerchio  $\gamma$  di raggio R, menzionato al paragrafo precedente. Nella rappresentazione geometrica, di molto prolungata esternamente al tubo, l'asse di questo è dunque una corda del detto arco. Senonché, per quanto accurata sia la lavorazione, il piano della circonferenza teorica  $\gamma$  dianzi considerata taglia la parte superiore della superficie quale risulta a lavorazione finita, in una curva  $c$  non sufficientemente vicina ad una circonferenza perché i divarî possano sfuggire ad un accuratissimo controllo. La ricerca auspicata dal Chauvenet dovrebbe determinare questi divarî e la loro influenza sulle letture.

In una mia Nota, presentata recentemente all'Istituto Veneto <sup>(2)</sup>, ho preso in considerazione l'ordinario procedimento con il quale si esamina

(2) *Applicazioni della teoria degli errori all'esame di una livella*, in corso di stampa nelle «Memorie dell'Ist. Ven. di S.L.A.» Tomo CXV (1956-57).



una livella per determinarne il valore angolare di una parte  $\sigma$  e per riconoscerne la maggiore o minore regolarità. Nell'ultimo paragrafo di quella mia Nota ricordo anche altre analoghe ricerche di W. Jordan <sup>(3)</sup>, B. Wagnach <sup>(4)</sup>, R. A. Hirvonen <sup>(5)</sup>, R. Brein <sup>(6)</sup>. In accordo con l'opinione di quest'ultimo autore, si può trovare in quel procedimento anche una prima risposta al problema posto dal Chauvenet; per tale ragione lo riassumerò qui brevemente usando i simboli della mia Nota sopra citata.

Posta la livella sull'esaminatore, si porta il primo estremo della bolla all'inizio A della graduazione e si danno poi  $h$  successive ed eguali rotazioni al tamburo della vite micrometrica, dopo l'ultima delle quali il secondo estremo della bolla dovrà essere arrivato all'altro estremo B della graduazione. Lo strumento esaminatore fa conoscere la variazione  $\iota$  dell'inclinazione  $i$  data ogni volta alla livella, mentre dalle  $h + 1$  coppie di letture  $l_r, l_r'$ , fatte agli estremi della bolla in ogni sua posizione, si hanno con la (1) gli  $h + 1$  valori  $L_r$  che definiscono le successive posizioni del centro della bolla stessa. Indicate con  $i_r$  le corrispondenti inclinazioni dell'asse della livella, la (3) fornisce le  $h + 1$  equazioni

$$(4) \quad i_r = i_0 + r\iota = \sigma(L_r + v_r) \quad (r = 0, 1, 2, \dots, h)$$

nelle due incognite  $i_0$  e  $\sigma$ . I residui  $v_r$  provengono sia dagli errori di vario genere imputabili all'osservatore o allo strumento esaminatore, sia dall'ipotesi, tacitamente ammessa, ma non mai rigorosamente soddisfatta, che la livella sia perfetta. Posto

$$(5) \quad x = \frac{i_0}{\sigma}, \quad y = \frac{\iota}{\sigma},$$

le suddette equazioni assumono la forma

$$(6) \quad x + ry = L_r + v_r$$

e, trattate con il metodo dei minimi quadrati, conducono alla soluzione finale

$$(7) \quad \frac{h(h+1)(h+2)}{12} y = \sum_{r=0}^h (r - h/2) L_r,$$

nella quale il coefficiente della  $y$  è anche il peso di questa incognita, se si dà peso 1 ad ogni valore  $L_r$ .

Salvo a dare altre forme al secondo membro della (7), come indico nella mia Nota sopra citata, è questa la via che conduce al risultato preferibile per l'incognita  $y$ , e quindi per la costante  $\sigma$ , quando ci si voglia servire dei

(3) *Handbuch der Vermessungskunde*, 3ª ed. vol. II, 1888, § 35, p. 103; 10ª ed. vol. II, 1950, § 59, p. 259.

(4) *Untersuchungen von Sekundenlibellen*. «Z. für Instrumentekunde», XLVI Jahrg. 1926, p. 221.

(5) *Bestimmung der Libellenempfindlichkeit und eines konstante Verhältnisses im allgemeinen*. «Z. für Vermessungswesen», 75 Jahrg. 1950, p. 137.

(6) *Beitrag zur Libellenprüfung*. Deutsche Geod. Kommission, Reihe B, Nr 21. («Verlag des Inst. für Angew. Geodäsie», 1954).

residui  $v_r$  soltanto per calcolare un error medio quale dato statistico di paragone fra più livelle; tutte esaminate allo stesso modo.

4. Per lo scopo della presente Nota è opportuno soffermarci sul procedimento di osservazione indicato nel precedente paragrafo per il fatto che oggi esso può essere applicato con esaminatori di livelle e con sistemi di lettura di queste così perfezionati <sup>(7) (8)</sup>, da poter attribuire i residui  $v_r$  introdotti nelle (4) quasi esclusivamente ai difetti della livella. Ne segue, come afferma il Brein <sup>(6)</sup>, che il loro calcolo, più che servire alla determinazione di un errore medio, fornisce una serie di correzioni  $v_r$  da applicare alle letture  $l_r$  della livella considerata per ridurle a quelle che si sarebbero ottenute con una livella perfetta. Una rappresentazione grafica permette poi di ottenere l'analoga correzione  $v$  per una qualsiasi altra lettura  $l$ .

Un'obiezione che si potrebbe fare a questa soluzione del problema posto dal Chauvenet deriva dal fatto che le  $v_r$  così considerate diventano  $h + 1$  incognite e il sistema delle  $h + 1$  equazioni (4) — 0, se si preferisce, delle (6) — con  $h + 3$  incognite (le  $v_r$ , la  $\sigma$  e la  $i_0$ ) diventa indeterminato. E si capisce che così debba essere: 1°) perché il valore angolare di una parte della livella varia da posto a posto, sicché per la costante  $\sigma$  si può scegliere un valore intermedio arbitrario da assegnare anche alla costante  $\sigma$  di quella livella ipotetica perfetta che, sottoposta all'identica esperienza, dovrebbe fornire le letture corrette  $l_r + v_r$ ; 2°) perché la livella è destinata a dare soltanto differenze di inclinazioni e poco importa che le  $v_r$  siano tutte aumentate o diminuite di una stessa quantità  $v$ ; contemporaneamente  $i_0$  verrà analogamente variato di  $v\sigma$ .

Nel procedimento di calcolo sopra ricordato, appoggiato alla teoria degli errori, il sistema delle equazioni (6) — e quindi quello delle (4) — è stato reso determinato imponendo la condizione che la somma dei quadrati delle  $h + 1$  incognite  $v_r$  sia minimo.

Il Brein preferisce seguire il metodo più semplice che viene usato nella determinazione delle correzioni progressive alle letture di una vite micrometrica. Senza entrare in particolari, basterà dire che il sistema (4) è reso determinato imponendo le due condizioni: I) che la somma delle correzioni  $v_r$  sia nulla; II) che a  $\sigma$  sia dato il valore medio che le deriva dalle due letture estreme, facendo  $v_0 = v_h$ :

$$\sigma = \frac{h v}{l_h - l_0}.$$

I risultati numerici che si ottengono per  $\sigma$  e per le  $v_r$  con i due procedimenti di calcolo qui indicati devono essere molto prossimi fra loro, ma

(7) R. DELMONTE, *Un metodo interferenziale per la taratura delle livelle*. « Bollettino Geodetico dell'I.G.M. », Firenze 1949. « Bulletin Géodésique », 1949, N. 11, p. 73.

(8) E. GIGAS, *Interferenzmethode zur genauen Libellen-Untersuchung*. (« Wissenschaftliche Referate », S. 25); « Deutsche Geod. Komm. Reihe A. », Heft 3, 1952.

generalmente non saranno coincidenti; tuttavia le variazioni di inclinazione ottenute per differenza da una coppia qualunque di letture corrette calcolate secondo i due diversi procedimenti devono risultare identiche.

Un'obiezione più grave deve però essere fatta a quanto è stato detto all'inizio di questo paragrafo. Le  $l_r$  sono « letture » al centro della bolla calcolate con la (1), mediante le effettive letture  $l'_r, l''_r$ , fatte agli estremi di essa, e la correzione  $v_r$  di  $l_r$  è la semisomma delle due correzioni che, per i difetti della livella, esigono  $l'_r, l''_r$ . Se la bolla ha una maggiore o minore lunghezza e queste due letture si allontanano o si avvicinano, lasciando invariata la media  $l_r$ , cambiano le correzioni di  $l'_r, l''_r$  e deve quindi cambiare anche  $v_r$ . Perché il metodo qui indicato possa dirsi un'effettiva soluzione del problema proposto dal Chauvenet, occorre dunque ripetere la ricerca dando alla bolla diverse lunghezze  $\lambda$  per giungere di poi alla formazione di una tabella a doppia entrata che dia il valore della correzione  $v$  in funzione di  $l$  e di  $\lambda$ .

5. Dopo quanto sopra è stato esposto, conviene cercare una diversa e meno empirica soluzione del problema, definendo in modo preciso le effettive irregolarità della livella e determinando la loro influenza sulle singole letture fatte agli estremi della bolla. A questo scopo ricordiamo che quelle irregolarità consistono anzitutto nei divarî fra la curva  $c$  e un arco di circonferenza  $\gamma$ , di cui si è detto al paragrafo 3.

Di quest'arco indichiamo con  $C$  il centro e con  $R$  il raggio. Assumiamo  $C$  come origine di un sistema di coordinate polari  $\rho, \theta$ , con  $CO$  quale asse polare e con anomalie  $\theta$  crescenti positivamente nel verso delle letture  $l$  crescenti. Potremo allora scrivere le equazioni dell'arco  $\gamma$  e della curva  $c$  sotto la forma

$$(8) \quad \rho = R \quad , \quad \rho = R + \delta(l).$$

Siano  $P', P''$  i due estremi della bolla;  $l', l''$  le corrispondenti letture;  $P$  il punto di  $c$  corrispondente alla lettura media  $l$  data dalla (1);  $M', M''$ ,  $M$  i punti di  $\gamma$  di eguali letture. Come risulta dalle (8), gli scostamenti  $M'P = \delta(l')$ ,  $M''P'' = \delta(l'')$  sono contati positivamente nella direzione e nel verso dei due raggi vettori  $CP', CP''$  uscenti da  $C$ , ma, data la grande distanza a cui si trova questo centro dall'arco  $M'M''$ , possiamo anche dire che questi estremi  $M', M''$  dell'arco  $\gamma$  stanno al disotto dei corrispondenti punti  $P', P''$  della curva  $c$  rispettivamente di  $\delta(l')$  e di  $\delta(l'')$ , oppure che stanno al di sopra per  $-\delta(l')$  e per  $-\delta(l'')$  quando gli scostamenti  $\delta$  sono negativi. Teniamo presente che la corda  $P'P''$  della  $c$  è orizzontale e che la distanza fra  $M'$  ed  $M''$ , o fra  $P'$  e  $P''$  è la lunghezza lineare della bolla  $p(l'' - l')$ ; possiamo allora concludere che la corda  $M'M''$  è inclinata sulla corda orizzontale  $P'P''$  dell'angolo

$$(9) \quad \Delta i = \frac{\delta(l') - \delta(l'')}{p(l'' - l')} \cdot 206265'',$$

valendo per le inclinazioni la norma, già indicata per la (3), che il segno è positivo o negativo a seconda che la corda  $M'M''$ , nella sua naturale orientazione delle letture crescenti, è in salita o in discesa.

D'altra parte l'inclinazione  $i$  dell'asse della livella sulla corda  $M'M''$  è data dalla (3), quindi l'effettiva inclinazione di quest'asse sull'orizzontale  $P'P''$ , espressa in secondi, è

$$(10) \quad i + \Delta i = \frac{\sigma(l' + l'')}{2} + \frac{\delta(l') - \delta(l'')}{p(l'' - l')} 206265.$$

Indichiamo con  $\lambda$  la lunghezza  $l'' - l'$  della bolla, espressa dal numero di parti della graduazione che essa comprende, e poniamo

$$(11) \quad \Delta l = \frac{206265 \delta(l)}{\sigma p \lambda} = \frac{R \delta(l)}{p^2 \lambda}.$$

La (10) può allora scriversi

$$(12) \quad i + \Delta i = \sigma \frac{(l' + \Delta l') + (l'' - \Delta l'')}{2}.$$

Le irregolarità  $\delta$  della livella variano soltanto con la lettura  $l$ ; le correzioni  $\Delta l$  che ne conseguono variano inoltre: nel valore assoluto, in ragione inversa alla lunghezza  $\lambda$  della bolla; nel segno, a seconda che la lettura riguarda il primo o il secondo estremo.

6. Le considerazioni e le formule precedenti permettono ora di dare una facile soluzione al problema di determinare le irregolarità  $\delta$  della livella e le correzioni  $\Delta l'$ ,  $\Delta l''$  da applicare alle letture degli estremi della bolla al fine di ridurle a quelle che si farebbero se la curva  $c$  fosse una circonferenza.

Il programma sperimentale dovrà comprendere più serie di osservazioni analoghe a quella indicata al paragrafo 4, la quale dà origine alle equazioni del tipo (4) o (6). Qui ci limiteremo ad esporre le regole che si devono seguire nello svolgimento di tale programma, lasciando allo sperimentatore di fissarne la maggiore o minore estensione e di precisare il procedimento di calcolo. Per facilitare l'esposizione di dette regole, ci limiteremo altresì ad esporre un caso particolare, a titolo di esempio.

Immaginiamo dunque di dividere l'intera graduazione in dodici parti eguali e chiamiamo  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_{12}$  le letture teoriche che separano o limitano le dette dodici parti.

Nelle equazioni (4), l'inclinazione iniziale  $i_0$  della livella è variabile da serie a serie. Distingueremo quindi le incognite  $x$ , espresse dalla prima delle (5) e diverse da una serie all'altra, con un indice  $s$  eguale al numero d'ordine della serie. Lo stesso indice daremo ad  $h$ , senza però conservarlo (per semplici ragioni tipografiche) quando  $h$  è, a sua volta, un'indice.

In ogni serie, daremo di volta in volta all'esaminatore una variazione di inclinazione di  $\iota$  secondi d'arco, equivalenti a  $L : 12$  parti della livella; sarà cioè  $\iota = L\sigma : 12$ . Ferma restando la seconda delle posizioni (5), il secondo termine della (6) rimane invariato.



Alla bolla daremo una lunghezza  $\lambda_s$  variabile da serie a serie, ma sempre eguale ad un multiplo  $k_s$  di  $L : 12$ . Poiché, dopo gli  $h_s$  spostamenti che si danno alla bolla in una serie, il primo estremo è in prossimità della lettura teorica  $l_h = h_s L : 12$  e il secondo estremo è prossimo a  $l_{12} = L$ , sarà  $h_s + k_s = 12$ .

Le letture  $l'_r$  al primo estremo della bolla avranno valori sempre vicini a quelli teorici  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_h$ ; designeremo le letture effettive aggiungendo all'indice  $r$ , variabile da 0 ad  $h_1$ , un secondo indice eguale al numero d'ordine  $s$  della serie e mantenendo ad esse l'apice; le indicheremo cioè con  $l'_{r,s}$ . Le letture al secondo estremo della bolla, designate al paragrafo 4 con  $l''$ , saranno prossime ai valori teorici  $l_k, l_{k+1}, \dots, l_{12}$  e qui le designeremo con  $l''_{r+k,s}$ . La  $l_r$  della (6) diviene quindi la media  $0.5 (l'_{r,s} + l''_{r+k,s})$ .

Quanto al residuo  $v_r$ , quando si fa astrazione dagli errori di osservazione, esso assume la forma  $0.5 (\Delta l' - \Delta l'')$  della (12), nella quale  $\Delta l'$  e  $\Delta l''$  sono le correzioni alle letture  $l'_r, l''_{r+k}$ . Ora queste correzioni sono variabili con la lunghezza della bolla  $\lambda_s = k_s L : 12$ . Assumeremo come lunghezza normale della bolla la metà  $L : 2$  della lunghezza della graduazione e come correzione normale  $\Delta l^{(n)}$  alla lettura  $l$  quella data dalla (11) per  $\lambda = L : 2$ , cioè

$$(13) \quad \Delta l^{(n)} = \frac{2 \cdot 206265 \delta(l)}{\sigma p L}.$$

Per  $\lambda_s = k_s L : 12$  la correzione alla lettura  $l$  diviene

$$(14) \quad \Delta l = \frac{12 \cdot 206265 \delta(l)}{\sigma p k_s L} = \frac{6}{k_s} \Delta l^{(n)}.$$

Volendo introdurre nelle (6) sempre e soltanto le correzioni normali alle letture teoriche  $l_0, l_1, \dots, l_{12}$ , rappresenteremo queste incognite con  $\Delta l_0, \Delta l_1, \dots, \Delta l_{12}$ , omettendo il simbolo  $(n)$ ; il  $v_r$  delle (6), diventerà in definitiva,

$$v_r = \frac{3 (\Delta l_r - \Delta l_{r+k})}{k_s},$$

e le (6) assumeranno la forma

$$(15) \quad x_s + ry = \frac{l'_{r,s} + l''_{r+k,s}}{2} + \frac{3 (\Delta l_r - \Delta l_{r+k})}{k_s} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, h_s).$$

Volendo evitare bolle di lunghezza troppo piccole, per la poca prontezza che esse hanno a prendere la loro posizione di equilibrio, e lunghezze troppo grandi per il piccolo coefficiente che darebbero alle incognite  $\Delta l_r$ , possiamo attribuire a  $k_s$  nelle equazioni (15) i valori 3, 4,  $\dots$ , 9, che corrispondono a lunghezze di bolla comprese fra  $1/4$  e  $3/4$  della lunghezza  $L$  della graduazione, variando da una serie all'altra di  $1/12$  di tale lunghezza. Si avrebbero così 7 serie di equazioni, quali ad esempio la seguente che corrisponde alla lun-

ghezza della bolla  $L : 2$ , indicata come normale e che considereremo come serie iniziale ( $s = 1$ ,  $h_1 = k_1 = 6$ ):

$$(1.0) \quad x_1 = 0.5 (l'_{0,1} + l''_{6,1}) + 0.5 (\Delta l_0 - \Delta l_6)$$

$$(1.1) \quad x_1 + y = 0.5 (l'_{1,1} + l''_{7,1}) + 0.5 (\Delta l_1 - \Delta l_7)$$

$$(1.2) \quad x_1 + 2y = 0.5 (l'_{2,1} + l''_{8,1}) + 0.5 (\Delta l_2 - \Delta l_8)$$

$$(1.3) \quad x_1 + 3y = 0.5 (l'_{3,1} + l''_{9,1}) + 0.5 (\Delta l_3 - \Delta l_9)$$

$$(1.4) \quad x_1 + 4y = 0.5 (l'_{4,1} + l''_{10,1}) + 0.5 (\Delta l_4 - \Delta l_{10})$$

$$(1.5) \quad x_1 + 5y = 0.5 (l'_{5,1} + l''_{11,1}) + 0.5 (\Delta l_5 - \Delta l_{11})$$

$$(1.6) \quad x_1 + 6y = 0.5 (l'_{6,1} + l''_{12,1}) + 0.5 (\Delta l_6 - \Delta l_{12})$$

7. Rimane ancora da definire la circonferenza  $\gamma$  della livella teoricamente perfetta, alla quale vogliamo ridurre le letture fatte sulla livella in esame. Una prima soluzione che si può dare a questo problema è quella di riguardare come più attendibile quel valore di  $y$  (e quei valori delle incognite ausiliarie  $x_s$  relativi alle varie serie di osservazioni eseguite) che rendono minima la somma dei quadrati di tutte le differenze

$$(16) \quad v_{r,s} = \Delta l_r - \Delta l_{r+k},$$

considerate come residui di tutte le equazioni corrispondenti alle osservazioni fatte. In ogni serie, per ridurci alle equazioni che hanno per residui le dette differenze si devono moltiplicare tutti i termini delle (15) per  $k_s : 3$ , come se tutte le equazioni della serie considerata acquistassero un peso uguale a  $k_s^2 : 9$ . Ne segue che, attribuendo ora l'unità di peso ai residui  $v_{r,s}$  dati dalle (16), il valore della  $y$ , determinato da tutte le serie, resta definito dalla

$$(17) \quad \sum_s \frac{k_s^2 h_s (h_s + 1) (h_s + 2)}{108} y = \sum_s \frac{k_s^2}{9} \sum_r^h \left( r - \frac{h_s}{2} \right) \frac{l'_{r,s} + l''_{r+k,s}}{2},$$

mentre il coefficiente di  $y$  definisce il peso di tale valore.

Per ogni serie l'equazione normale relativa alla incognita  $x_s$  dà:

$$(18) \quad x_s = -\frac{h_s y}{2} + \frac{1}{h_s + 1} \sum_r^h \frac{l'_{r,s} + l''_{r+k,s}}{2},$$

dopo di che restano determinati i residui  $v_{r,s}$  e possono quindi essere scritte le equazioni (16).

Per la determinazione delle singole  $\Delta l_r$  si può poi procedere per successive approssimazioni, sommando membro a membro tutte quelle equazioni (16) che contengono una determinata incognita  $\Delta l_r$  avendo cura che essa figuri isolata al primo membro, sempre con segno positivo. Per  $r = 0, 1, 2, \dots, 12$ , si otterranno così 13 equazioni dalle quali si potrà trarre un primo valore di ciascuna incognita  $\Delta l_r$ , supponendo nulle tutte le altre. Un secondo valore si potrà poi ottenere dalle stesse equazioni, dando alle incognite del secondo membro i loro valori trovati in prima approssimazione e così via.

8. Un secondo modo di scegliere la circonferenza  $\gamma$  è quello di farla passare per tre determinati punti della curva  $c$  e precisamente per A, all'inizio della graduazione, per B, alla fine e per O, al centro. In tal caso deve essere:

$$\Delta l_0 = \Delta l_6 = \Delta l_{12} = 0$$

e l'insieme di tutte le 7 serie qui prese in considerazione dà origine a 49 equazioni con 18 incognite (le  $x_s$ , in numero di 7, la  $y$  e le  $\Delta l_r$ , in numero di 10).

La soluzione con il metodo dei minimi quadrati sarebbe laboriosissima, ma si può subito osservare che le equazioni (1.0) e (1.6) della prima serie contengono le sole incognite  $x_1, y$  che possono quindi essere determinate senz'altro. Le due stesse equazioni si possono ottenere anche dall'esecuzione della prima serie di osservazioni limitata a un solo spostamento della bolla dalla sua prima posizione all'ultima; per ottenerlo basterà dare alla vite micrometrica dell'esaminatore una rotazione che faccia variare l'inclinazione di  $6\mu$ . Questa breve operazione, ripetuta più volte, permette di ricavare l'incognita  $y$  (e quindi  $\sigma$ ) con notevole precisione.

Con opportune combinazioni di equazioni ricavate dalle due altre serie 2<sup>a</sup> ( $h_2 = 9, k_2 = 3$ ) e 3<sup>a</sup> ( $h_3 = 3, k_3 = 9$ ) possono poi essere ricavate  $x_2, x_3, \Delta l_3, \Delta l_9$ , oltre a un secondo valore di  $y$ ; analogamente dicasi per  $\Delta l_4, \Delta l_8$ , ricorrendo alle serie 4<sup>a</sup> ( $h_4 = 8, k_4 = 4$ ) e 5<sup>a</sup> ( $h_5 = 4, k_5 = 8$ ). Diventa poi sempre più semplice la determinazione delle rimanenti incognite. Ma è possibile ricorrere, anche in questo caso, dopo determinata la  $y$ , a un metodo di successive approssimazioni analoghe al caso precedente.

L'esperienza potrà suggerire, meglio di ulteriori indagini teoriche, quali debbano essere, caso per caso, le serie di osservazioni più proficue e i procedimenti di calcolo più semplici.

**Chimica.** — *Ricerche di spettrofotometria I. R. su alcuni complessi cianidrici del ferro (II e III), del cromo (III) e del manganese (I, II e III) (\*)*. Nota di VINCENZO CAGLIOTI, GUIDO SARTORI e MARISA SCROCCO, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Nel quadro delle nostre ricerche su complessi metallici abbiamo analizzato e interpretato lo spettro infrarosso dei seguenti cianuri complessi: ferro e ferricianuro, cromicianuro, cianuri complessi di manganese tri, bi, e monovalente.

I risultati sperimentali, che verranno presentati in Note singole, sono stati interpretati in una prima approssimazione col modello della « molecola

(\*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma e Centro di Chimica Generale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

isolata » considerando quindi i complessi come appartenenti tutti al gruppo di simmetria  $O_h$ , senza tener conto cioè, in questa prima approssimazione, della eliminazione di degenerescenza per effetto del campo cristallino.

Come è noto, per questo gruppo spaziale esistono solo quattro frequenze triplamente degeneri di specie  $F_{1u}$  attive in I.R., di cui due riferibili a vibrazioni di scheletro e due a vibrazioni proprie del gruppo C—N. Se si numerano queste frequenze progressivamente si possono indicare: col simbolo  $\nu_6$  la frequenza *stretching* C—N; col simbolo  $\nu_8$  la *stretching* Me—C e con  $\nu_7$  e  $\nu_9$  le due *bending*.

Non sempre queste quattro frequenze fondamentali sono identificabili senz'altro dallo spettro; per esempio Bonino e coll. <sup>(1)</sup> nel caso dello ione  $Fe(CN)_6^{4-}$  identificano solo la  $\nu_6$  a  $2041\text{ cm}^{-1}$  e la  $\nu_8$  a  $584\text{ cm}^{-1}$ , mentre le altre due non compaiono.

Talvolta però si può giungere alla determinazione almeno approssimata dei valori mancanti in base alle bande di combinazione tenendo conto delle regole di selezione che ne determinano l'attività in I.R.

Un ausilio prezioso in questo caso è dato dalla conoscenza delle frequenze Raman dello stesso sale o dagli spettri infrarosso e Raman di complessi analoghi.

Così nelle nostre assegnazioni ci siamo serviti dei dati sui corrispondenti carbonili (ad esempio cromo esacarbonile <sup>(2)</sup>), quando l'identica struttura spaziale giustifica l'ammissione di analogie formali fra i legami metallo-carbonio da un lato e carbonio-azoto o carbonio-ossigeno dall'altro.

Le nostre assegnazioni sarebbero quindi:

Complesso	struttura	$\nu_6$	$\nu_8$
$Fe(CN)_6^{4-}$	$d^6$	2047	584
$Fe(CN)_6^{3-}$	$d^5$	2125	505
$Cr(CN)_6^{3-}$	$d^3$	2135	462
$Mn(CN)_6^{3-}$	$d^4$	2125	514
$Mn(CN)_6^{4-}$	$d^5$	2060	—
$Mn(CN)_6^{5-}$	$d^6$	2048	—

#### DISCUSSIONE.

Iniziamo la discussione confrontando tra loro i due cianuri complessi del ferro. Passando dal ferrocianuro al ferricianuro si nota un deciso aumento della frequenza *stretching* C—N e una diminuzione delle frequenze *stretching* Me—C. Ovviamente ciò corrisponde a dire che passando dal complesso fer-

(1) « Ricerca Scient. », 26, 12, 3627 (1956).

(2) « Journ. Chem. Phys. », 23, 12, 2422 (1955).



roso al complesso ferrico cresce la costante di forza del legame C—N, mentre diminuisce la costante di forza del legame Me—C.

Questo risultato può essere facilmente interpretato.

Infatti come risulta dalla teoria del campo dei ligandi, per effetto del campo elettrico a simmetria cubica provocato dai sei gruppi  $\text{CN}^-$ , i cinque livelli  $d$  degeneri dello ione ferroso si suddividono, all'atto della formazione del complesso, in un gruppo  $d_{\varepsilon}$  comprendente i tre orbitali  $d_{xy} d_{xz} d_{yz}$  a energia inferiore e nel gruppo  $d_{\gamma}$  comprendente gli orbitali  $d_{z^2}, d_{x^2-y^2}$  a energia superiore. Quando l'interazione dei gruppi complessati è forte, gli elettroni dello ione metallico saturano i tre orbitali  $d_{\varepsilon}$ , mentre gli elettroni portati dai gruppi complessati occupano gli orbitali  $d_{\gamma}$ , 4  $s$  e 4  $p$ .

Dal punto di vista della teoria degli orbitali molecolari i tre livelli  $d_{\varepsilon}$  sono nella migliore posizione per formare legami  $\pi$  con opportuni orbitali del gruppo cianidrico; quindi nel ferrocianuro potassico, dato che il ferro possiede sei elettroni in  $d_{\varepsilon}$  il legame ferro carbonio è certamente parzialmente doppio, e di conseguenza, pure il legame carbonio azoto parzialmente doppio.

Se si considera che la vibrazione stretching del C—N nell'acido cianidrico <sup>(3)</sup> è a  $2213 \text{ cm}^{-1}$ , si comprende come il valore trovato a  $2047 \text{ cm}^{-1}$  dimostri la presenza nel complesso di un parziale doppio legame tra carbonio e azoto e quindi anche di un parziale doppio legame tra metallo e carbonio.

Passando al ferricianuro, lo ione ferrico possiede solamente cinque elettroni sui livelli  $d_{\varepsilon}$  e di conseguenza la sua capacità di dare doppi legami con i gruppi  $\text{CN}^-$  deve essere più limitata.

Ovviamente minore potere di dare doppi legami significa frequenza più bassa nel legame metallo carbonio e più alta nel legame carbonio azoto: infatti la  $\nu_8$  scende da 584 a  $505 \text{ cm}^{-1}$  e la  $\nu_6$  sale da 2047 a  $2125 \text{ cm}^{-1}$ . Resta pertanto dimostrato che la percentuale di doppio legame è maggiore nel ferrocianuro rispetto al ferricianuro.

Il cromo nel cromicianuro possiede solamente tre elettroni  $d_{\varepsilon}$ ; la sua suscettività magnetica inoltre dimostra che essi sono tutti disaccoppiati. Ne segue che la possibilità di ritrovare doppi legami è praticamente nulla; quindi  $\nu_6$  deve essere molto alto e  $\nu_8$  molto basso, come i risultati dimostrano.

Passando infine ai tre complessi del manganese, anche se non è possibile un confronto di questi tre sali con quelli di ferro e cromo, si può notare che nel manganese trivalente, ove sui livelli  $d_{\varepsilon}$  vi sono 4 elettroni di cui due disaccoppiati (come mostra la suscettività magnetica), la possibilità di dare doppi legami è molto piccola e quindi la frequenza C—N massima. Il manganese bivalente con 5 elettroni  $d_{\varepsilon}$  può dar luogo fino a due doppi legami e la frequenza pertanto è più bassa. Nel manganese monovalente con sei elettroni in  $d_{\varepsilon}$  si ha la possibilità di avere tre doppi legami e la frequenza è minima.

(3) « Journ. Chem. Phys. », 18, 155 (1950).

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi funzionale.** — *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionnelles linéaires continues.* Nota II di NICOLAE DINCULEANU, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

1. Soit  $Z$  un espace localement compact et  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $Z$ . Soit  $\mathcal{E} = (E(z))_{z \in Z}$  une famille d'espaces de Banach et  $\mathcal{E}' = (E'(z))_{z \in Z}$  la famille des duals. Désignons par  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x}(z)$  définis sur  $Z$  tels que  $\mathbf{x}(z) \in E(z)$  quel que soit  $z \in Z$ , et par  $\mathcal{C}(\mathcal{E}')$  l'ensemble des champs de fonctionnelles  $\mathbf{x}'(z)$  tels que  $\mathbf{x}'(z) \in E'(z)$  quel que soit  $z \in Z$ . Supposons qu'il existe une famille fondamentale  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})$  et une famille fondamentale  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  qui vérifient la condition:

(1) *Quels que soient  $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$  et  $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'$ , la fonction scalaire  $\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle$  est continue sur  $Z$ .*

Supposons encore que:

(2) *Il existe une partie dénombrable  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$  telle que l'ensemble  $\{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}_0\}$  est dense dans  $E(z)$ , quel que soit  $z \in Z$ .*

Désignons par  $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$  l'ensemble des champs de vecteurs mesurables (pour la famille fondamentale  $\mathcal{A}$ ) et par  $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^0$  l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$  tels que  $\{z \mid \mathbf{x}(z) \neq 0\}$  est contenu dans la réunion d'un ensemble négligeable et d'une suite d'ensembles compacts. (Définitions analogues pour les ensembles  $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}$  et  $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}'}^0$  formés de champs de fonctionnelles).

Soit  $\varphi$  une fonction numérique positive définie sur  $[0, \infty]$ , croissante, continue à gauche, vérifiant l'égalité  $\varphi(0) = 0$  et telle que  $0 < \varphi(t) < \infty$  quel que soit  $0 < t < \infty$ . Introduisons la fonction  $\psi$  (inverse de  $\varphi$ ) par  $\psi(0) = 0$  et  $\psi(s) = \sup \{t \mid \varphi(t) < s\}$  si  $s > 0$ . Considérons encore les fonc-

tions  $\Phi$  et  $\Psi$  définies sur  $[0, \infty]$  par les égalités  $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t) dt$  et  $\Psi(v) =$

$= \int_0^v \psi(s) ds$ . Désignons par  $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$  l'ensemble des champs de vecteurs mesurables  $\mathbf{x}$

tels que  $|\mathbf{x}|_{\Phi} = \int^* \Phi(\|\mathbf{x}(z)\|) d\mu(z) < \infty^{(1)}$  et par  $\mathcal{O}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$  l'ensemble des champs

de fonctionnelles mesurables  $\mathbf{x}'$  tels que  $|\mathbf{x}'|_{\Psi} = \int^* \Psi(\|\mathbf{x}'(z)\|) d\mu(z) < \infty$ .

(\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) Pour tout ce qui concerne l'intégration voir [1].

Pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$  posons  $\|\mathbf{x}\|_{\Phi} = \sup_{|\mathbf{x}'|_{\Psi} \leq 1} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d\mu(z)$  et

pour tout  $\mathbf{x}' \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$ , posons  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} = \sup_{|\mathbf{x}|_{\Phi} \leq 1} \int |\langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'(z) \rangle| d(z)$ .

L'espace d'Orlicz  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$  est l'ensemble des champs de vecteurs  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\circ}$  tels que  $\|\mathbf{x}'\|_{\Phi} < \infty$ ;  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$  est l'espace quotient  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}/\mathcal{N}$ , où  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des champs de vecteurs négligeables. Si  $\Psi(v) > 0$  pour  $v > 0$ , l'espace d'Orlicz  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$  est l'ensemble des champs de fonctionnelles  $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}'}^{\circ}$  tels que  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} < \infty$ ;  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$  est l'espace quotient  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}/\mathcal{N}'$ , où  $\mathcal{N}'$  est l'ensemble des champs de fonctionnelles négligeables. Si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$ , l'espace d'Orlicz  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$  est l'ensemble des champs de fonctionnelles  $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}'}^{\circ}$  tels que  $\|\mathbf{x}'\|_{\Psi} < \infty$ ;  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$  est l'espace quotient  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}/\mathcal{N}'_{\infty}$ , où  $\mathcal{N}'_{\infty}$  est l'ensemble des champs de fonctionnelles localement négligeables (voir [3]).

Dans ce qui suit on démontrera, sous l'hypothèse qu'il existe une constante  $M > 1$  telle que  $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$  pour  $u \geq 0$ , que pour toute forme linéaire continue  $f$  définie sur  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$  il existe un champ de fonctionnelles  $\mathbf{x}_f \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  tel que

$$f(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}_f(z) \rangle d\mu(z),$$

pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi}$ . Si  $\mathcal{A}'$  vérifie la condition (2), on peut choisir  $\mathbf{x}_f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$ . La démonstration repose sur un théorème de décomposition qui généralise certains résultats de J. von Neumann [10], R. Godement [5] et C. T. Ionescu Tulcea [6].

2. Soit  $\mathcal{F} = (F(z))_{z \in Z}$  une famille d'espaces de Banach et soit  $\mathcal{F}' = (F'(z))_{z \in Z}$  la famille des duals. Supposons qu'il existe une famille fondamentale  $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}(\mathcal{F})$  et une famille fondamentale  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{C}(\mathcal{F}')$  vérifiant la condition (1). Soient  $\varphi_1, \varphi_2$  deux fonctions définies sur  $[0, \infty]$  ayant les propriétés de la fonction

$\varphi$  considérée dans le numéro précédent et soient  $\Phi_1(u) = \int_0^u \varphi_1(s) ds$ ,  $\Phi_2(u) =$

$\int_0^u \varphi_2(s) ds$ ; considérons encore les fonctions  $\psi_1, \psi_2$  (inverses de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ ) et

soient  $\Psi_1(u) = \int_0^u \psi_1(s) ds$ ,  $\Psi_2(u) = \int_0^u \psi_2(s) ds$ .

Une application linéaire continue  $T$  de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$  dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$  est décomposable, si pour tout  $z \in Z$  il existe une application linéaire continue  $T(z)$  de  $E(z)$  dans  $F(z)$ , telle que  $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$  p. p., pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ . Pour tout  $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}^{\infty}$  désignons par  $U_f$  l'application  $\mathbf{x} \rightarrow f\mathbf{x}$  de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ ,  $[\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}]$  dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ ,  $[\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}]$ .

THÉOREME 1. - La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire continue  $T$  de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$  dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}$  soit décomposable est que <sup>(2)</sup> (\*)  $U_f T = T U_f$

(2) Plus exactement, pour tout  $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}^{\infty}$  et tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ ,  $U_f T\mathbf{x}(z) = T U_f \mathbf{x}(z)$  p. p.

pour tout  $f \in \mathcal{L}_C^\infty$ . Si  $T$  est décomposable et si  $\Phi_1 = \Phi_2$ , on a  $\|T\| =$  maximum en mesure de  $\|T(z)\|$ .

La condition (\*) est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons d'abord  $Z$  compact. Soit  $\mathfrak{D}$  l'ensemble des champs de vecteurs qui sont des combinaisons linéaires à coefficients rationnels complexes d'éléments de  $\mathfrak{A}_0$ , et pour chaque  $z \in Z$ , soit  $E_0(z) = \{\mathbf{x}(z) \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{D}\}$ . Pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi_1}$  soit  $\mathbf{x}^*$  un champ déterminé de  $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}^{\Phi_2}$  qui appartient à la même classe d'équivalence que  $T\mathbf{x}$ . Soient  $N(\lambda, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{z \mid (\lambda\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})^*(z) \neq \lambda\mathbf{x}^*(z) + \beta\mathbf{y}^*(z)\}$ , ( $\lambda, \beta$  rationnels  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{D}$ ),  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{z \mid \mathbf{x}(z) = \mathbf{y}(z)\} \cap \{z \mid \mathbf{x}^*(z) \neq \mathbf{y}^*(z)\}$ , ( $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{D}$ ) et  $N$  la réunion des  $N(\lambda, \beta, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  et des  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ;  $N$  est négligeable. Pour chaque  $x \in E_0(z)$ , ( $z \in CN$ ), posons  $T(z)x = x^*$ , où  $x^* = \mathbf{x}^*(z)$  si  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$  est tel que  $\mathbf{x}(z) = x$ ;  $T(z)$  est définie sans ambiguïté pour  $z \in CN$ , et est une application linéaire (sur le corps des nombres rationnels complexes) de  $E_0(z)$  dans  $F(z)$ . Si pour tout  $z \in N$  on pose  $T(z) = 0$ , alors pour tout  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$  on a  $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$  p. p. Nous allons montrer que pour presque tout  $z \in Z$ ,  $T(z)$  est continue. Pour cela, il est facile à voir qu'il suffit de montrer que la fonction  $g(z) = \sup \{\|T(z)x\| \mid x \in E_0(z), \|x\| \leq 1\} = \sup \{\|T(z)\mathbf{x}(z)\| \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{D}, \|\mathbf{x}(z)\| \leq 1\}$  est sommable, donc finie p. p. On peut prolonger alors  $T(z)$  par continuité à  $E(z)$ , et  $T(z)$  ainsi prolongée vérifie l'égalité  $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$  p. p. pour tout  $\mathbf{x}$  de la forme  $\sum f_i \mathbf{x}_i$ , ( $f_i \in \mathcal{L}_C^\infty$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{D}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ) et par suite pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathfrak{A}}^{\Phi_1}$  (3).

Montrons maintenant que  $g(z)$  est sommable. Soit  $0 < a < 1$  et pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$  soit  $B(\mathbf{x}) = \{z \mid \|T(z)\mathbf{x}(z)\| \geq ag_n(z), \|\mathbf{x}(z)\| \leq 1\}$  où  $g_n = \inf(g, n)$ , ( $n$  entier  $> 0$ ). Soit  $(A(\mathbf{x}))_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}}$  une famille de parties mesurables, deux à deux sans points communs, telles que  $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}} A(\mathbf{x}) = Z$  et  $A(\mathbf{x}) \subset B(\mathbf{x})$  quel que soit  $\mathbf{x} \in \mathfrak{D}$ . Posons  $\mathbf{u}(z) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}} \varphi_{A(\mathbf{x})}(z) \mathbf{x}(z)$ . Pour tout  $f \in \mathcal{L}_C^\infty$  on a:

$$\begin{aligned} \|T\| \cdot \|f\|_{\Phi_1} &\geq \|T\| \cdot \|f\mathbf{u}\|_{\Phi_1} \geq \|Tf\mathbf{u}\|_{\Phi_2} = \sup_{h \mid \Psi_2 \leq 1} \int \|Tf\mathbf{u}(z)\| \cdot |h(z)| d\mu(z) = \\ &= \sup_{h \mid \Psi_2 \leq 1} \int \|f(z)T(z)\mathbf{u}(z)\| \cdot |h(z)| d\mu(z) \geq \\ &\geq \sup_{h \mid \Psi_2 \leq 1} \int |f(z)| ag_n(z) |h(z)| d\mu(z) \end{aligned}$$

où les  $h$  sont des fonctions numériques  $\in \mathfrak{M}_C$  définies sur  $Z$ ;  $a$  et  $n$  étant arbitraires, on obtient

$$(3) \quad \|T\| \cdot \|f\|_{\Phi_1} \geq \sup_{h \mid \Psi_2 \leq 1} \int |f(z)| g(z) |h(z)| d\mu(z).$$

(3) Il suffit d'observer que tout champ continu est limite uniforme de champs de la forme  $\sum f_i \mathbf{x}_i$ , et que tout champ mesurable  $\mathbf{x}$  est de la forme  $\mathbf{x}(z) = \sum_{i=1}^\infty \mathbf{x}_n(z)$  p. p. où pour chaque  $n$ ,  $\mathbf{x}_n$  est continu sur un compact  $K_n$  et nul en dehors de  $K_n$ , les  $K_n$  étant disjoints deux à deux.



Si l'on prend  $h(z) \equiv p$ , où  $p > 0$  est tel que  $\mu(Z) \Psi_2(p) < 1$ , on a

$$(4) \quad \|T\| (|f|_{\Phi_1} + 1) \geq p \int |f(z)| g(z) d\mu(z)$$

car  $|h|_{\Psi_2} \leq 1$ ; si l'on prend  $f(z) \equiv q$ , où  $q > 0$  est tel que  $\mu(Z) \Phi_1(q) \leq 1$ , on a  $|f|_{\Phi_1} \leq 1$  et par suite  $2 \|T\| \geq pq \int g(z) d\mu(z)$ . Il en résulte que  $g(z)$  est sommable (car, évidemment,  $g$  est mesurable).

Supposons maintenant  $\Phi_1 = \Phi_2$ ; alors de (3) on déduit pour tout  $0 < a < 1$  et  $f \in \mathcal{L}_C^\infty$  non négligeable (on suppose  $\|T\| \neq 0$ ):

$$\sup_{|h|_{\Psi} \leq 1} \int |f(z)| \|T\| |h(z)| d\mu(z) > a \sup_{|h|_{\Psi} \leq 1} \int |f(z)| g(z) |h(z)| d\mu(z),$$

donc  $\sup_{|h|_{\Psi} \leq 1} \int |f(z)| (\|T\| - ag(z)) |h(z)| d\mu(z) > 0$ , et de cette dernière inégalité on déduit facilement que  $\|T\| \geq g(z)$  p. p. Par un calcul direct on déduit encore  $\|T\| \leq \text{maximum en mesure de } g(z)$ ; donc  $\|T\| = \text{maximum en mesure de } g(z)$ .

Considérons maintenant le cas  $Z$  localement compact. Pour chaque ensemble compact  $K \subset Z$ , désignons par  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}(K)$ ,  $[\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}(K)]$  le sous-espace de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ ,  $[\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}]$  formé des champs nuls p. p. en dehors de  $K$ , et par  $T_K$  la restriction de  $T$  à  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}(K)$ . D'après (\*) on peut supposer que  $T_K$  applique  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}(K)$  dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2}(K)$ . Il existe alors une famille  $(T_K(z))_{z \in K}$  d'applications linéaires continues des  $E(z)$  dans  $F(z)$  telles que  $T\mathbf{x}(z) = T_K(z)\mathbf{x}(z)$  p. p. sur  $K$ . Si  $K$  et  $K'$  sont deux ensembles compacts,  $T_K(z) = T_{K'}(z)$  p. p. sur  $K \cap K'$ , car la restriction  $\mathcal{A}_K$  de  $\mathcal{A}$  à  $K$  est une famille fondamentale sur  $K$  qui vérifie la condition (2). Il en résulte qu'il existe une famille  $(T(z))_{z \in Z}$  d'applications linéaires continues des  $E(z)$  dans  $F(z)$ , telle que pour tout compact  $K$ ,  $T(z) = T_K(z)$  p. p. sur  $K$ . On a alors  $T\mathbf{x}(z) = T(z)\mathbf{x}(z)$  p. p. pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ . Pour déduire l'évaluation de la norme dans le cas  $\Phi_1 = \Phi_2$ , il suffit de remarquer que  $\|T\| = \sup_K \|T_K\|$  et que *maximum en mesure de*  $\|T(z)\| = \sup_K (\text{maximum en mesure de } \|T_K(z)\|)$ .

*Remarques:* 1°. Dans le cas particulier où  $F(z) = \mathbb{C}$  pour tout  $z \in Z$ ,  $\mathcal{B}$  est l'ensemble des fonctions complexes continues définies sur  $Z$ , et  $\Phi_2(u) = u$ ,  $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{\Phi_2} = \mathcal{L}_C^1$ . La famille  $\mathbf{T}' = (T(z))_{z \in Z}$  est alors un champ de fonctionnelles, donc  $\mathbf{T}' \in \mathcal{C}(\mathcal{S}')$ . Pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^{\Phi_1}$ , la fonction scalaire  $\langle \mathbf{x}(z), T(z) \rangle$  est mesurable car  $T\mathbf{x}(z) \in \mathcal{L}_C^1$ . Nous allons montrer qu'on a dans ce cas

$$(5) \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{T}'\|_{\Psi} \leq \|T\| \leq \|\mathbf{T}'\|_{\Psi}.$$

En effet, si  $\Phi_2(u) = u$ , on a  $\Psi_2(v) = 0$  pour  $v \leq 1$  et  $\Psi_2(v) = \infty$  pour  $v > 1$ ; donc  $|h|_{\Psi_2} < \infty$  implique  $|h(z)| \leq 1$  p. p. et par suite  $|h|_{\Psi_2} = 0$ .

La formule (4) pour  $Z$  compact et  $h(z) \equiv p = 1$  donne  $\|T\| \left( \int \Phi(|f(z)|) d\mu(z) + 1 \right) \geq \int |f(z)| g(z) d\mu(z)$ ; si  $|f|_{\Phi} \leq 1$  on obtient

$$2 \|T\| \geq \sup_{|f|_{\Phi} \leq 1} \int |f(z)| g(z) d\mu(z) = \|g\|_{\Psi},$$

c'est-à-dire  $\frac{1}{2} \|\mathbf{T}'\|_{\Psi} \leq \|T\|$ ; par un calcul direct on démontre qu'on a aussi  $\|T\| \leq \|\mathbf{T}'\|_{\Psi}$ . Les relations (5), pour  $Z$  localement compact se déduisent aussitôt si l'on observe que  $\|T\| = \sup_K \|T_K\|$  et  $\|\mathbf{T}'\|_{\Psi} = \sup_K \|\mathbf{T}'_K\|_{\Psi}$ .

2° Si la famille fondamentale  $\mathcal{A}'$  vérifie la condition (2),  $\mathbf{T}'$  est mesurable. Soit  $\mathcal{A}'_0$  une partie dénombrable de  $\mathcal{A}'$  telle que  $\{\mathbf{x}'(z) \mid \mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0\}$  soit dense dans  $E'(z)$ , quel que soit  $z \in Z$ . Soit  $K$  un ensemble compact et pour chaque  $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0$  soit l'ensemble mesurable  $B(\mathbf{x}') = \{z \mid \|\mathbf{x}'(z) - T(z)\| \leq \varepsilon\} \cap K$ . Alors  $\bigcup_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0} B(\mathbf{x}') = K$ . Soit  $(A(\mathbf{x}'))_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0}$  une famille de parties mesurables, deux à deux sans points communs, telles que  $\bigcup_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0} A(\mathbf{x}') = K$  et  $A(\mathbf{x}') \subset B(\mathbf{x}')$

quel que soit  $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0$ . Soit  $\mathbf{y}'(z) = \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{A}'_0} \varphi_{A(\mathbf{x}')} (z) \mathbf{x}'(z)$ ;  $\mathbf{y}'(z)$  est mesurable et  $\|\mathbf{y}'(z) - T(z)\| \leq \varepsilon$  pour chaque  $z \in K$ . Il en résulte que  $\mathbf{T}'$  est mesurable comme limite uniforme sur chaque compact, de champs mesurables. Bien plus, si  $\mathcal{A}'$  vérifie la condition (2) et si  $\Psi(v) = 0$  pour un  $v_0 > 0$ , alors  $\mathbf{T}' \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$ ; si  $\Psi(v) > 0$  pour  $v > 0$  on déduit de l'inégalité  $\|\mathbf{T}'\|_{\Psi} < \infty$ , que  $T(z) = 0$  localement p. p. en dehors d'une réunion dénombrable d'ensembles compacts, donc, si l'on modifie convenablement  $T(z)$  sur un ensemble localement négligeable,  $\mathbf{T}' \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}'}^{\circ}$  et par suite  $\mathbf{T}' \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$ .

3° Si  $\Phi_1(u) = u^p/p$ ,  $\Phi_2(u) = u^q/q$  et si  $1 \leq q \leq p$ , C. T. Ionescu Tulcea [6] a montré qu'il existe une famille  $(T(z))_{z \in Z}$  telle que  $(^{**}) T\mathbf{x}(z) = T(z) \mathbf{x}(z)$  p. p. pour  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Phi_1}$  et  $\|T\| = \left( \int \|T(z)\|_{p/q/(p-q)}^p d\mu(z) \right)^{(p-q)/pq}$ , si l'on prend  $\|T\| = \sup \{\|T\mathbf{x}\|_q \mid \|\mathbf{x}\|_p \leq 1\}$ . Remarquons que toute autre famille vérifiant l'égalité  $(^{**})$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Phi_1}$  coïncide avec  $(T(z))_{z \in Z}$  localement p. p., et par suite p. p. si  $Z$  est dénombrable à l'infini ou plus généralement, réunion dénombrable d'ensembles de mesure finie.

3. Démontrons maintenant le théorème de représentation.

THÉORÈME 2. — *S'il existe une constante  $M > 1$  telle que  $\Phi(2u) \leq M\Phi(u)$ , ( $u \geq 0$ ), pour toute fonctionnelle linéaire continue  $f$  définie sur  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Phi}$  il existe un champ de fonctionnelles  $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  tel que*

$$(6) \quad f(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_f(z) \rangle d\mu(z)$$

pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Phi}$ , et  $\frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_f\|_{\Psi} \leq \|f\| \leq \|\mathbf{x}'_f\|_{\Psi}$ . Si  $\mathcal{A}'$  vérifie la condition (2) on a  $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^{\Psi}$ .

Supposons d'abord  $Z$  compact. Soit  $\mathbf{x}$  un champ de vecteurs borné; pour chaque ensemble mesurable  $A \subset Z$  posons  $\nu_{\mathbf{x}}(A) = f(\varphi_A \mathbf{x})$ ;  $\nu_{\mathbf{x}}$  est une fonction d'ensemble, à valeurs complexes, complètement additive et de base  $\mu$ . Il existe une fonction complexe intégrable  $T\mathbf{x}(z)$ , telle que

$$\nu_{\mathbf{x}}(g) = \int T\mathbf{x}(z) g(z) d\mu(z) = f(g\mathbf{x}).$$

On déduit facilement que  $T(\lambda\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \lambda T\mathbf{x} + \beta T\mathbf{y}$ , ( $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  bornés), et  $T(h\mathbf{x}) = h T\mathbf{x}$  (p. p.) pour tout  $h \in \mathcal{L}_C^\infty$ . Pour  $g(z) = \overline{T\mathbf{x}(z)}/|T\mathbf{x}(z)|$  on obtient  $\|T\mathbf{x}\| \leq \|f\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\Phi$ ; donc  $T\mathbf{x}$  est continue sur l'ensemble des  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$  bornés, et cet ensemble étant dense dans  $\mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$ , on peut prolonger  $T$  d'une manière unique comme application linéaire continue de  $\mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$  dans  $\mathcal{L}_C^1$ , vérifiant  $\|T\mathbf{x}\| \leq \|f\| \cdot \|\mathbf{x}\|_\Phi$ . D'après le théorème 1, il existe un champ  $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  tel que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$

$$(7) \quad T\mathbf{x}(z) = \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_f(z) \rangle \quad \text{p. p. et} \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi \leq \|T\| \leq \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi.$$

Pour tout  $\mathbf{x}$  borné on a

$$(8) \quad f(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_f(z) \rangle d\mu(z)$$

et on constate facilement que l'égalité reste encore vraie pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$ . De (8) on déduit  $\|f\| \leq \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi$ , et comme  $\|T\| \leq \|f\|$ , on déduit de (7),  $\frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi \leq \|f\| \leq \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi$ .

Considérons le cas  $Z$  localement compact. D'après ce qui précède, pour chaque ensemble compact  $K \subset Z$ , il existe un champ de fonctionnelles  $\mathbf{x}'_K \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  (nul en dehors de  $K$ ) tel que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$ ,

$$f(\varphi_K \mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_K(z) \rangle d\mu(z), \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_K\|_\Psi \leq \|f_K\| \leq \|\mathbf{x}'_K\|_\Psi$$

où  $f_K$  est la restriction de  $f$  à  $\mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi(K)$ . Pour deux ensembles compacts  $K$  et  $K'$  on a  $\mathbf{x}'_K(z) = \mathbf{x}'_{K'}(z)$  p. p. sur  $K \cap K'$ , car la restriction de  $\mathcal{A}$  à  $K \cap K'$  est une famille fondamentale sur  $K \cap K'$  qui vérifie la condition (2). Il existe donc un champ  $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{C}(\mathcal{E}')$  tel que pour tout compact  $K \subset Z$ ,  $\mathbf{x}'_f$  coïncide avec  $\mathbf{x}'_K$  p. p. sur  $K$ , et tel que  $f(\mathbf{x}) = \int \langle \mathbf{x}(z), \mathbf{x}'_f(z) \rangle d\mu(z)$  pour chaque  $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi$  (car  $\mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\mathcal{A}^\Phi)$ ). Enfin, comme  $\|f\| = \sup_K \|f_K\|$  et  $\|\mathbf{x}'_f\|_\Psi = \sup_K \|\mathbf{x}'_K\|_\Psi$ , on déduit  $\frac{1}{2} \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi \leq \|f\| \leq \|\mathbf{x}'_f\|_\Psi$ . Si  $\mathcal{A}'$  vérifie la condition (2), on a  $\mathbf{x}'_f \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}'}^\Psi$ , en modifiant convenablement  $\mathbf{x}'_f$  sur un ensemble localement négligeable.

*Remarques:* 1° Si  $\Phi$  ne vérifie pas la condition  $\Phi(2u) \leq M \Phi(u)$ , Krasnoselski et Rutitzki [7] ont montré qu'il existe des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{L}_C^\Phi$  qui n'admettent pas une représentation intégrable; dans ce cas, le théorème 2 reste valable si au lieu de  $\mathcal{L}_A^\Phi$  on considère l'adhérence dans  $\mathcal{L}_A^\Phi$  de l'ensemble des champs bornés.

2° En connexion avec le théorème 2, mentionnons encore les articles [2], [4], [5], [8], [9], [11], [12].

*Rectification.* Dans [3] (après la définition 2), on doit préciser que si  $\Psi(v) > 0$  pour  $v > 0$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_A$  on a l'égalité

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_{|\mathbf{x}'|_\Psi \leq 1} \int^* \|\mathbf{x}(z)\| \|\mathbf{x}'(z)\| d\mu(z).$$

Si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$ , cette égalité est vraie si  $\|\mathbf{x}\|_\Phi = \infty$ ; si  $\|\mathbf{x}\|_\Phi < \infty$  on a

$$\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup \left\{ \int^* \|\mathbf{x}(z)\| \|\mathbf{x}'(z)\| d\mu(z) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{N}_A^\circ, |\mathbf{x}'|_\Psi \leq 1 \right\}.$$

Si  $\Psi(v_0) = 0$  pour un  $v_0 > 0$ , l'égalité  $\|\mathbf{x}\|_\Phi = \sup_K \|\mathbf{x}_K\|_\Phi$  est valable si  $\|\mathbf{x}\|_\Phi < \infty$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI, *Intégration*, livre VI, chap. I-IV, Paris, 1952.
- [2] J. DIEUDONNÉ, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym*, « Can. J. Math. », 3, pp. 129-140 (1951).
- [3] N. DINCULEANU, *Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs*, Nota I, « Rend. Accad. Lincei », XXII, fasc. 2, pp. 135-139 (1957).
- [4] H. W. ELLIS and ISRAEL HALPERIN, *Function spaces determined by a levelling length function*, « Can. J. Math. », 5, pp. 576-529 (1953).
- [5] R. GODEMENT, *Sur la théorie des représentations unitaires*, « Annals of Math. », 53, pp. 68-124 (1951).
- [6] C. T. IONESCU TULCEA, *Deux théorèmes concernant certains espaces de champs de vecteurs*, « Bul. Sc. Math. », 79, pp. 106-111 (1955).
- [7] M. A. KRASNOSELSKI et I. A. B. RUTITZKI, *Fonctionnelles linéaires dans les espaces d'Orlicz*, « D. A. N. », 97, No. 4, pp. 581-584 (1954).
- [8] G. G. LORENTZ and D. G. WERTHEIM, *Representation of linear functionals on Köthe spaces*, « Can. J. Mat. », 5, pp. 568-575 (1953).
- [9] W. A. LUXEMBURG et A. C. ZAAENEN, *Conjugate spaces of Orlicz spaces*, « Indagationes Math. », 181, pp. 217-228 (1956).
- [10] J. VON NEUMANN, *On rings of operators. Reduction Theory*, « Annals of Math. », 50, pp. 401-485 (1949).
- [11] I. A. B. RUTITZKI, *Sur une propriété des opérateurs intégraux linéaires complètement continus dans les espaces d'Orlicz*, « Uspehi Mat. Nauk », 56, (2, 68), pp. 201-208.
- [12] A. C. ZAAENEN, a) *Linear analysis*, New York-Amsterdam 1953; b) *On a certain class of Banach spaces*, « Annals of Math. », 47, pp. 654-666 (1946); c) *Note on a certain class of Banach Spaces*, « Indagationes Math. », 11, pp. 148-158 (1949).



**Analisi matematica.** — *Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali* <sup>(\*)</sup>. Nota I di ALDO GHIZZETTI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

1. Sia  $\mathcal{E}$  un operatore differenziale lineare alle derivate parziali, di ordine  $n \geq 2$ , in due variabili indipendenti  $x, y$ . Considerato l'integrale doppio

$$(I, I) \quad \Phi(u) = \iint_T \mathcal{E}(u) \, dx \, dy,$$

ove  $u$  è un'arbitraria funzione di classe  $C^n$  e  $T$  un fissato dominio regolare del piano  $xy$ , si pone il problema seguente <sup>(1)</sup>: cercare sotto quali condizioni (per il dominio  $T$  e per l'operatore  $\mathcal{E}$ ) l'integrale  $\Phi(u)$  dipende esclusivamente dai valori assunti dalla funzione  $u$  e dalle sue derivate parziali fino all'ordine  $n-2$  nei punti angolari della frontiera  $\mathcal{F}T$  di  $T$ . Diremo brevemente che cerchiamo le condizioni affinché  $\Phi(u)$  sia un funzionale *puntuale*.

In questa Nota ed in una successiva, con lo stesso titolo, questo problema viene studiato e risolto nei casi  $n=2$ ,  $n=3$ .

Sotto opportune ipotesi qualitative per i coefficienti che figurano in  $\mathcal{E}$  e per la  $\mathcal{F}T$ , saranno scritte dapprima le condizioni necessarie e sufficienti affinché  $\Phi(u)$  sia puntuale (vedi n. 2). Una di queste condizioni esprime che:

I. — *La frontiera  $\mathcal{F}T$  del dominio  $T$  deve essere costituita da curve caratteristiche dell'operatore  $\mathcal{E}$ .*

Le altre condizioni non sono molto espressive se si richiede che esse valgano soltanto per *un* particolare dominio  $T$  limitato da caratteristiche; lo diventano invece se si impone che esse valgano per *tutti* i domini  $T$  limitati da caratteristiche o almeno per una parte di essi.

Da questo punto di vista e dopo aver introdotto una semplificazione (vedi n. 3), lo studio delle condizioni ottenute sarà proseguito nei seguenti casi:

*Caso I:* l'operatore  $\mathcal{E}$  è di 2° ordine e di tipo iperbolico; si richiede che  $\Phi(u)$  sia puntuale per ogni dominio  $T$  limitato da curve appartenenti ai due sistemi di caratteristiche (vedi n. 4);

*Caso II:* l'operatore  $\mathcal{E}$  è di 3° ordine e da ogni punto escono due direzioni caratteristiche reali e distinte, una doppia e una semplice; si richiede che  $\Phi(u)$  sia puntuale per ogni dominio  $T$  limitato da curve appartenenti ai due sistemi di caratteristiche (vedi n. 5);

*Caso III:* l'operatore  $\mathcal{E}$  è di 3° ordine e da ogni punto escono tre direzioni caratteristiche reali e distinte; si richiede che  $\Phi(u)$  sia puntuale per

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) Questo problema è stato incontrato nella costruzione di una teoria generale delle formule di cubatura, che sarà esposta in altro lavoro.

ogni dominio  $T$  limitato da curve appartenenti a due prefissati dei tre sistemi di caratteristiche (*Sottocaso III'*; vedi n. 6), oppure per ogni dominio  $T$  limitato da curve appartenenti a tutti e tre i sistemi di caratteristiche (*Sottocaso III''*; vedi n. 7).

I risultati a cui si perverrà possono essere riassunti nel seguente enunciato:

II. — *Tutte e sole le soluzioni del problema posto nei tre casi sopra menzionati possono dedursi dai seguenti esempi elementari:*

$$(I, 2) \quad \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy = u(x_0, x_0) - u(x_1, y_0) + u(x_1, y_1) - u(x_0, y_1),$$

[per il caso I];

$$(I, 3) \quad \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}(u)}{\partial x \partial y} dx dy = [\mathfrak{G}(u)]_{(x_0, y_0)} - [\mathfrak{G}(u)]_{(x_1, y_0)} + [\mathfrak{G}(u)]_{(x_1, y_1)} - [\mathfrak{G}(u)]_{(x_0, y_1)},$$

$$\text{con } \mathfrak{G} = \alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \gamma(x, y),$$

[per il caso II ( $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ) e per il sottocaso III' ( $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ )];

$$(I, 4) \quad \int_T \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) dx dy = [u_x - u_y]_{(x_0, y_0)} + [u_y]_{(c - y_0, y_0)} - [u_x]_{(x_0, c - x_0)},$$

ove  $T$  è il triangolo di vertici  $(x_0, y_0)$ ,  $(c - y_0, y_0)$ ,  $(x_0, c - x_0)$

[per il sottocaso III''];

eseguendo un cambiamento delle variabili (di classe  $C^2$  o  $C^3$ ) e, nel caso di (I, 2) e (I, 4), cambiando  $u$  in  $\theta u$ , con  $\theta$  funzione arbitraria (di classe  $C^2$  o  $C^3$ ).

2. Poniamo

$$\mathfrak{G} = a \frac{\partial^3}{\partial x^3} + b \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + c \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + d \frac{\partial^3}{\partial y^3} + l \frac{\partial^2}{\partial x^2} +$$

$$+ m \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + n \frac{\partial^2}{\partial y^2} + p \frac{\partial}{\partial x} + q \frac{\partial}{\partial y} + r,$$

e supponiamo che, in un certo campo connesso  $\Gamma$  del piano  $xy$ , i coefficienti  $a, b, c, d$  siano di classe  $C^3$ ;  $l, m, n$  di classe  $C^2$ ;  $p, q$ , di classe  $C^1$ ;  $r$  di classe  $C^0$ . Con le posizioni

$$A = a, \quad B = \frac{1}{2}b, \quad C = \frac{1}{2}c, \quad D = d,$$

$$L = l - a_x - \frac{1}{2}b_y, \quad M = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{2}b_x - \frac{1}{2}c_y\right), \quad N = n - \frac{1}{2}c_x - d_y,$$

$$P = p - l_x - \frac{1}{2}m_y + a_{xx} + \frac{3}{4}b_{xy} + \frac{1}{4}c_{yy}, \quad Q = q - \frac{1}{2}m_x - n_y + \frac{1}{4}b_{xx} + \frac{3}{4}c_{xy} + d_{yy},$$

$$R = r - p_x - q_y + l_{xx} + m_{xy} + n_{yy} - a_{xxx} - b_{xxy} - c_{xyy} - d_{yyy},$$

si può scrivere

$$(2,1) \quad \mathcal{E}(u) = \frac{\partial}{\partial x} (Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Lu_x + Mu_y + Pu) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (Bu_{xx} + Cu_{xy} + Du_{yy} + Mu_x + Nu_y + Qu) + Ru,$$

con  $A, B, C, D$  di classe  $C^3$ ;  $L, M, N$  di classe  $C^2$ ;  $P, Q$ , di classe  $C^1$ ;  $R$  di classe  $C^0$ . Ne segue che la  $(I, I)$  può essere trasformata nel modo seguente

$$(2,2) \quad \Phi(u) = \int_{\mathcal{FT}} [(Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Lu_x + Mu_y + Pu) y' - \\ - (Bu_{xx} + Cu_{xy} + Du_{yy} + Mu_x + Nu_y + Qu) x'] ds + \iint_T Ru \, dx \, dy,$$

ove  $s$  è l'arco di  $\mathcal{FT}$  (orientato nel modo consueto) e l'apice indica derivazione rispetto a  $s$ .

Indichiamo con  $\nu$  la normale a  $\mathcal{FT}$  orientata verso l'interno di  $T$  [di coseni direttori  $-y'(s), x'(s)$ ], con  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  le porzioni di curva regolare che costituiscono  $\mathcal{FT}$  e con  $P_i, Q_i$  i punti estremi di  $\gamma_i$ . Supposto che  $\gamma_i$  sia di classe  $C^3$ , eseguiamo nell'intorno di essa un cambiamento delle variabili  $x, y$  in altre variabili  $s, \nu$  mediante le formule

$$x = x(s) - \nu y'(s), \quad y = y(s) + \nu x'(s).$$

Si trova allora che nei punti di  $\gamma_i$  (cioè per  $\nu = 0$ ) valgono le formule seguenti

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial s} x' - \frac{\partial u}{\partial \nu} y', \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial s} y' + \frac{\partial u}{\partial \nu} x', \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} x'^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \nu} x' y' + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} y'^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial s} x' y' \gamma - \frac{\partial u}{\partial \nu} x'^2 \gamma, \\ u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} x' y' + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \nu} (x'^2 - y'^2) - \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} x' y' + \frac{\partial u}{\partial s} (x'^2 - y'^2) \gamma - \frac{\partial u}{\partial \nu} x' y' \gamma, \\ u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} y'^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \nu} x' y' + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} x'^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial s} x' y' \gamma - \frac{\partial u}{\partial \nu} y'^2 \gamma,$$

ove  $\gamma$  denota la curvatura (con segno) di  $\gamma_i$ , definita dalle  $x' = -\gamma y'$ ,  $y'' = \gamma x'$ . Perciò, sostituendo in (2,2), risulta

$$(2,3) \quad \Phi(u) = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \left[ E \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + F \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \nu} + G \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + (H + \gamma F) \frac{\partial u}{\partial s} + \right. \\ \left. + (K - \gamma E) \frac{\partial u}{\partial \nu} + Iu \right] ds + \iint_T Ru \, dx \, dy,$$

ove si è posto:

$$(2,4) \quad E = Cy'^3 + (B - D) x' y'^2 + (A - C) x'^2 y' - Bx'^3,$$

$$(2,5) \quad F = -By'^3 + (3C - 2A) x' y'^2 + (3B - 2D) x'^2 y' - Cx'^3,$$

$$(2, 6) \quad G = Ay'^3 - 2Bx'y'^2 + 2Cx'^2y' - Dx'^3,$$

$$(2, 7) \quad H = My'^2 + (L - N)x'y' - Mx'^2,$$

$$(2, 8) \quad K = -Ly'^2 + 2Mx'y' - Nx'^2,$$

$$(2, 9) \quad I = Py' - Qx'.$$

Trasformando poi il secondo membro di (2,3) con delle integrazioni per parti, si ottiene

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^k \left[ E \frac{\partial u}{\partial s} + F \frac{\partial u}{\partial v} - \left( \frac{\partial E}{\partial s} - \gamma F - H \right) u \right]_{P_i}^{Q_i} + \\ + \int_{\mathfrak{T}} \left[ G \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - \left( \frac{\partial F}{\partial s} + \gamma E - K \right) \frac{\partial u}{\partial v} + \left( \frac{\partial^2 E}{\partial s^2} - \frac{\partial (\gamma F + H)}{\partial s} + I \right) u \right] ds + \int_{\mathfrak{T}} Ru \, dx \, dy.$$

Da questa formula risulta ovviamente:

I. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché  $\Phi(u)$  sia un funzionale puntuale è il sussistere delle*

$$(2, 10) \quad R = 0, \quad (\text{in } T),$$

$$(2, 11) \quad G = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial s} + \gamma E - K = 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial s^2} - \frac{\partial (\gamma F + H)}{\partial s} + I = 0, \quad (\text{su } \mathfrak{T}).$$

*Nel caso che  $\mathfrak{E}$  sia di 2° ordine <sup>(2)</sup> le (2,11) vanno sostituite dalle*

$$(2, 12) \quad K = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial s} - I = 0.$$

Tenuto conto di (2,6) [o di (2,8)], la prima delle (2,11) [o delle (2,12)] esprime manifestamente che sussiste il teorema I del n. 1.

3. Proseguendo ora la ricerca secondo il programma indicato nel n. 1, si va incontro a calcoli assai complicati e perciò conviene introdurre una semplificazione.

Restringendo eventualmente il campo  $\Gamma$ , possiamo, con un cambiamento di variabili

$$(3, 1) \quad x_1 = x_1(x, y), \quad y_1 = y_1(x, y),$$

ove le funzioni indicate sono di classe  $C^3$  [oppure  $C^2$ ] e verificano la

$$(3, 2) \quad J(x, y) = \frac{\partial (x_1, y_1)}{\partial (x, y)} \neq 0,$$

trasformare biunivocamente i due, oppure due dei tre, sistemi di caratteristiche del piano  $xy$  nei due sistemi di rette  $x_1 = \text{cost}$ ,  $y_1 = \text{cost}$  del piano  $x_1 y_1$ . Con ciò l'operatore  $\mathfrak{E}$  si trasforma in un certo operatore  $\mathfrak{E}_1$  e si avrà

$$\Phi(u) = \iint_{\mathfrak{T}_1} \frac{1}{|J|} \mathfrak{E}_1(u) \, dx_1 \, dy_1,$$

(2) Cioè nel caso in cui  $A, B, C, D$  (e quindi  $E, F, G$ ) sono identicamente nulli. Si noti che basta allora supporre le  $\gamma_i$  di classe  $C^2$ .



ove  $T_1$  è il dominio corrispondente di  $T$ . Posto poi  $\frac{1}{|J|} \mathcal{E}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1$ , si potrà scrivere

$$(3, 3) \quad \Phi(u) = \iint_{T_1} \bar{\mathcal{E}}_1(u) dx_1 dy_1.$$

Questo operatore  $\bar{\mathcal{E}}_1$  può mettersi sotto la forma analoga alla (2,1) e siccome per esso due sistemi di caratteristiche coincidono con le parallele agli assi  $x_1, y_1$ , si avrà, nel caso del 3° ordine, una formula del tipo

$$(3, 4) \quad \bar{\mathcal{E}}_1(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} (B_1 u_{x_1 y_1} + C_1 u_{y_1 y_1} + L_1 u_{x_1} + M_1 u_{y_1} + P_1 u) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} (B_1 u_{x_1 x_1} + C_1 u_{x_1 y_1} + M_1 u_{x_1} + N_1 u_{y_1} + Q_1 u) + R_1 u,$$

e nel caso del 2° ordine

$$(3, 5) \quad \mathcal{E}_1(u) = \frac{\partial}{\partial x_1} (M_1 u_{y_1} + P_1 u) + \frac{\partial}{\partial y_1} (M_1 u_{x_1} + Q_1 u) + R_1 u.$$

Per la (2,10) applicata all'integrale (3,3) e per l'arbitrarietà di  $T_1$  (racchiuso da curve caratteristiche) deve intanto essere identicamente

$$(3, 6) \quad R_1 = 0.$$

Supposto ora di aver individuato, fra i particolari operatori  $\bar{\mathcal{E}}_1$  del tipo (3,4) o (3,5) [con la condizione 3,6)], quelli che risolvono i problemi posti al n. 1, si potrà dire che tutti gli altri  $\mathcal{E}$  saranno deducibili da essi con un arbitrario cambiamento delle variabili  $x_1, y_1$  in altre  $x, y$ , nel senso che, detto  $\bar{\mathcal{E}}$  il trasformato di  $\bar{\mathcal{E}}_1$  (e sarà  $\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{|J|} \mathcal{E}$ ), risulta  $\mathcal{E} = |J| \bar{\mathcal{E}}$ .

Resta dunque stabilito quanto segue:

I. - *Nelle ipotesi poste, possiamo limitare il nostro studio, considerando soltanto operatori  $\mathcal{E}$  definiti da formule del tipo*

$$(3, 7) \quad \mathcal{E}(u) = \frac{\partial}{\partial x} (Mu_y + Pu) + \frac{\partial}{\partial y} (Mu_x + Qu),$$

$$(3, 8) \quad \mathcal{E}(u) = \frac{\partial}{\partial x} (Bu_{xy} + Cu_{yy} + Lu_x + Mu_y + Pu) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (Bu_{xx} + Cu_{xy} + Mu_x + Nu_y + Qu).$$

*Dalle soluzioni  $\mathcal{E}$  ottenute in questo caso particolare si otterranno tutte le altre, trasformando  $\mathcal{E}$  con un omeomorfismo (rispettivamente di classe  $C^2$  o  $C^3$ ) e moltiplicando il trasformato ottenuto per il modulo del jacobiano delle  $x, y$  rispetto alle nuove variabili.*

4. Studiamo ora il caso I del n. 1, partendo dalla (3,7) ove bisogna supporre  $M \neq 0$  in  $\Gamma$ . Dobbiamo ancora imporre che la seconda delle (2,12) sia soddisfatta lungo ogni retta  $x = \text{cost.}$  e lungo ogni retta  $y = \text{cost.}$

Tenuto conto delle formule generali del n. 2 che qui bisogna applicare con  $A = B = C = D = L = N = O$ , la (2,7) fornisce  $H = M(y'^2 - x'^2)$ , cosicch , ricordando anche la (2,9), la seconda delle (2,12) diventa

$$(4, 1) \quad \frac{\partial H}{\partial s} - I = \frac{\partial}{\partial s} [M(y'^2 - x'^2)] - (Py' - Qx') = 0.$$

Su una  $x = \text{cost.}$  si ha  $x' = 0$ ,  $y' = \varepsilon^{(3)}$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}$  e perci  la (4,1) diventa  $\varepsilon \frac{\partial M}{\partial y} - \varepsilon P = 0$ , ossia

$$(4, 2) \quad P = M_y.$$

Su una  $y = \text{cost.}$  si ha  $x' = \varepsilon$ ,  $y' = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$  e la (4,1) si scrive  $-\varepsilon \frac{\partial M}{\partial x} + \varepsilon Q = 0$ , ossia

$$(4, 3) \quad Q = M_x.$$

Siccome la (4,1) deve valere su ogni retta  $x = \text{cost.}$  e su ogni retta  $y = \text{cost.}$  si deduce che in tutto  $\Gamma$  devono sussistere le (4,2), (4,3), onde, sostituendo in (3,7), si conclude che

$$\mathcal{E}(u) = \frac{\partial}{\partial x} (Mu_y + M_y u) + \frac{\partial}{\partial y} (Mu_x + M_x u) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\theta u), \quad (\theta = 2M).$$

Resta cos  dimostrata la prima parte del teorema II del n. 1 [vedi la (1,2)].

  da osservare che una formula analoga alla (1,2) vale anche se il dominio di integrazione non   un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati, ma un arbitrario plurirettangolo limitato da rette  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$

Lo studio dei casi II, III', III'' sar  esposto nella Nota II.

**Econometrica.** — *Sulla dinamica economica.* Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Presentiamo qui un breve cenno di alcune nostre considerazioni sulla dinamica di un'economia le cui attivit  produttive siano ripartite in  $n$  settori. Le osservazioni del n. 2 interessano principalmente le economie competitive in equilibrio; quelle dei nn. 3-5 riguardano soprattutto le economie pianificabili <sup>(1)</sup>.

1. Le attivit  produttive di merci e servizi di un'economia  $E$  siano ripartite in  $n > 1$  settori 1, 2, ...,  $n$ , dei quali  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sono le produzioni totali nell'intervallo di tempo  $(0, t)$ ;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sono i rispettivi prezzi di

(3) Qui e nel seguito scriveremo sempre  $\varepsilon$  in luogo di  $\pm 1$ .

(\*) Nella seduta del 9 marzo 1956.

(1) « Pianificare »   per noi soprattutto « prevedere per un periodo non troppo breve di tempo ».

costo (al tempo  $t$ ) ed  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  le parti di esse destinate al consumo. Indichiamo con  $\mathbf{a} = [a_{rs}]$  la matrice dei coefficienti (tecnici o) di scambio ( $r, s = 1, 2, \dots, n$ ), cioè poniamo che la produzione del settore  $r$  acquistata da  $s$  sia  $x_{rs} = a_{rs} X_s$ ; e sia  $x_{n+1,s}$ , la forza-lavoro impiegata in  $s$ ,  $X_{n+1} = \sum_s x_{n+1,s}$ , quella totale impiegata in E nell'intervallo  $(0, t)$ . Sia infine  $p_{n+1}$  il prezzo unitario della forza-lavoro all'istante  $t$ . Pongasi, inoltre <sup>(2)</sup>:

$$(1) \quad \begin{cases} Y_s = a_{s,n+1} X_{n+1} ; x_{n+1,s} = a_{n+1,s} X_s ; \\ Z_s = p_{n+1} a_{n+1,s} ; (s = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

ed indichiamo con  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{p}, \mathbf{Z}$  i vettori orizzontali aventi per componenti le  $n$  produzioni, consumi, prezzi, costi di forza-lavoro impiegata per produzioni unitarie.

Al tempo  $t$  l'economia E sia in equilibrio (di produzioni e di costi). Detta allora  $\mathbf{I}$  la matrice identica di ordine  $n$  sussistono le relazioni <sup>(3)</sup>

$$(2) \quad [\mathbf{I} - \mathbf{a}] \mathbf{X}_{-1} = \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \mathbf{p} [\mathbf{I} - \mathbf{a}] = \mathbf{Z}$$

che, per le proprietà delle matrici non negative <sup>(4)</sup>, sono invertibili ed essendo  $[\mathbf{I} - \mathbf{a}]^{-1} \geq \mathbf{O}$  <sup>(5)</sup>, danno  $\mathbf{X} > \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{p} > \mathbf{O}$  quando sia  $\mathbf{Y} > \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{Z} > \mathbf{O}$ .

2. Fra le produzioni, i prezzi e le loro velocità possono porsi relazioni aggiunte come le seguenti:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{X}_{-1} = \mathfrak{B} \mathbf{p}_{-1} \quad ; \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{-1} = \mathfrak{C} \mathbf{X}_{-1}$$

nelle quali le matrici  $\mathfrak{B} = [b_{rs}]$ ,  $\mathfrak{C} = [c_{rs}]$ , di ordine  $n$ , ad elementi funzioni di  $t$ , si assumono come rappresentative delle reazioni del mercato <sup>(6)</sup>.

(2) Tutti i simboli indicano numeri: per la produzione di ciascun settore si sceglie una unità di misura comune per tutte le aziende di esso; per la forza-lavoro un'unica unità in tutta E.

(3) Cfr. la nostra Memoria: *Sui fondamenti matematici della teoria dell'equilibrio generale economico*. [*L'Industria*], 1956, n. 3, pp. 302-336], § 5, n. 9, p. 314. Citeremo questa Memoria con « *Fondamenti* ».

(4) Cfr. la nostra Monografia sul *Calcolo delle Matrici*, in corso di stampa a cura del C.N.R. (ed. Cremonese), cap. II, § 2, pp. 128-145. Cfr. anche la nostra Memoria: *Sulle matrici quadrate non negative*, in corso di stampa negli « *Annali Sc. N. di Pisa* ». Ovvero: DEBREU GERARD ed L. N. HERSTEIN: *Non negative square Matrices* [*Econometrica*], XXI, 1953, pp. 577-607].

(5) « *Fondamenti* », § 5, n. 9 p. 314. Con  $\mathbf{O}$  si indica la matrice nulla, con  $\mathbf{O}$  un  $n$ -complesso (o vettore) nullo; il numero (scalare) zero si indica con  $o$ . Scrivendo  $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$  s'intende che la matrice  $\mathbf{A}$  è non negativa, cioè che nessuno dei suoi elementi è negativo senza essere tutti zero;  $\mathbf{X} > \mathbf{O}$  è un vettore a componenti tutte positive;  $\mathbf{X} \geq \mathbf{O}$  è un vettore non negativo.

(6) « *Fondamenti* », § 8, n. 17, p. 324 e *Commento*, § 11, pp. 334-336. Esse qui sono un po' più generali, perchè non legate ad  $\mathbf{a}$  dalle (8-9) di p. 321; così le (3) esprimono forse ancor meglio il *tâtonnement* di WALRAS.

Se gli elementi di  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{C}$  sono funzioni continue di  $t$ , ponendo

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

il sistema differenziale (3) ha per integrale generale

$$(4) \quad (\mathbf{X} | \mathbf{p})_{-1} = \mathfrak{X}(t) \mathbf{c}_{-1}$$

dove  $\mathfrak{X}(t)$ , è il matricizzante sinistro di  $\mathfrak{A}$  e si ha  $\mathbf{c} = (\mathbf{c}' | \mathbf{c}'')$  con  $\mathbf{c}', \mathbf{c}''$   $n$ -complessi orizzontali costanti arbitrari determinazioni dei vettori  $\mathbf{X}, \mathbf{p}$  all'istante  $t = 0$ .

Se  $t$  varia in un intervallo abbastanza piccolo, le matrici  $\mathbf{a}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  possono ritenersi costanti, onde  $\mathfrak{X}(t)$  può sostituirsi con l'esponenziale  $e^{\mathbf{A}t}$ , quindi l'integrale generale (4) dà:

$$(5) \quad \mathbf{p} = \mathbf{S}' \mathbf{c}'_{-1} + \mathbf{S} \mathbf{c}''_{-1} = [\mathbf{S}' | \mathbf{S}] \mathbf{c}_{-1}$$

dove:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{S} = \mathbf{I} + \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{B}}{2!} t^2 + \frac{(\mathfrak{C} \mathfrak{B})^2}{4!} t^4 + \dots \\ \mathbf{S}' = \frac{\mathfrak{C}}{1!} t + \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{C}}{3!} t^3 + \dots \end{cases}$$

Si restringa, se occorre, l'intervallo  $(0, t_1)$  in cui varia  $t$  per modo che in queste (6) possano tralasciarsi i termini con potenze di  $t$  ad esponenti maggiori di 1. I termini con  $t$  a prima potenza non potranno tralasciarsi, altrimenti, per la (5), i prezzi risulterebbero indipendenti (oltre che dal tempo), dalle produzioni iniziali esistenti sul mercato, Le (5) danno dunque i prezzi come funzioni (lineari) del tempo e, per la seconda delle (2), anche i costi della forza-lavoro impiegata per produzioni unitarie nei vari settori sono funzioni (lineari) del tempo. Dalle (1) segue che, in generale, i coefficienti  $a_{n+1,s}$ , comunque piccolo sia l'intervallo in cui varia  $t$ , non possono essere (tutti) indipendenti dal tempo. In modo analogo si giunge alla stessa conclusione per i coefficienti  $a_{s,n+1}$ .

L'intervento del mercato introduce dunque una differenza essenziale, anche in piccoli intervalli di tempo, tra i sistemi aperti, com'è quello dei settori di merci e servizi, ed i sistemi chiusi col settore lavoro-consumo (7).

3. Affinché l'integrale generale (4) dia soluzioni positive, le matrici  $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  devono soddisfare ad opportune condizioni (8). Così pure se si vuole che le velocità delle produzioni e dei prezzi restino tutte positive (o almeno non negative) in un dato intervallo  $(0, t_1)$ .

Condizioni sufficienti a questi scopi, — anche necessarie se, come sopra si è supposto,  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{C}$  sono funzioni continue del tempo, oppure costanti —,

(7) Lo stesso accade se la chiusura si fa con un altro settore primario.

(8) « Fondamenti », § 8, n. 16, pp. 323-324.



sono state assegnate in una nostra recente Nota <sup>(9)</sup>. Le condizioni cui accenniamo, possono adattarsi in modo opportuno al problema che qui ci interessa.

Le matrici  $\mathfrak{B}$  e  $\mathfrak{C}$  generalmente dipendono anche dalle produzioni e dai prezzi. Fermiamoci sulla prima delle (3): le considerazioni che faremo potranno ripetersi, *mutatis mutandi*, sulla seconda. Poniamo:

$$(7) \quad \mathfrak{B} = B + p_1 B' + p_2 B'' + \dots + p_n B^{(n)}$$

le matrici  $B^{(s)}$  essendo funzioni soltanto del tempo, mentre  $B$  dipenderà anche dalle produzioni e dai prezzi: questa si dirà delle *reazioni generali* del mercato,  $B^{(s)}$  delle *reazioni specifiche relative al settore s*. Per  $t$  variabile in un intervallo non troppo grande, si potrà ritenere che  $B$  non dipenda dalle produzioni e dai prezzi correnti, ma soltanto dal tempo e dalle determinazioni iniziali delle produzioni e dei prezzi <sup>(10)</sup>. Per intervalli di tempo ancora più piccoli, tutte le reazioni potranno ritenersi costanti: in ogni caso, gli elementi delle matrici delle reazioni (come le produzioni e i prezzi) nell'intervallo  $(0, t_1)$  sono limitati.

Per esemplificare, supponiamo che tutte le reazioni, meno quelle specifiche del settore  $n$ , siano conosciute *a priori* - sia pure soltanto per approssimazione, cioè con la possibilità di variare tra due note determinazioni estreme - e che allo stesso modo siano conosciuti i prezzi, tranne eventualmente  $p_n$  <sup>(11)</sup>. Allora si tratta di condizionare  $B^{(n)}$  ed il prezzo  $p_n$  in modo che, detta  $\mathbf{B}$  la parte del secondo membro di (7) che si suppone nota, riesca:

$$(8) \quad [\mathbf{B} + p_n B^{(n)}] p_n > 0.$$

L'applicazione del procedimento ricorrente della nostra Nota cit. (9) fornisce limitazioni implicanti linearmente gli elementi di  $B^{(n)}$  ed al più quadratiche nei prezzi rimasti indeterminati, che sono sufficienti (eventualmente anche necessarie) per soddisfare la (8). Se la matrice  $B^{(n)}$  è del tutto indeterminata, le limitazioni in discorso sono compatibili, come discende facilmente dal procedimento indicato nella Nota (9), nel quale uno dei prezzi, scelto a piacere, può fissarsi ad arbitrio.

4. Suppongasì che i prezzi e le reazioni correnti siano incogniti, mentre sono noti gli estremi tra i quali variano gli elementi di  $\mathfrak{B}$  e di  $\mathfrak{C}$ . Allora potranno determinarsi, almeno con approssimazione, gli estremi tra i quali

(9) *Su una disuguaglianza in matrici* [« Boll. U N I », 1956, n. 2, pp. 126-132]. Con l'occasione avvertiamo che al rigo 10 di p. 130 (p. 5 dell'estratto) invece di  $A$  deve leggersi  $M$ ; così al primo rigo del penultimo capoverso della stessa pagina.

(10) S'includono, così, i fenomeni di ereditarietà. Le reazioni generali sono subordinate soprattutto alla tecnica produttiva in atto ed all'organizzazione politico-sociale della zona cui si estende  $E$ .

(11) Le reazioni note o i loro estremi si suppongono determinabili per via sperimentale. Un ragionamento analogo a quello che ora si svolge vale quando restino indeterminati più prezzi e le relative matrici delle reazioni di mercato.

variano gli elementi del matricizzante  $\mathfrak{X}(t)$  della matrice  $\mathfrak{A}$ . Sostituendo nella prima delle (3) il vettore  $\mathbf{p}$  con quello dato dall'integrale generale (4), si avrà:

$$(3') \quad \frac{d}{dt} \mathbf{X}_{-1} = \mathfrak{B}' \mathbf{c}_{-1}$$

dove  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B} [S' | S]$ , il cui secondo fattore è la matrice delle ultime  $n$  righe di  $\mathfrak{X}(t)$ . Anche per gli elementi di  $\mathfrak{B}'$  potremo determinare gli estremi e quindi applicare il procedimento del n. 4 della Nota cit. (9). Condizioneremo così linearmente<sup>(12)</sup>, con disuguaglianze ricorrenti, gli estremi ora detti alle determinazioni iniziali  $\mathbf{c}$ , e queste a quelli. Occorrerà scegliere gli estremi e le determinazioni iniziali in questione in modo da render compatibili queste disuguaglianze.

5. Nel n. prec. abbiamo dimostrato la possibilità di un'economia progressiva tanto per le produzioni che per i prezzi. Una classificazione delle economie si ottiene, dalle (3), con un procedimento avente qualche analogia con quello impiegato da V. Volterra<sup>(13)</sup> nello studio delle specie biologiche viventi in uno stesso ambiente.

Aggregando gli  $n$  settori di  $E$  in un settore loro combinazione lineare a coefficienti positivi costanti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , dalla prima delle (3) e dalle posizioni (7) si ottiene, dopo breve calcolo:

$$(9) \quad \frac{dX}{dt} = \lambda B \mathbf{p}_{-1} + \mathbf{p} \mathfrak{M} \mathbf{p}_{-1}$$

dove  $X = \lambda \mathbf{X}_{-1} = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n$  è la produzione del nuovo settore ed  $\mathfrak{M}$  è una matrice i cui elementi sono funzioni del tempo e contengono linearmente i coefficienti  $\lambda_s$ . La forma bilineare e quella quadratica al secondo membro di (9) le diciamo rispettivamente parte *principale* e parte *complementare* della velocità della produzione  $X$ .

Così pel prezzo corrispondente. I segni e l'annullamento di queste parti in relazione ai coefficienti  $\lambda_s$  ed all'intervallo  $(0, t_1)$ , e la compatibilità o meno con la positività degli integrali (4), danno varie eventualità che costituiscono la classificazione cui accenniamo, integrata con la considerazione diretta della forma bilineare  $\lambda \mathfrak{B} \mathbf{p}_{-1}$  somma di quelle due parti<sup>(14)</sup>.

(12) Si tratta di disuguaglianze ricorrenti tutte lineari negli elementi  $\mathfrak{B}'$  ed in quelli di  $\mathbf{c}$ . Anche al n. prec. si tratta di disuguaglianze ricorrenti.

(13) *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. [Paris, Gauthier-Villars, 1931], chap. III. Per le economie bipartite ( $n = 2$ ) si hanno altre proprietà aventi pur esse analogia con quelle delle specie biologiche.

(14) In due Note già compilate ci interessiamo appunto di questa classificazione e delle economie bipartite.

**Plasticità.** — *Soluzioni ad un parametro del problema plastico della deformazione piana.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

#### INTRODUZIONE.

È ben noto che nel problema plastico ristretto della deformazione piana le tre componenti distinte  $p_{xx} = \sigma_x$ ,  $p_{xy} = \tau$ ,  $p_{yy} = \sigma_y$  del tensore degli sforzi debbono obbedire in sede indefinita alle seguenti tre equazioni:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \qquad (2) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$(3) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau)^2 = 4H^2.$$

Le (1), (2), costituiscono le equazioni indefinite di equilibrio dei continui in assenza di forze di massa, la (3) traduce la condizione di plasticità di Tresca e Von Mises ed  $H$  denota la costante di plasticità.

La condizione (3) di plasticità presenta una particolare struttura, la quale è estremamente vantaggiosa per l'impostazione matematica del problema plastico ristretto <sup>(1)</sup>. Così è ben noto che, introdotta la funzione di Airy ed integrate le equazioni indefinite (1), (2), la sostituzione nella (3) dà luogo ad un'equazione del 2° ordine non lineare, che però può ricondursi senza gravi difficoltà all'equazione lineare dei telegrafisti. Per di più la particolare struttura della (3) consente una rappresentazione parametrica degli sforzi, che presto indicheremo, e che si rivela favorevolissima per uno studio completo del problema plastico dal punto di vista geometrico, analitico e fisico.

Quando però, anziché il problema della deformazione piana, si vogliano studiare altri problemi ristretti, quali tipicamente il problema degli sforzi piani ed il problema della deformazione superficiale, oppure nello stesso problema della deformazione piana si voglia apportare un ritocco alla condizione di plasticità, tutti i fondamentali vantaggi inerenti alla particolare struttura della (3) vengono improvvisamente a mancare. In particolare l'analisi del problema plastico non può più fondarsi su teoremi geometrici del tipo di quelli di Hencky, Prandtl, Kapuano che pure tutti dipendono dalla particolare natura della condizione di plasticità.

Alla luce di queste osservazioni non privo di interesse mi sembra il poter segnalare un metodo generale il quale consente, *qualunque sia la condizione di plasticità*  $F(\sigma_x, \tau, \sigma_y) = 0$ , di ottenere *tutte le soluzioni* del problema plastico

(\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) Questa circostanza è dovuta sostanzialmente al fatto che nello spazio  $\sigma_x, 2\tau, \sigma_y$  la (3) rappresenta il più semplice dei cilindri quadrici, il cilindro circolare retto.

ristretto in sede indefinita, nelle quali gli sforzi dipendono da un solo parametro  $\alpha$  funzione di  $x$  e di  $y$ . Faremo precedere l'esposizione del metodo da un breve studio che ci permetterà di individuare la più generale soluzione ad un parametro del problema plastico ristretto della deformazione piana, seguendo un procedimento suggerito dalla teoria classica che si vale della (3).

# CONDIZIONE DI PLASTICITÀ DI VON MISES.

Seguendo la teoria classica, introduciamo le due variabili dimensionali  $\omega$  e  $\theta$  così definite:

$$\omega = -\frac{\rho}{2H} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4H} \quad ; \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} + \frac{\pi}{4}.$$

È ben noto <sup>(2)</sup> che con tale scelta dei parametri gli sforzi assumono la forma seguente:

$$(4) \quad \sigma_x = 2H\omega + H \sin(2\theta) \quad ; \quad \tau = -H \cos(2\theta) \quad ; \quad \sigma_y = 2H\omega - H \sin(2\theta)$$

mentre le due equazioni indefinite di equilibrio si scrivono:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(2\theta) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(2\theta) = 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin(2\theta) - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos(2\theta) = 0. \end{cases}$$

Se si impone allora ad  $\omega$  di essere funzione di  $\theta$ , cioè  $\omega = F(\theta)$ , le (5) divengono

$$(6) \quad \begin{cases} [F'(\theta) + \cos(2\theta)] \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin(2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ \sin(2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} + [F'(\theta) - \cos(2\theta)] \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Se il determinante di tale sistema, nelle incognite  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ :

$$\Delta(\theta) = F'(\theta)^2 - 1$$

è diverso da zero, cioè  $F'(\theta) \neq \pm 1$ , si ha la sola soluzione:  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$  da cui  $\theta(x, y) = \text{cost.}$ , che corrisponde a sforzi costanti. Le (4), nelle quali  $\theta$  ed  $\omega$  devono riguardarsi come costanti arbitrarie, forniscono pertanto la più generale soluzione del problema corrispondente a sforzi costanti.

Se  $F'(\theta) = \pm 1$ , cioè  $F(\theta) = \pm \theta + c$ , si ottiene:

$$(7) \quad \omega \mp \theta = c$$

e le (6) vengono a coincidere in un'unica equazione nell'incognita  $\theta = \theta(x, y)$ . Le due equazioni corrispondenti ad  $F'(\theta) = +1$  ed  $F'(\theta) = -1$  sono rispettivamente:

$$(8) \quad \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (9) \quad \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

(2) Vedasi ad esempio W. PRAGER e G. HODGE, jr., *Theory of perfectly plastic solids*, pp. 129-130 (1951).



Si tratta di equazioni lineari integrabili col metodo di Charpit-Lagrange. Tenendo conto delle espressioni seguenti dei loro integrali generali:

$$x \operatorname{tg} \theta - y = \varphi(\theta) \quad ; \quad x \operatorname{ctg} \theta + y = \varphi(\theta)$$

e delle (4), (7) siamo allora in grado di enunciare la seguente proposizione: «La più generale soluzione del sistema (5), dipendente da un solo parametro  $\theta = \theta(x, y)$  è la seguente:

$$(*)_1 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = H \{ 2(\theta + c) + \operatorname{sen}(2\theta) \} \\ \tau = -H \cos(2\theta) \\ \sigma_y = H \{ 2(\theta + c) - \operatorname{sen}(2\theta) \} \end{array} \right. \quad (*) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = H \{ 2(-\theta + c) + \operatorname{sen}(2\theta) \} \\ \tau = -H \cos(2\theta) \\ \sigma_y = H \{ 2(-\theta + c) - \operatorname{sen}(2\theta) \} \end{array} \right. \quad (*_2$$

Nelle  $(*)_1$   $\theta = \theta(x, y)$  è determinata dall'equazione:  $x \operatorname{tg} \theta - y = \varphi(\theta)$ ; nelle  $(*)_2$  dall'analogia:  $x \operatorname{ctg} \theta + y = \varphi(\theta)$ . In entrambe  $c$  denota una costante arbitraria e  $\varphi(\theta)$  è pure una funzione arbitraria».

Osservazione I. - L'equazione (8) ci dice che il coefficiente angolare delle  $\theta(x, y) = \text{cost.}$  è funzione di  $\theta$ , vale a dire che è pure esso costante. Ciò significa che le  $\theta(x, y) = \text{cost.}$  sono rette (il che del resto appare chiaramente anche dall'espressione dell'integrale generale della (8)). Si osservi viceversa che, se per una data funzione  $\theta = \theta(x, y)$  le linee  $\theta(x, y) = \text{cost.}$  sono rette, dovendo risultare lungo di esse  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \theta / \partial x}{\partial \theta / \partial y} = \text{cost.}$ , la  $\theta = \theta(x, y)$  soddisfa necessariamente l'equazione del I ordine  $\frac{\partial \theta / \partial x}{\partial \theta / \partial y} = R(\theta)$ . Quest'osservazione è preziosa dal punto di vista pratico per costruire delle soluzioni del sistema (5). Se invero si considera una qualsiasi funzione  $\theta = \theta(x, y)$  tale che le  $\theta(x, y) = \text{cost.}$  siano rette, il rapporto  $\lambda = -\frac{\partial \theta / \partial x}{\partial \theta / \partial y}$  eguaglia la funzione  $\operatorname{tg} \theta$ . Dalle formule:

$$\theta = \operatorname{arctg} \lambda \quad ; \quad \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \quad ; \quad \cos(2\theta) = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

sostituendo nelle  $(*)_1$  si ottengono allora direttamente le espressioni degli sforzi. E poiché le considerazioni fatte si adattano anche all'equazione (9) ed alla corrispondente soluzione  $(*)_2$  duale della  $(*)_1$ , si conclude con la seguente semplice proposizione:

«Se le linee  $\theta(x, y) = \text{cost.}$  sono rette e solo in questo caso, le formule:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = H \left\{ 2(\operatorname{arctg} \lambda + c) + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right\} \\ \tau = -H \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ \sigma_y = H \left\{ 2(\operatorname{arctg} \lambda + c) - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right\} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = H \left\{ 2(-\operatorname{arctg} \lambda + c) - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right\} \\ \tau = H \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ \sigma_y = H \left\{ 2(-\operatorname{arctg} \lambda + c) + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \right\} \end{array} \right\}$$

(nelle quali  $\lambda = -\frac{\partial \theta / \partial x}{\partial \theta / \partial y}$ ), forniscono una soluzione del problema plastico ristretto della deformazione piana in sede indefinita. Tale soluzione è inoltre la più generale soluzione ad un parametro».

*Osservazione II.* — Dalle  $(*)_1$  ed  $(*)_2$  discende:

$$-p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 2H(\theta + c) \quad ; \quad -p = 2H(-\theta + c)$$

e si vede pertanto che  $\theta + c$  e  $-\theta + c$  rispettivamente sono proporzionali alla pressione  $p$ . Le linee  $\theta(x, y) = \text{cost.}$  sono dunque le isobare ed i risultati fin qui conseguiti possono enunciarsi così:

a) se le isobare  $p(x, y) = \text{cost.}$  sono rette e solo in questo caso, le  $(*)$  forniscono una soluzione del problema plastico ristretto della deformazione piana in sede indefinita;

b) in tale soluzione gli sforzi  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$  sono funzioni della sola pressione  $p$ ;

c) se viceversa in un problema di deformazione piana gli sforzi dipendono dalla sola pressione  $p$ , allora le isobare sono necessariamente rette e le  $(*)$  forniscono le più generali possibili espressioni degli sforzi.

*Osservazione III.* — Affinché il problema plastico sia ristretto anche in sede definita, sia cioè staticamente determinato, bisogna che vengano assegnate le forze esterne unitarie  $f$  distribuite al contorno e bisogna che da ogni punto del campo escano due linee caratteristiche che giungano al contorno <sup>(3)</sup>. Le condizioni al contorno sono tradotte dalle formule seguenti:

$$(10) \quad f_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau \sin \alpha \quad ; \quad f_y = \tau \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha$$

avendo indicato con  $\alpha$  l'angolo che la normale al contorno volta verso l'interno forma con l'asse  $x$ .

Tenendo conto delle espressioni  $(*)$  degli sforzi, le (10) danno tosto  $f_x$  ed  $f_y$ , mentre per le componenti tangenziale e normale di  $f$  si trova:

$$(11) \quad f_t = H \cos [2(\theta - \alpha)] \quad ; \quad f_n = 2H(\pm \theta + c) + H \sin [2(\theta - \alpha)].$$

*Osservazione IV.* — Come è ben noto, le due equazioni (5) esprimono semplicemente che lungo le linee di taglio massimo e minimo si mantengono rispettivamente costanti  $\omega - \theta$  ed  $\omega + \theta$ . La (7) ci rivela che nelle soluzioni  $(*)_1, (*)_2$ , che sono le più generali ad un parametro,  $\omega - \theta$  od  $\omega + \theta$  si mantengono costanti *in tutta la regione plastica*. E poiché in tali soluzioni le isobare  $\omega = \text{cost.}$  sono rette, pure rette sono le isocline  $\theta = \text{cost.}$  Dal teorema di Hencky discende poi facilmente che una almeno delle due famiglie delle linee di taglio massimo o minimo è costituita interamente da rette.

Come si vede, adottando il procedimento che fa capo alla classica teoria della deformazione piana, si può giungere alla soluzione  $(*)$  rapidamente e col vantaggio di interpretare geometricamente i risultati ottenuti. Cam-

(3) Si osservi che le caratteristiche del sistema (5) hanno l'equazione:  $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$  ;

$\frac{dy}{dx} = -\cotg \theta$  rispettivamente (PRAGER, loc. cit.; p. 166).

biando però la condizione di plasticità, come si è già osservato, viene immediatamente a mancare la possibilità di valersi di equazioni quali le (4), (5), mentre integra rimane la possibilità di applicare il metodo generale preannunciato e che esporrò nelle pagine seguenti.

#### CONDIZIONE DI PLASTICITÀ GENERICA.

Alle equazioni indefinite (1), (2) uniamo l'equazione:

$$(12) \quad F(\sigma_x, \tau, \sigma_y) = 0$$

la quale traduca una generica condizione di plasticità consistente in un legame finito fra i tre sforzi  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$ . Dalla (12) si tragga  $\sigma_x$  in funzione di  $\tau$  e  $\sigma_y$ . Naturalmente può accadere che la (12) definisca  $\sigma_x$  come funzione a più valori di  $\tau$  e  $\sigma_y$  (il caso classico, corrispondente all'ipotesi di Von Mises che pone un legame quadratico fra  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$ , è quello in cui la funzione  $\sigma_x$  definita implicitamente dalla (12) sia una funzione a due valori). Comunque nel seguito con

$$(13) \quad \sigma_x = G(\tau, \sigma_y)$$

intenderemo una qualsiasi delle funzioni ad un valore definite dalla (12); ed i ragionamenti che andremo a svolgere saranno applicabili a tutte le determinazioni della  $\sigma_x$ .

Poniamo:

$$(14) \quad \sigma_x = f(\alpha) \quad ; \quad \tau = g(\alpha) \quad ; \quad \sigma_y = h(\alpha).$$

Nelle (14) le funzioni  $f(\alpha), g(\alpha), h(\alpha)$  sono tre funzioni di  $\alpha$  da determinarsi insieme alla  $\alpha = \alpha(x, y)$ . Sostituendo nella (13) si trova:

$$(15) \quad \sigma_x = G[g'(\alpha), h(\alpha)] = f(\alpha).$$

La  $f(\alpha)$  si determina dunque immediatamente tramite la  $g$  e la  $h$ ; ed assumendo perciò:

$$(16) \quad \sigma_x = G[g(\alpha), h(\alpha)] \quad ; \quad \tau = g(\alpha) \quad ; \quad \sigma_y = h(\alpha)$$

la condizione (12) di plasticità è identicamente soddisfatta *qualunque siano le funzioni*  $g(\alpha), h(\alpha)$  <sup>(4)</sup>. La  $g(\alpha)$ , la  $h(\alpha)$  e la  $\alpha = \alpha(x, y)$  debbono allora soltanto obbedire alle due equazioni:

$$(17) \quad \frac{dG}{d\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + g'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \quad ; \quad g'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + h'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

che si desumono sostituendo gli sforzi definiti dalla (16) nelle (1) e (2) <sup>(5)</sup>. Interpretiamo questo sistema come un sistema lineare omogeneo nelle incognite  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ .

(4) Si osservi peraltro che né  $\partial G/\partial g$  né  $\partial G/\partial h$  possono essere identicamente nulle.

(5) Qui e nel seguito indicheremo con apici le derivazioni rispetto ad  $\alpha$ .

1° Caso. — Sia:

$$\Delta(\alpha) = \frac{dG}{d\alpha} \cdot h'(\alpha) - [g'(\alpha)]^2 = 0.$$

In questa ipotesi il sistema ammette la sola soluzione  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$  che implica  $\alpha(x, y) = \text{cost.}$  Le  $g(\alpha)$  ed  $h(\alpha)$  risultano allora costanti arbitrarie. Indicandole con  $\theta$  ad  $\omega$  si conclude che la terna:

$$(18) \quad \sigma_x = G(\theta, \omega) \quad ; \quad \tau = \theta \quad ; \quad \sigma_y = \omega$$

fornisce una soluzione del sistema (1), (2), (12) nella quale gli sforzi sono tutti costanti. Anzi se con  $G$  si indicano tutte le determinazioni che competono alla  $\sigma_x$  definita implicitamente dalla (12), la (18) ci dà la più generale soluzione del problema plastico nella quale gli sforzi sono tutti costanti.

2° Caso. — Sia:

$$\Delta(\alpha) = \frac{dG}{d\alpha} h'(\alpha) - [g'(\alpha)]^2 = 0.$$

In questa ipotesi le due equazioni (17) vengono a coincidere in un'unica equazione. Siccome la condizione di plasticità è già scontata, la ricerca della più generale soluzione ad un parametro del problema plastico ristretto considerato si identifica con l'integrazione del sistema differenziale seguente:

$$(19) \quad h'(\alpha) \frac{dG}{d\alpha} - [g'(\alpha)]^2 = 0 \quad (17_2) \quad g'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + h'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

che è un sistema di due equazioni nelle tre incognite  $g = g(\alpha)$ ,  $h = h(\alpha)$   $\alpha = \alpha(x, y)$ .

Dalla (19) segue:

$$h'(\alpha) \left[ \frac{\partial G}{\partial g} g'(\alpha) + \frac{\partial G}{\partial h} h'(\alpha) \right] - [g'(\alpha)]^2 = 0$$

e quindi:

$$(20) \quad \frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{dh}{dg} = \left[ -\frac{\partial G}{\partial g} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial g}\right)^2 + 4 \frac{\partial G}{\partial h}} \right] / 2 \frac{\partial G}{\partial h}.$$

La (20) costituisce un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine nella incognita  $h = h(g)$  (che peraltro è a variabili separabili se la  $G$  è lineare in  $h$  oppure in  $g$ ). Se  $h = h(g, c)$  con  $c$  costante arbitraria è l'integrale generale della (20) si ottengono per gli sforzi le seguenti espressioni:

$$\sigma_x = G\{g(\alpha), h[g(\alpha), c]\} \quad , \quad \tau = g(\alpha) \quad ; \quad \sigma_y = h[g(\alpha), c]$$

nelle quali sia  $G$  che  $h$  risultano funzioni note, *dependenti in definitiva solo dalla natura della condizione di plasticità.*

Dalle (17<sub>2</sub>) e (20) discende infine l'equazione alle derivate parziali lineari del 1° ordine:

$$(21) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \left[ -\frac{\partial G}{\partial g} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial g}\right)^2 + 4 \frac{\partial G}{\partial h}} \right] / 2 \frac{\partial G}{\partial h} = 0$$



cui deve soddisfare la funzione  $\alpha = \alpha(x, y)$ . In tale equazione il coefficiente di  $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$  non dipende direttamente da  $x$  ed  $y$  ma è funzione (ormai nota) della sola  $g(\alpha)$ , diciamola  $Q[g(\alpha)]$ . La (21) si può allora sempre integrare in termini finiti col metodo di Lagrange e si ottiene in effetti per il suo integrale generale l'espressione seguente:

$$(22) \quad x Q[g(\alpha)] - y = \Psi(\alpha)$$

nella quale  $\Psi(\alpha)$  denota una funzione arbitraria di  $\alpha$ . Se si opera poi il cambio di parametro:  $g(\alpha) = \beta$ , si conclude con la seguente proposizione:

«La più generale soluzione ad un parametro di ogni problema plastico ristretto definito dal sistema (1), (2), (12) è la seguente:

$$\sigma_x = G[\beta, h(\beta, c)] \quad ; \quad \tau = \beta \quad ; \quad \sigma_y = h(\beta, c)$$

ove  $G = G(\tau, \sigma_y)$  è una qualunque determinazione della funzione  $\sigma_x$  definita implicitamente dalla (12),  $h = h(\beta, c)$  è l'integrale generale dell'equazione (20) (in cui si ponga  $\beta$  in luogo di  $g(\alpha)$ , e infine  $\beta = \beta(x, y)$  è determinata dall'equazione:

$$(22') \quad x Q(\beta) - y = \varphi(\beta)$$

con  $\varphi(\beta)$  arbitraria. In tale soluzione le linee di egual taglio  $\beta(x, y) = \text{cost.}$  coincidono con le isobare  $p(x, y) = \text{cost.}$  e sono sempre rette; inoltre gli sforzi risultano funzioni della sola pressione  $p$ ».

La proposizione ora dimostrata serve per la determinazione di tutte le soluzioni ad un parametro di ogni problema plastico ristretto, qualunque sia la condizione di plasticità. Vediamone l'applicazione al problema della deformazione piana.

#### APPLICAZIONE DEL METODO.

Nel problema della deformazione piana la condizione di plasticità di Mises è tradotta dalla (3) che, risolta rispetto a  $\sigma_x$ , ci dà:

$$\sigma_x = \sigma_y \pm 2 \sqrt{H^2 - \tau^2} = G(\tau, \sigma_y).$$

Risulta dunque nel caso attuale:

$$G(\beta, h) = h \pm 2 \sqrt{H^2 - \beta^2} \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial h} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial \beta} = \mp \frac{2\beta}{\sqrt{H^2 - \beta^2}}$$

e quindi:

$$(20') \quad \frac{dh}{d\beta} = \left[ -\frac{\partial G}{\partial \beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial \beta}\right)^2 + 4 \frac{\partial G}{\partial h}} \right] / 2 \frac{\partial G}{\partial h} = \frac{\pm \beta \pm H}{\sqrt{H^2 - \beta^2}}.$$

Eseguito il cambio di variabile:  $\tau = \beta = -H \cos(2\theta)$  che rende più agevole l'integrazione della (20'), quest'ultima diviene:

$$\frac{dh}{2H \sin(2\theta) d\theta} = \frac{\mp H \cos(2\theta) \pm H}{H \sin(2\theta)}.$$

Integrando si trova allora subito:

$$\sigma_y = h = H \{ 2 (\pm \theta + c) \mp \sin(2\theta) \}$$

e quindi:

$$\sigma_x = \sigma_y \pm 2 H \sin(2\theta) = H \{ (2 (\pm \theta + c) \pm \sin(2\theta)) \}.$$

In quanto alla (22') essa diviene:

$$x \frac{\mp \cos(2\theta) \pm 1}{\sin(2\theta)} - y = \varphi(\theta).$$

Poiché voltando  $\theta$  in  $-\theta$  la soluzione corrispondente ai segni superiori si riduce alla soluzione corrispondente ai segni inferiori mentre la stessa circostanza si verifica anche per le due soluzioni corrispondenti ai segni misti, si ritrovano così esattamente i risultati già stabiliti seguendo la teoria classica.

*Osservazione.* — Qualunque condizione di plasticità del tipo (12), qualora si interpretino  $\sigma_x = X$ ,  $\tau = Y$ ,  $\sigma_y = Z$  come coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello spazio  $X, Y, Z$ , rappresenta l'equazione di una superficie  $S$  e le (16) costituiscono le equazioni parametriche della  $S$  quando si assumano quali parametri  $Y = \tau = g$ ,  $Z = \sigma_y = h$ . Può risultare utile in alcuni casi effettuare un cambio di parametri ponendo  $\tau = Y = Y(a, b)$ ,  $\sigma_y = Z = Z(a, b)$  con  $a$  e  $b$  opportuni. La  $\sigma_x$  risulta conseguentemente attraverso alla (12) funzione nota di  $a$  e  $b$ :  $\sigma_x = X(a, b)$ . La determinazione della più generale soluzione ad un parametro del problema plastico si può effettuare ovviamente imponendo alla  $b$  di essere funzione di  $a$ , cioè:  $b = B(a)$ .

Scrivendo le equazioni indefinite (1), (2), si ottiene allora un sistema lineare omogeneo di due equazioni nelle incognite  $\frac{\partial a}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial a}{\partial y}$  e nel quale i coefficienti delle incognite sono funzioni solo di  $a$ . Quando il determinante  $\Delta(a)$  di tale sistema è diverso da zero, l'unica soluzione del sistema risulta  $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0$  che implica:  $a(x, y) = \text{cost.}$  Si ottiene in tal caso una soluzione del sistema plastico corrispondente a sforzi costanti. L'equazione  $\Delta(a) = 0$  determina invece quelle particolari funzioni  $b = B(a)$  per le quali le due equazioni nelle incognite  $\frac{\partial a}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial a}{\partial y}$  vengono a coincidere in una sola. Risolta questa equazione col metodo di Lagrange e sostituita la  $a = a(x, y)$  nelle espressioni degli sforzi, si ottiene la più generale soluzione del problema plastico ristretto nella quale gli sforzi dipendono da un sol parametro  $a = a(x, y)$ .

Il procedimento esposto in quest'osservazione, che è stato da noi seguito in un primo tempo per stabilire le (\*), traendo vantaggio dalla notevole espressione parametrica (4) degli sforzi, da lungo tempo conosciuta, equivale sostanzialmente al procedimento generale esposto.

**Astronomia** (Astrofisica solare). — *Variazione centro-lembo del Sole del tripletto verde del Magnesio:  $\lambda$  5167,3- $\lambda$  5172,7- $\lambda$  5183,6.*  
 Nota I di TERESA FORTINI e GIUSEPPE CAPRIOLI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La presente ricerca si inquadra e completa quasi <sup>(1)</sup> una serie di lavori analoghi (già eseguiti da M. Cimino <sup>(2)</sup> per il tripletto del Ca II nell'infrarosso e da T. Fortini e G. Caprioli <sup>(3)</sup> per la riga  $\lambda = 4227$  del Ca I) che si basa sul materiale di osservazione raccolto da M. Cimino alla Torre Solare di M. Wilson. Essa ha lo scopo di determinare la forma dei profili, le larghezze equivalenti - al centro del Sole - delle righe  $\lambda = 5167,3$   $\lambda = 5172,7$   $\lambda = 5183,6$  del tripletto verde del magnesio, come pure le variazioni che queste grandezze presentano nel passaggio dal centro al lembo. Sebbene le righe in questione siano già state analizzate da altri autori <sup>(4)</sup>, pure abbiamo ritenuto interessante ripetere l'analisi; sia perché tale genere di ricerche è spesso affetto da errori sistematici dipendenti principalmente dallo spettrografo e dalla tecnica usati, sia per completare, come si è detto, i lavori eseguiti con lo stesso spettrografo e lo stesso procedimento.

2. DATI DI OSSERVAZIONE E CARATTERISTICHE DELLE LASTRE. — Per facilitare la lettura della Nota, ripetiamo ancora in breve alcune notizie riguardanti il materiale su cui è basata la presente discussione. Gli spettrogrammi sono stati fotografati dal prof. M. Cimino su lastre Eastmann 4-F <sup>(5)</sup> con la Torre Solare di M. Wilson (obb. 38 cm, focale 43m, immagine del Sole 43 cm circa) al II ordine del reticolo N. 66 di Michelson (limite risolvibile nel II ordine 0,03 Å, per  $\lambda = 5000$  Å; apertura della fenditura 0,05 mm).

(\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) È in corso la riduzione delle lastre riguardanti il doppietto del Na.

(2) C. CIMINO, *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », Nota I, ser. VIII, vol. IX, fasc. 3-4, pp. 177-181 (1951); Nota II, serie VIII, vol. XIII, fasc. 3-4, pp. 120-126 (1952); Nota III, serie VIII, vol. XIV, fasc. 2, pp. 243-250 (1953); Nota IV, ser. VIII, vol. XIV, fasc. 4, pp. 500-505 (1953); Nota V, ser. VIII, vol. XV, fasc. 1-2, pp. 33-39 (1953).

(3) Cfr. T. FORTINI e G. CAPRIOLI, *Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale 4227 del CaI*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », Nota I, ser. VIII, vol. XX, fasc. 5, pp. 610-616 (1956); Nota II, ser. VIII, vol. XX, fasc. 6, pp. 773-777 (1956).

(4) Cfr. M. MINNAERT e G. F. M. MULDER, *Zeitschrift für Astroph.*, 1, 192 (1930); H. H. PLASKETT, « Mont. Not. R.A.S. », 91, 870 (1931); G. RIGHINI, « Pubbl. Arcetri », 48, 29, 1931; Mem. Soc. Astr. It. 5, 283, 1931; E. CHERRINGTON, « Lick Obs. Bull. », N. 477, 17, 161, 1935; J. HOUTGAST, *The variations in the profiles of the strong Fraunhofer lines along a radius of the solar disc*, Utrecht 1942.

(5) Antialonizzate da M. CIMINO.

Essi, in numero di 8 (ciascuno di 3 mm. di altezza), sono stati impressionati su una stessa lastra, dal centro al lembo del Sole – lungo uno stesso raggio – in corrispondenza degli angoli:  $80^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $40^\circ$  e centro, formati dalla congiungente del centro Sole e l'osservatore con la congiungente il centro Sole e la zona osservata. Non ci siamo occupati in questa Nota dell'ottavo spettro – fotografato sempre sulla stessa lastra – e ottenuto ponendo la fenditura radialmente per puntare zone vicinissime al lembo. I tempi di posa e le date di osservazione sono indicati nella Tabella I, dove sono pure riportate alcune annotazioni riguardanti le tre lastre impressionate per la regione spettrale qui analizzata. Avvertiamo però che nella riduzione non abbiamo tenuto conto della lastra N. 35 *a* giudicata mediocre, e che quasi tutti i risultati sono basati sugli spettrogrammi della lastra 41 *a*, classificata buona. La lastra 33 *a* è stata utilizzata per controllo, soltanto in pochi casi.

TABELLA I.

Numero della lastra	Data 1950	Ora		Tempi di posa	Cielo	Definizione dell'immagine solare	Lembo	Note
		T.M.	Pacifico					
33 <i>a</i>	16 II	9 <sup>h</sup>	45–10 <sup>h</sup> 30	280 <sup>s</sup> 160 220 <sup>s</sup> 120	assai limpido	discreta	poco agit.	(1)
35 <i>a</i>	17 II	8	40– 9 25	280 160 220 120	»	mediocre	calmo	(2)
41 <i>a</i>	18 II	9	20–10 20	420 230 420 180	»	buona	»	

(1) Spetro N. 8 appena fuori del centro per evitare zone perturbate.

(2) Zona perturbata in vicinanza della posa del centro (spetro N. 8).

Per la calibrazione delle lastre è stata adoperata una fenditura a gradini, con nove aperture in rapporto geometrico. Mediante una verifica eseguita da M. Cimino <sup>(6)</sup> è stato accertato che, entro i limiti degli errori tollerabili, i rapporti geometrici delle fenditure corrispondevano ai rapporti delle intensità trasmesse effettivamente alle lastre fotografiche. Per le calibrazioni – due su una stessa lastra – per ciascuna delle tre lastre 41*a*, 35*a*, 33*a*, si sono adottati gli stessi tempi di posa delle fotografie degli spettri delle lastre a cui si riferiscono. Le curve di calibrazione, dedotte dalle due pose contenute in ogni lastra, si sono potute mediare, perché praticamente coincidenti. Anche l'andamento delle curve adottate per la riduzione delle due lastre 41*a* 33*a* è quasi simile, come risulta dalla fig. 1.

(6) Cfr. M. CIMINO, lavoro già citato, Nota II, pp. 124, 125, 126.



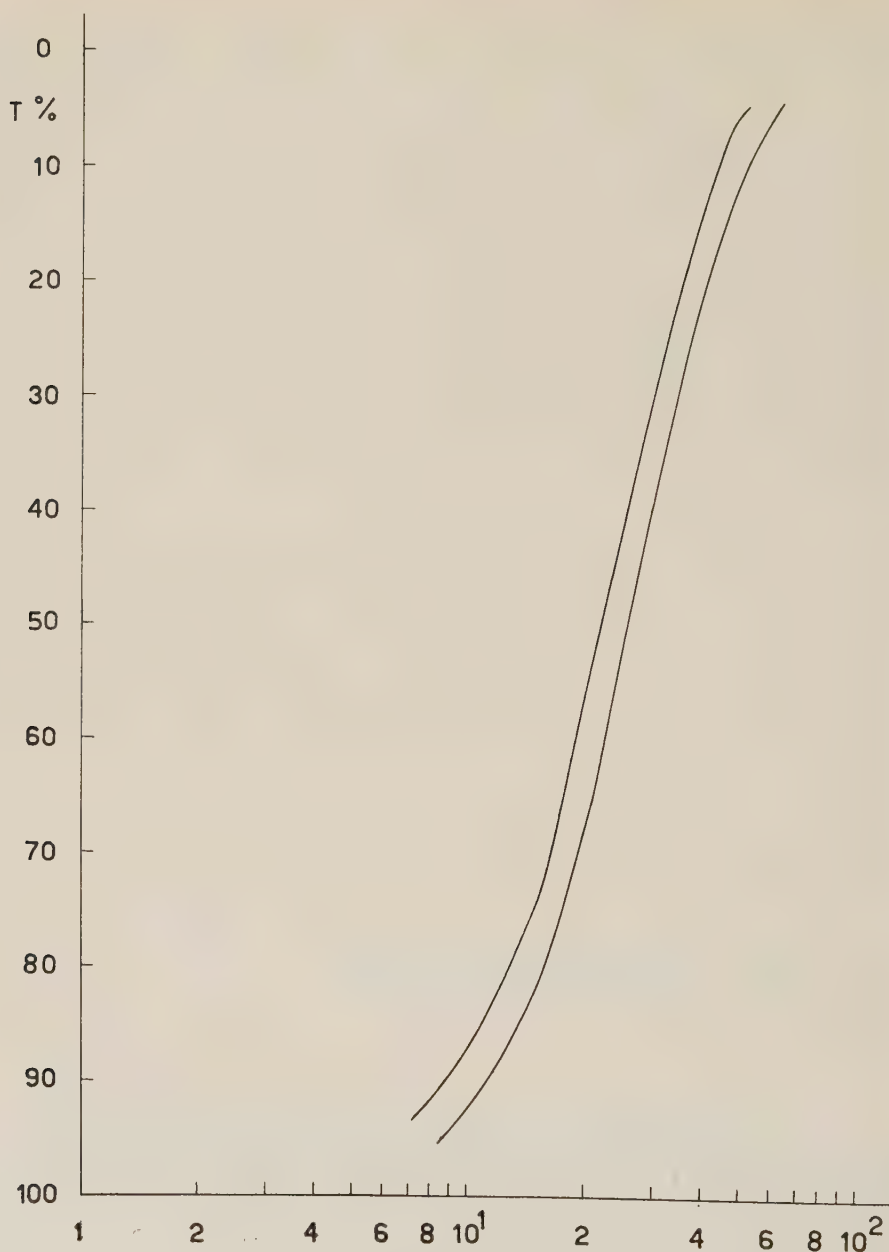


Fig. 1. - Curve di calibrazione delle lastre 33 a-41 a.

3. RIDUZIONE. - Tutti gli spettrogrammi sono stati da noi registrati con il microfotometro Kipp e Zonen dell'Osservatorio di Monte Mario, usando un rapporto  $1/8$  per le righe del magnesio e  $1/4$  per le calibrazioni e mantenendo sempre la velocità di trasmissione minima. Larghezza e altezza della prima fenditura (proiettate sulla lastra) furono di  $12\mu$  e  $40\mu$  rispettivamente.

TABELLA II.

*Confronto Minnaert (M) con Fortini-Caprioli (FC).*

$\Delta\lambda$	$\lambda = 5167,3$		$\Delta\lambda$	$\lambda = 5172,7$		$\Delta\lambda$	$\lambda = 5183,6$	
	M	FC		M	FC		M	FC
1,69 $\nu$	94,5	95,0	2,52 $\nu$	95,8	94,1	2,90 $\nu$	96,5	94,5
1,39	91,0	93,0	1,84	89,5	88,3	2,48	95,1	93,1
1,00	26,0	29,0	1,43	89,2	87,2	2,36	90,5	91,8
0,52	84,5	86,5	1,1	20,0	25,8	2,27	78,0	81,7
0,42	68,0	69,5	0,87	69,5	72,3	2,17	90,0	90,7
0,30	55,0	54,2	0,47	50,0	54,5	1,77	82,2	83,8
0,21	41,0	40,3	0,14	28,2	28,0	1,51	86,0	84,4
0,13	20,0	21,9		9,9	10,9	0,95	71,5	74,5
0,06	10,3	13,8	0,15 $r$	27,0	25,8	0,64	61,0	59,4
0,05 $r$	18,7	21,2	0,62	61,0	64,1	0,30	41,0	39,2
0,10	11,9	15,9	0,92	76,8	76,5	0,24	31,5	32,2
0,21	37,0	37,4	1,05	34,0	38,4	0,08	22,0	22,2
0,48	73,0	75,6	1,19	82,2	81,2		8,0	11,5
0,64	80,1	83,2	1,31	91,4	89,7	0,12 $r$	21,5	21,7
0,80	76,8	81,5	2,42	99,0	95,1	0,27	30,0	31,5
1,19	86,1	91,1				0,55	43,0	44,4
1,27	39,0	44,1				0,69	34,0	36,4
1,40	76,0	78,4				0,85	62,8	61,5
1,52	21,0	24,1				0,95	41,5	45,3
1,57	28,2	32,9				1,04	72,0	68,6
1,65	19,0	22,3				1,25	78,0	77,5
2,17	95,9	94,0				1,43	82,2	79,9
						1,66	87,9	85,4
						2,16	91,8	88,6
						2,25	44,5	48,6
						2,55	95,9	91,6
						2,68	90,5	88,5
						2,82	95,5	93,5
						2,90	71,5	73,2
						3,30	98,3	97,0

Si è avuta particolare cura di registrare il continuo dello spettro da ambo i lati di ciascuna delle tre righe; ma tuttavia, per maggior sicurezza, il continuo è stato verificato anche con procedimento grafico e, se necessario, anche corretto secondo il metodo suggerito da Minnaert <sup>(7)</sup>.

Mediante le curve di calibrazione, si sono convertite le densità fotografiche in intensità (in per cento del continuo), di numerosi punti dello spettro. Si sono così potuti disegnare i profili delle tre righe, e per il centro del Sole confrontarli (vedi Tabella I) con il profilo relativo al centro del Sole, riportato sul *Phot. Atlas* del Minnaert <sup>(8)</sup>. Le intensità dei punti contenuti in questa Tabella I sono state corrette dai fantasmi del reticolo, per mezzo della formula empirica <sup>(9)</sup>:

$$i_c = (i_o - g) \frac{100}{100 - g}$$

$$\left[ \begin{array}{l} i_c = \text{intensità corretta; } i_o = \text{intensità osservata} \\ g = 2,84 \text{ per questo strumento e per questo ordine del reticolo }^{(10)} \end{array} \right]$$

Dalla stessa Tabella II risulta che il profilo delle tre righe da noi determinato per il centro del Sole, è in buon accordo con quello del Minnaert, determinato questo in base a materiale di osservazione ottenuto con lo stesso strumento e reticolo del nostro.

Come già abbiamo accennato precedentemente, a completare il presente lavoro, una seconda Nota apparirà entro i prossimi mesi su questi stessi « Rendiconti ».

**Astronomia.** — *Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse.* Nota II di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

I. Nella Nota I <sup>(1)</sup>, ho suggerito un nuovo metodo per la determinazione, senza bisogno di tabelle, delle orbite fotometriche delle stelle variabili ad eclisse, per mezzo della derivazione grafica della curva di luce.

Il calcolo da me proposto conduce ad un sistema di equazioni, la cui soluzione serva a determinare le incognite e cioè: i raggi  $r$  ed  $r_1$  delle due stelle che compongono la variabile, misurati prendendo per unità il raggio  $a$  dell'orbita circolare; l'inclinazione  $J$  del piano dell'orbita sul piano tangente alla sfera celeste; la luminosità superficiale  $h$  dell'astro principale e di con-

(7) Cfr. M. MINNAERT, « Zs. f. Ap. », 10, 40 (1935).

(8) Cfr. MINNAERT, HOUTGAST, MULDER, *Photometric Atlas of the Solar Spectrum* Amsterdam 1940.

(9) Cfr. A. UNSOLD, *Physik der Sternatmosphären*, S. 246.

(10) Cfr. ancora il *Phot. Atlas*.

(\*) Nella seduta del 12 gennaio 1957.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXI, fasc. 6, 1956.

sequenza quella dell'astro satellite, trascurando il fenomeno dell'oscuramento al bordo. Nella presente Nota, dò una applicazione pratica del metodo suggerito.

2. A tale scopo, ho scelto la variabile ad eclissi parziali V 805 *Aquilae*, i cui elementi sono stati calcolati, con tutt'altro metodo, dal prof. A. Fresa <sup>(2)</sup> dell'Osservatorio astronomico di Napoli, in base alle osservazioni da lui stesso eseguite col fotometro fotoelettrico.

Dalla curva di luce si può dedurre che, per questa variabile, l'orbita è circolare e le stelle sferiche, per cui non sono necessarie le correzioni per l'eccentricità dell'orbita e l'ellissoidicità dei globi stellari.

Sempre dalle osservazioni e dalla curva di luce, si hanno i seguenti dati, che traggio dal lavoro del prof. Fresa:

*Grandezza della variabile fuori eclisse:* Max. = 7<sup>m</sup>,81.

*T. U. elioc. del minimo principale:* = D. J. 2427927,8470 + 2<sup>d</sup>,408230.

*Fase del minimo secondario:* = 1<sup>d</sup>,202.

*Durata dell'eclisse principale:* = 0<sup>d</sup>,277 = 6<sup>h</sup> 39<sup>m</sup>.

*Durata dell'eclisse secondaria:* = 0<sup>d</sup>,265 = 6<sup>h</sup> 22<sup>m</sup>.

*Profondità del minimo principale:* = 0<sup>m</sup>,67.

*Profondità del minimo secondario:* = 0<sup>m</sup>,29.

Le grandezze stellari sono quelle fotografiche, poiché è stata presa come riferimento dal prof. Fresa, nelle osservazioni, la stella HD 177758, la cui grandezza fotografica nel sistema di Harward, è 7,60.

Le osservazioni sono raccolte in luoghi normali, nella Tabella I del citato lavoro del Fresa, e di esse mi sono servita per i miei calcoli.

Dal confronto delle perdite relative di luminosità ai due minimi, ho tratto per il rapporto  $\lambda$  tra le intensità luminose superficiali dei due astri il valore di 0,5076. Essendo la grandezza fotografica del sistema fuori eclisse, 7<sup>m</sup>,81, ho avuto per l'intensità luminosa fuori eclisse  $I = 0,0007513$ , avendo preso per unità di intensità quella di una stella di grandezza fotografica zero.

Per ogni osservazione relativa al minimo principale, ho calcolato poi le differenze  $0,0007513 - i_k$  (dove  $i_k$  è l'intensità misurata ad un istante qualsiasi  $t_k$ ) e per ogni osservazione del minimo secondario, ho determinato le quantità  $(0,0007513 - i_k): \lambda$ , usando entrambi i minimi per ottenere maggiore sicurezza. I valori così trovati e riportati in grafico in funzione del tempo, (essendo il giorno l'unità di misura), mi danno due curve uguali, come era da aspettarsi per aver tenuto conto del rapporto  $\lambda$  degli splendori superficiali. Inoltre, poiché i due tratti di ciascuna curva sono simmetrici, per aver una definizione il più possibile esatta, dell'andamento della curva stessa, ho riportato tutte le osservazioni su un solo ramo; sia che spettino all'uno o allo altro dei due minimi, sia che riguardino l'avanzare o il regredire dell'eclisse.

(2) A. FRESA, *Curva di luce ed orbita fotoelettrica della variabile ad eclisse V 805 Aquilae*, «Memorie della Società Astr. Ital.», vol. XXV, n. 2.



Nella figura 1, il grafico rappresenta la perdita dell'intensità luminosa, durante le eclissi, direttamente proporzionale all'area occultata. Per avere il valore della sua variazione, nell'unità di tempo, in un momento qualsiasi, basta quindi eseguire la derivazione grafica e tener presente che all'avanzare dell'eclisse, la derivata ha segno positivo, mentre in fase di uscita dall'eclisse, la derivata ha segno negativo. Ciò che importa, però, nei calcoli seguenti, è il quadrato del valore di tale derivata.

3. Per la ricerca degli elementi del sistema fotometrico, fatte le posizioni (23), (28), (29); della mia Nota I, è necessario applicare le equazioni (30).

Sarebbe desiderabile scrivere un sistema di parecchie equazioni, nelle incognite  $x, y, z, X^2, X$ , da risolvere poi col metodo dei minimi quadrati; però, sia per maggior semplicità, sia perché i valori  $|di/dt|$  tratti dalla curva della figura mi sono sembrati abbastanza sicuri, ho scritto le equazioni (30) solo per cinque luoghi normali. Ho potuto ottenere i valori  $|di/dt|$  con sufficiente precisione, sino alla settima cifra decimale, poiché ho scelto per il disegno una scala molto grande; infatti ho preso per intensità  $i = 0,0001 = 20$  millimetri, e per il tempo ho posto  $0^d,01 = 50$  millimetri.

Credo che ciò sia sufficiente; giacché lo scopo del mio metodo è quello di dare, in modo semplice e senza l'aiuto di tabelle, una prima orbita fotometrica, che può essere eventualmente migliorata.

Nella seguente Tabella, la prima colonna indica il numero d'ordine nella Tabella I del prof. Fresa, la seconda l'angolo  $\varphi$  di fase, la terza, la quantità  $|di/dt|$ .

TABELLA.

N	Fase	$\left  \frac{di}{dt} \right $
3	$2^\circ, 34699$	0,0018292
9	$13, 75308$	0,0028456
25	$165, 54523$	0,0027174
28	$173, 90172$	0,0031645
65	$350, 19527$	0,0032894

Le equazioni (30) della mia Nota I si scrivono allora:

$$\begin{aligned}
 &0,9966486 x' - 1,9966458 y' - z' + 2,9263363 X^2 - 5,8625048 X + 2,9361766 = 0 \\
 &0,8901556 x' - 1,8869612 y' - z' + 0,1985729 X^2 - 0,4209369 X + 0,2230766 = 0 \\
 &0,8792663 x' - 1,8753840 y' - z' + 0,1632527 X^2 - 0,3482012 X + 0,1856693 = 0 \\
 &0,9775164 x' - 1,9773886 y' - z' + 1,2890061 X^2 - 2,6074918 X + 1,3186542 = 0 \\
 &0,9428427 x' - 1,9420018 y' - z' + 0,5322877 X^2 - 1,0963691 X + 0,5645562 = 0
 \end{aligned}$$

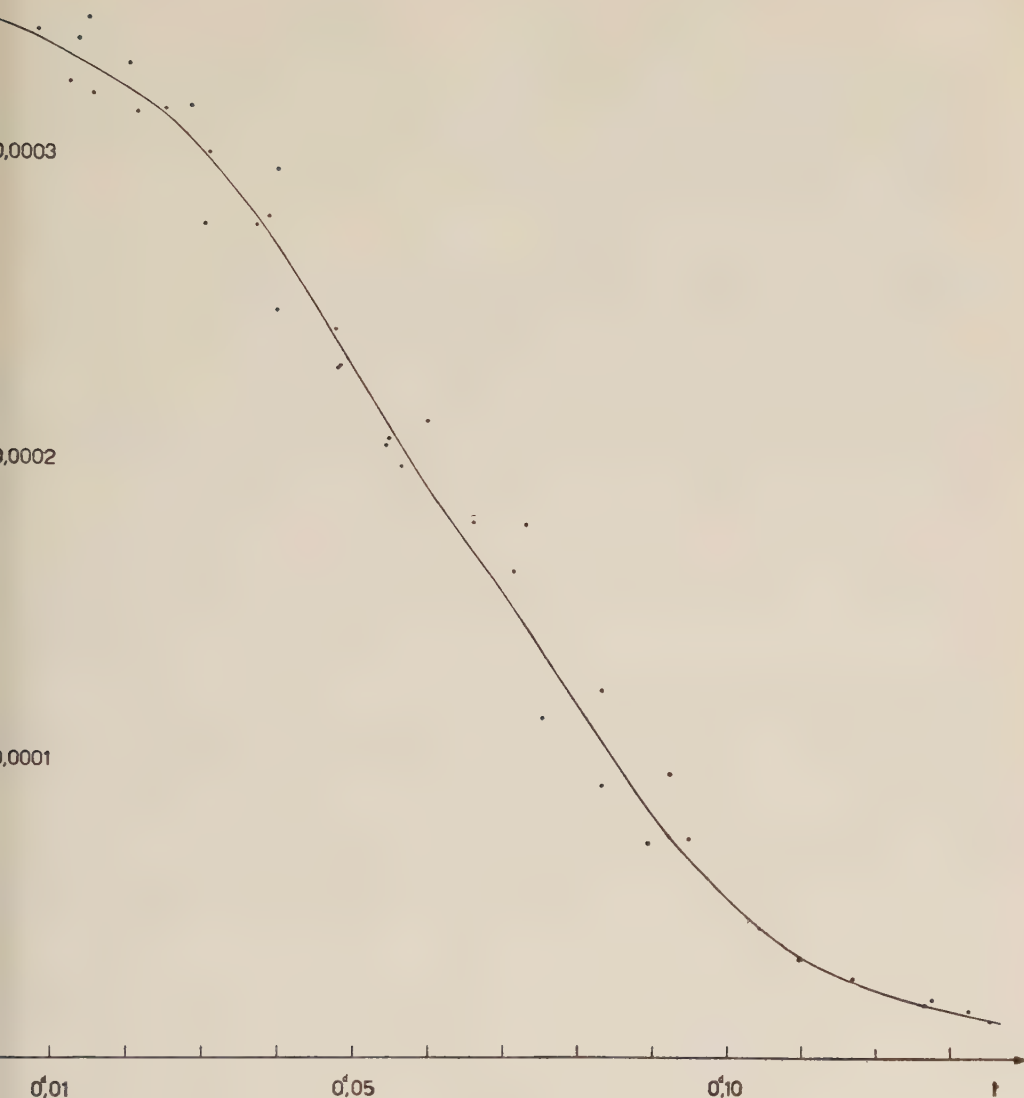


Fig. 1.

in cui, per comodità di calcolo, ho moltiplicato per  $10^4$  i coefficienti dei termini in  $X^2$ ,  $X$  ed il termine noto ed ho posto:

$$(31) \quad x = \frac{x'}{10^4} \quad ; \quad y = \frac{y'}{10^4} \quad ; \quad z = \frac{z'}{10^4}.$$

La risoluzione del sistema mi ha fornito i seguenti valori:

$$x' = 0,2228914 \quad ; \quad y' = 0,2100631 \quad ; \quad z' = -0,1971187;$$

$$X^2 = 0,9886665 \quad ; \quad X = 0,9943171$$

da questi, tenendo presenti le (31), le (29), e le (23), ho infine ricavato:

$$J = 85^{\circ},7 \quad ; \quad r = 0,194 \quad ; \quad r_1 = 0,158 ;$$

$$k = (r_1/r) = 0,81 \quad ; \quad h = 0,0047753$$

dove, come abbiamo già detto, indichiamo con  $h$  l'intensità luminosa superficiale dell'astro principale, di cui possiamo servirci per determinare l'area massima occultata  $s_0$  avendo ricavato, dal disegno, che l'intensità massima perduta al momento centrale dell'eclisse, è  $i = 0,0003460$ .

Abbiamo perciò  $s_0 = 0,07246$ .

Ho applicato infine la relazione:  $I = \pi h (r^2 + \lambda r_1^2)$ , che mi permette di calcolare l'intensità luminosa della variabile fuori eclisse; ed ho ottenuto:  $I = 0,0007547$ , ciò che mi assicura che il raggio maggiore appartiene alla stella principale e che l'orbita calcolata è sufficientemente esatta, poiché si ha dalle osservazioni  $I = 0,0007513$ .

L'orbita fotometrica da me trovata col mio metodo, è in buon accordo con quella determinata per tutta altra via, dal prof. Fresa; infatti egli stabilisce i seguenti dati:

$$\lambda = 0,5076 \quad ; \quad J = 85^{\circ},4 \quad ; \quad r = 0,191 \quad ; \quad r_1 = 0,163 ;$$

$$k = 0,85 \quad ; \quad s_0 = 0,07258 .$$

**Fisica matematica.** — *Intorno alla propagazione di onde elettromagnetiche nei superconduttori e ai teoremi di reciprocità del campo elettromagnetico.* Nota di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Com è noto, il potenziale vettore del campo elettromagnetico, introdotto da H. Hertz <sup>(1)</sup> nelle sue celebri ricerche intorno alla propagazione delle onde elettromagnetiche, ha un ufficio fondamentale nella integrazione delle equazioni di Maxwell.

L'analisi dei problemi al contorno sollevati dalla teoria della propagazione fondata sul potenziale di Hertz è stata l'opera di numerosi fisici matematici della prima metà del nostro secolo.

A tale riguardo è dominante l'opera di Sommerfeld e della sua scuola, i cui metodi generali trovansi illustrati in due classiche trattazioni <sup>(2)</sup>.

Oggetto di particolare considerazione è il caso in cui le grandezze del campo variano nel tempo con legge armonica, la frequenza essendo la medesima per tutte le grandezze.

(\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) *Die Kräfte elektrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwellschen Theorie*, « Ges. Werke », Bd. II.

(2) *Elektromagnetische Schwingungen*, in Frank-Mises, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Bd. II, 1935; *Probleme der drahtlosen Telegraphie*, in *Vorlesungen über theoretische Physik*, Bd. VI, Partielle Differentialgleichungen der Physik.

Fin dal 1896, Lorentz <sup>(3)</sup> ha richiamato l'attenzione su codesto caso e ha dimostrato un teorema di reciprocità, il quale ha poi dato luogo a numerose ricerche di grande interesse per le radiocomunicazioni, prime fra tutte quelle di Sommerfeld esposte nel primo dei lavori citati alla Nota <sup>(2)</sup>. Ivi il teorema di Lorentz viene illustrato nel caso di due dipoli di Hertz e viene sottolineata la circostanza che la proprietà di reciprocità vale quale che sia la natura del mezzo in cui sono immersi i dipoli.

Codeste ricerche si riferiscono a mezzi dielettrici, conduttori perfetti o semiconduttori.

Non mi consta che esse siano state estese ai superconduttori, la cui teoria fenomenologica, secondo F. London, è stata oggetto di una magistrale esposizione del Laue <sup>(4)</sup>, arricchita dai contributi dell'illustre Autore.

Scopo di questa Nota è di mostrare che i risultati di Lorentz e Sommerfeld valgono anche per i superconduttori. L'affermazione conclusiva del lavoro consiste in ciò che ai fini della propagazione delle onde elettromagnetiche nei superconduttori le cose vanno come se si trattasse di conduttori normali, la cui costante dielettrica  $\epsilon$  sia espressa da

$$\epsilon = \epsilon_0 - \frac{1}{\lambda \omega^2},$$

essendo  $\epsilon_0$  la costante d'influenza del vuoto,  $\omega$  la pulsazione dell'onda,  $\lambda$  la costante di London del superconduttore.

Avvertiamo che in questa Nota viene usata la metrologia di Giorgi, la stessa che usa il Sommerfeld nelle sue *Vorlesungen*. Lo stesso Autore ha usato la metrologia di Gauss nel primo lavoro citato in <sup>(2)</sup>, mentre Laue usa la metrologia di Lorentz.

2. Seguendo F. London, si ammette che la costante dielettrica e la permeabilità magnetica di un superconduttore siano quelle del vuoto  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ , legate dalla celebre relazione

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1,$$

$c$  essendo la velocità della luce nel vuoto.

Prescindendo dalla presenza nel campo di cariche spaziali, le grandezze  $\mathfrak{E}$  ed  $\mathfrak{H}$  debbono soddisfare al sistema di equazioni

$$\begin{aligned} (1) \quad & \mu_0 \dot{\mathfrak{H}} = - \operatorname{rot} \mathfrak{E} \\ (2) \quad & \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \\ (3) \quad & \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \mathfrak{H} \\ (4) \quad & \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \\ (5) \quad & \dot{\mathfrak{E}} = \mathfrak{H} \\ (6) \quad & \operatorname{rot} \mathfrak{E} = - \mu_0 \dot{\mathfrak{H}} \end{aligned}$$

(3) *The Theorem of Poynting concerning the Energy in the Electromagnetic Field and two general propositions concerning the propagation of Light*, « Versl. Kon. Akad. Wetensch. », 4, Amsterdam 1896.

(4) *Theorie der Supraleitung*, Berlin, Springer, 1949.



dove  $\mathfrak{G}$  è la grandezza che Laue chiama superimpulso. Le equazioni (5), (6) sono nuove in confronto alla teoria maxwelliana e sono caratteristiche della teoria di London. La densità di corrente totale  $\mathfrak{G}$  che figura al primo membro della (3) si compone di tre termini

$$(7) \quad \mathfrak{G} = \epsilon_0 \dot{\mathfrak{G}} + \mathfrak{J}^0 + \mathfrak{J}'$$

e cioè della densità di corrente di spostamento  $\epsilon_0 \dot{\mathfrak{G}}$ , di quella della conduzione normale e infine della densità di supercorrente  $\mathfrak{J}'$ . Nel caso più generale di superconduzione la teoria di London ammette la coesistenza di una corrente di conduzione normale.

Riguardo alla conduzione normale si ammette la validità della legge di Ohm nella forma maxwelliana

$$(8) \quad \mathfrak{J}^0 = \sigma \mathfrak{G}.$$

Prescindiamo qui dalla generalizzazione tensoriale.

Riguardo alla superconduzione si ammette, con London, che la supercorrente sia proporzionale al superimpulso, talché

$$(9) \quad \mathfrak{J}' = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{G},$$

dove, come abbiamo già detto al n. 1,  $\lambda$  è la cosiddetta costante di London.

Il Laue ha proposto la generalizzazione tensoriale della (9), ma noi qui per semplicità vogliamo considerare il caso in cui vale la (9), cioè per i superconduttori che cristallizzano nel sistema cubico, quali ad esempio l'alluminio e il piombo.

Tenendo conto della (5), la (9) assume la forma

$$(10) \quad \dot{\mathfrak{J}}' = \frac{1}{\lambda} \dot{\mathfrak{G}}$$

ed esprime la proporzionalità tra l'intensità elettrica del campo e la velocità di variazione della densità di supercorrente.

3. Le equazioni (1) e (3) sono dunque

$$(1) \quad \mu_0 \dot{\mathfrak{H}} = -\text{rot } \mathfrak{G}$$

$$(3') \quad \epsilon_0 \ddot{\mathfrak{G}} + \sigma \dot{\mathfrak{G}} + \frac{1}{\lambda} \mathfrak{G} = \text{rot } \dot{\mathfrak{H}}.$$

Derivando rispetto al tempo la (3') e moltiplicando ambo i membri per  $\mu_0$ , si ha, tenendo conto della (10)

$$\epsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathfrak{G}} + \sigma \mu_0 \dot{\mathfrak{G}} + \frac{\mu_0}{\lambda} \mathfrak{G} = \text{rot } (\mu_0 \dot{\mathfrak{H}})$$

e quindi per la (1)

$$\epsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathfrak{G}} + \sigma \mu_0 \dot{\mathfrak{G}} + \frac{\mu_0}{\lambda} \mathfrak{G} = -\text{rot rot } \mathfrak{G} = \Delta \mathfrak{G} - \text{grad div } \mathfrak{G}.$$

Infine, in virtù di (4) si ha

$$(11) \quad \Delta \mathfrak{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \ddot{\mathfrak{E}} + \sigma \mu_0 \dot{\mathfrak{E}} + \frac{\mu_0}{\lambda} \mathfrak{E}.$$

La stessa equazione si ha per  $\mathfrak{H}$ .

4. Se nella (11) si pone

$$\mathfrak{E} = e^{-i\omega t} \mathfrak{E}^*$$

si trova per  $\mathfrak{E}^*$  l'equazione di Helmholtz

$$(12) \quad \Delta \mathfrak{E}^* + k^2 \mathfrak{E}^* = 0,$$

avendo posto

$$(13) \quad k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 - \frac{\mu_0}{\lambda} + i \sigma \mu_0 \omega.$$

Quest'espressione di  $k^2$  può essere posta nella forma

$$(13') \quad k^2 = \varepsilon'_0 \mu_0 \omega^2$$

essendo

$$(14) \quad \varepsilon'_0 = \varepsilon_0 - \frac{1}{\lambda \omega^2} + i \frac{\sigma}{\omega},$$

La (14) può chiamarsi la costante dielettrica complessa del superconduttore. Come si vede, essa differisce dalla costante dielettrica complessa di un semiconduttore solo per la parte reale.

5. Ammettendo che  $\mathfrak{E}$  ed  $\mathfrak{H}$  siano entrambe del tipo

$$(15) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = e^{i\omega t} \mathfrak{E}^* \\ \mathfrak{H} = e^{i\omega t} \mathfrak{H}^* \end{cases}$$

le equazioni (1) e (3') diventano

$$(1') \quad i \mu_0 \omega \mathfrak{H}^* = \text{rot } \mathfrak{E}^*$$

$$(3'') \quad \left( -i\omega\varepsilon_0 + \sigma + \frac{i}{\lambda\omega} \right) \mathfrak{E}^* = \text{rot } \mathfrak{H}^*,$$

avendo scelto per il superimpulso  $\mathfrak{G}$  la determinazione

$$(16) \quad \mathfrak{G} = -\frac{1}{i\omega} \mathfrak{E}.$$

Tenendo presente l'espressione (13) di  $k^2$  si vede che la (3'') si può scrivere nella forma seguente

$$(3''') \quad \frac{k^2}{i\omega\mu_0} \mathfrak{E}^* = \text{rot } \mathfrak{H}^*.$$

Si osservi che in virtù di (15) e (16), l'equazione di London (6) si riduce alla (1').

6. Vogliamo ora dimostrare che se  $\dot{\Pi}$  è una soluzione dell'equazione di Helmholtz

$$(17) \quad \Delta \dot{\Pi} + k^2 \dot{\Pi} = 0,$$

le grandezze

$$(18) \quad \dot{\mathcal{E}} = k^2 \dot{\Pi} + \text{grad div } \dot{\Pi}$$

$$(19) \quad \dot{\mathcal{H}} = \frac{k^2}{i\mu_0\omega} \text{rot } \dot{\Pi}$$

soddisfano alle equazioni del campo (1'), (3'''). Infatti, applicando l'operatore rot alla (18) si ha

$$\text{rot } \dot{\mathcal{E}} = k^2 \text{rot } \dot{\Pi}$$

e in virtù di (19) il secondo membro è eguale ad  $i\mu_0\omega\dot{\mathcal{H}}$ . Inoltre da (3''') si deduce

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{i\omega\mu_0}{k^2} \text{rot } \dot{\mathcal{H}}$$

e in virtù della (19)

$$\dot{\mathcal{E}} = \text{rot rot } \dot{\Pi}$$

la quale si identifica con la (18) in virtù della (17).

La grandezza

$$(20) \quad \Pi = e^{-i\omega t} \dot{\Pi}$$

è il potenziale di Hertz del campo del superconduttore.

7. Siano ora

$$\mathcal{E}_1, \quad \dot{\mathcal{H}}_1, \quad \mathcal{G}_1; \quad \mathcal{E}_2, \quad \dot{\mathcal{H}}_2, \quad \mathcal{G}_2$$

due differenti soluzioni del sistema di equazioni di Maxwell-London (1)-(6).

Si ha

$$\begin{cases} \mu_0 \dot{\mathcal{H}}_1 = -\text{rot } \mathcal{E}_1 & \dot{\mathcal{H}}_2 \\ \mathcal{E}_1 = \text{rot } \dot{\mathcal{H}}_1 & -\mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_0 \dot{\mathcal{H}}_2 = -\text{rot } \mathcal{E}_2 & -\dot{\mathcal{H}}_1 \\ \mathcal{E}_2 = \text{rot } \dot{\mathcal{H}}_2 & \mathcal{E}_1. \end{cases}$$

Moltiplicando ambo i membri delle singole equazioni per le grandezze indicate nella colonna di destra e sommando, si ha

$$\mu_0 \{(\dot{\mathcal{H}}_1 \dot{\mathcal{H}}_2 - \dot{\mathcal{H}}_2 \dot{\mathcal{H}}_1) + (\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1)\} = \dot{\mathcal{H}}_1 \text{rot } \mathcal{E}_2 - \dot{\mathcal{H}}_2 \text{rot } \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 \text{rot } \dot{\mathcal{H}}_2 - \mathcal{E}_2 \text{rot } \dot{\mathcal{H}}_1$$

ovvero

$$(21) \quad \mu_0 \{(\dot{\mathcal{H}}_1 \dot{\mathcal{H}}_2 - \dot{\mathcal{H}}_2 \dot{\mathcal{H}}_1) + (\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1)\} = \text{div } \mathcal{E}_2 \wedge \dot{\mathcal{H}}_1 - \text{div } \mathcal{E}_1 \wedge \dot{\mathcal{H}}_2.$$

Come già ha osservato Lorentz per il caso della conduzione normale, accade anche per i superconduttori che il primo membro dell'equazione (21) è identicamente nullo, quando si supponga che le soluzioni considerate delle equazioni di Maxwell-London siano periodiche armoniche con la stessa frequenza.

Ammettiamo infatti che gli stati del campo siano rappresentati da

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_1 &= e^{-i\omega t} \mathfrak{E}_1^* & , & & \mathfrak{H}_1 &= e^{-i\omega t} \mathfrak{H}_1^* \\ \mathfrak{E}_2 &= e^{-i\omega t} \mathfrak{E}_2^* & , & & \mathfrak{H}_2 &= e^{-i\omega t} \mathfrak{H}_2^* .\end{aligned}$$

Ad essi corrispondono due superimpulsi  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$  definiti da

$$\mathfrak{G}_1 = -\frac{1}{i\omega} \mathfrak{E}_1 \quad , \quad \mathfrak{G}_2 = -\frac{1}{i\omega} \mathfrak{E}_2 .$$

Le corrispondenti densità di supercorrente sono

$$\mathfrak{J}_1^l = -\frac{1}{i\lambda\omega} \mathfrak{E}_1 \quad , \quad \mathfrak{J}_2^l = -\frac{1}{i\lambda\omega} \mathfrak{E}_2$$

e le densità di corrente totale sono

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_1 &= \left[ \sigma + i \left( \frac{1}{\lambda\omega} - \varepsilon_0 \omega \right) \right] \mathfrak{E}_1 \\ \mathfrak{G}_2 &= \left[ \sigma + i \left( \frac{1}{\lambda\omega} - \varepsilon_0 \omega \right) \right] \mathfrak{E}_2 .\end{aligned}$$

È allora evidente che il 1° membro di (21) è nullo.

Infatti, si ha

$$\begin{aligned}\dot{\mathfrak{H}}_1 \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_2 \dot{\mathfrak{H}}_1 &= -i\omega e^{-2i\omega t} (\mathfrak{H}_1^* \mathfrak{H}_2^* - \mathfrak{H}_2^* \mathfrak{H}_1^*) = 0 . \\ \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_1 &= \left[ \sigma + i \left( \frac{1}{\lambda\omega} - \varepsilon_0 \omega \right) \right] (\mathfrak{E}_1^* \mathfrak{E}_2^* - \mathfrak{E}_2^* \mathfrak{E}_1^*) = 0 .\end{aligned}$$

Concludiamo che continua a sussistere per i superconduttori e per gli stati vibratorii periodici armonici la legge di reciprocità di Lorentz

$$(22) \quad \text{div } \mathfrak{E}_2^* \wedge \mathfrak{H}_1^* = \text{div } \mathfrak{E}_1^* \wedge \mathfrak{H}_2^* .$$

La nostra indagine ha dunque posto in luce la circostanza che i metodi di studio delle onde elettromagnetiche periodiche armoniche nei superconduttori del sistema cubico sono quegli stessi che valgono per i semiconduttori a condizione che la costante dielettrica complessa si deduca da quella dei semiconduttori

$$(23) \quad \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$

sostituendo al posto di  $\varepsilon$

$$(24) \quad \varepsilon_0 - \frac{1}{\lambda\omega^2} .$$



Per quanto riguarda le dimensioni di  $\lambda$ , si osservi che esse risultano dalla (10). Se con  $L$ ,  $T$ ,  $A$ ,  $Q$  si indicano le unità di lunghezze, tempi, lavori e cariche, si ha l'equazione dimensionale di  $\lambda^{-1}$

$$[\lambda^{-1}] = L^{-1} A^{-1} Q^2 T^{-2}$$

e quindi

$$[\lambda^{-1} \omega^{-2}] = L^{-1} A^{-1} Q^2$$

(rinunziamo, perché non necessario, a ridurre alle quattro grandezze fondamentali  $L$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $Q$ ).

D'altra parte le dimensioni della costante dielettrica sono

$$[\varepsilon] = QL^2 : \frac{\mathfrak{F}}{Q} = L^{-1} A^{-1} Q^2$$

essendo  $\mathfrak{F}$  il simbolo della forza unitaria.

Resta confermato che  $\lambda^{-1} \omega^{-2}$  è omogeneo ad una costante dielettrica.

Riguardo all'ordine di grandezza di  $\lambda$ , lo si può dedurre dalla relazione

$$\lambda = \frac{m_0}{e^2 N}$$

dove  $m_0$  ed  $e$  designano la massa di quiete dell'elettrone e la carica elementare, mentre  $N$  è il numero degli elettroni di superconduzione nel volume unitario.

Nel sistema di Giorgi i valori seguenti competono ad  $m_0$  ed  $e$

$$m_0 = 0,90 \cdot 10^{-30} \text{ Kg}$$

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} Q.$$

Ricerche concernenti la struttura cristallina dell'alluminio hanno condotto ad affermare che il numero  $N$  degli elettroni di superconduzione per metro cubo è dato da

$$N = 6,4 \cdot 10^{28} / m^3.$$

Si ha così per  $\lambda$  il valore approssimato

$$\lambda \sim 6 \cdot 10^{-22} (L^{-3} M^{-1} Q^2).$$

8. Mi sia consentito di chiudere la Nota con un'osservazione concernente i teoremi di reciprocità.

Non mi consta che il classico teorema di reciprocità di Green-Gauss abbia ricevuto una generalizzazione per i campi elettromagnetici variabili della specie più generale. Come abbiamo visto, Lorentz ne ha scoperta una, ma seguendo le linee tracciate da Ohm, lord Rayleigh, Helmholtz, cioè contemplando i casi in cui le grandezze variano armonicamente nel tempo.

Invece di procedere nella via or ora indicata si potrebbe seguire un'altra idea, per esempio quella di considerare il potenziale vettore  $\mathfrak{A}$  e il poten-

ziale scalare  $\psi$  (in analogia al caso elettrostatico di Green-Gauss in cui il potenziale vettore è identicamente nullo).

Consideriamo una distribuzione spaziale di cariche mobili e prescindiamo per semplicità dall'eventuale esistenza di semiconduttori o superconduttori.

Sia  $\rho$  la densità spaziale di carica, sia  $v$  la velocità nel generico punto  $Q$  del campo all'istante  $t$  generico.

Si ottengono soluzioni delle equazioni di Maxwell-Lorentz

$$(1) \quad \mu_0 \dot{\mathfrak{H}} = - \text{rot } \mathfrak{E}$$

$$(2) \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0$$

$$(3^{iv}) \quad \varepsilon_0 \dot{\mathfrak{E}} + \rho v = \text{rot } \mathfrak{H}$$

$$(4') \quad \text{div } \mathfrak{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

mediante le formule

$$(25) \quad \mathfrak{E} = - \text{grad } \psi - \dot{\mathfrak{A}}$$

$$(26) \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathfrak{A}$$

tutte le volte che, riguardando  $\rho$  e  $v$  come funzioni conosciute del posto e del tempo, le grandezze  $\mathfrak{A}$  e  $\psi$  soddisfano alle equazioni

$$(27) \quad \square \mathfrak{A} \equiv \Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} = - \mu_0 \rho v$$

$$(28) \quad \square \psi \equiv \Delta \psi - \frac{1}{c^2} \ddot{\psi} = - \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

e alla condizione addizionale di Lorentz

$$(29) \quad \text{div } \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\psi} = 0.$$

Ora è noto che le equazioni (27), (28) si possono compendiare in una equazione unica seguendo i criteri dell'elettrodinamica relativistica. Se si vuole usare la metrica euclidea nello spazio-tempo di Minkowski, occorre introdurre come quarta coordinata  $i c t$  al posto di  $t$ .

Si ha allora la seguente equazione fondamentale

$$(30) \quad \square \Omega = - \mu_0 \Gamma$$

dove  $\Omega$  e  $\Gamma$  sono due quadrivettori definiti come segue.

I componenti spaziali tridimensionali di  $\Omega$  e  $\Gamma$  sono rispettivamente  $\mathfrak{A}$  e  $\rho v$ , le componenti temporali dei medesimi sono  $i/c \psi$  ed  $i c \rho$ .

La condizione di Lorentz (29) esprime la solenoidalità quadridimensionale di  $\Gamma$

$$(31) \quad \text{div } \Gamma = 0.$$

Orbene, accanto ad una soluzione  $\Omega$  della (30) regolare in tutto lo spazio-tempo compreso l'infinito, corrispondente ad una determinata quadricorrente

$\Gamma$ , consideriamo un altro quadripotenziale  $\Omega'$  ovunque regolare, corrispondente ad un'altra quadricorrente  $\Gamma'$ .

Si avrà anche

$$(32) \quad \square \Omega' = -\mu_0 \Gamma'.$$

Sia  $\Sigma$  una superficie sferica dello spazio-tempo di centro fisso e raggio  $R$  e sia  $S$  la regione interna a  $\Sigma$ . Poiché vale il teorema di Green anche nello spazio-tempo, si ha

$$(33) \quad \int (\Omega \square \Omega' - \Omega' \square \Omega) dS = \int \left( \Omega \frac{\partial \Omega'}{\partial n} - \Omega' \frac{\partial \Omega}{\partial n} \right) d\Sigma.$$

Per la supposta regolarità all'infinito di  $\Omega$  ed  $\Omega'$ , il che significa che i prodotti

$$R^2 \Omega, \quad R^2 \Omega', \quad R^3 \frac{\partial \Omega}{\partial R}, \quad R^3 \frac{\partial \Omega'}{\partial R}$$

sono limitati quando  $R$  tende all'infinito, l'integrale del 2° membro di (33) tende a zero.

Si ha dunque

$$(34) \quad \int_{\dot{S}_\infty} (\Omega \square \Omega' - \Omega' \square \Omega) dS = 0$$

ovvero, per le (30), (32)

$$(35) \quad \int_{\dot{S}_\infty} \Omega \Gamma' dS = \int_{\dot{S}_\infty} \Omega' \Gamma dS$$

e infine

$$(36) \quad \int_{\dot{S}_\infty} \rho' (\mathcal{A} v' - \psi) dS = \int_{\dot{S}_\infty} \rho (\mathcal{A} v - \psi') dS.$$

Le integrazioni debbono essere eseguite sull'intero spazio-tempo. Esse si possono scindere in una integrazione tridimensionale (che ovviamente può essere ridotta ad una somma di un numero finito di addendi nel caso che la distribuzione delle cariche mobili si riduca ad un sistema discreto di cariche puntiformi) seguita da un'integrazione temporale su tutto l'asse da  $-\infty$  a  $+\infty$  della variabile  $t$ .

Non sembra che dalla legge di reciprocità ora stabilita si possa dedurre una legge concernente il generico istante. Ciò è dovuto alla ritardazione (la *Latenzzeit* degli Autori tedeschi) delle azioni elettromagnetiche delle cariche mobili.

Solo nel caso delle cariche in equilibrio si deduce dalla (36) il teorema relativo all'intero spazio tridimensionale  $\tau_\infty$

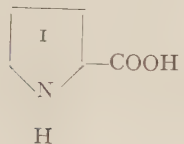
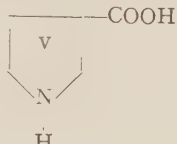
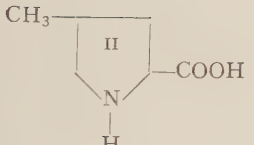
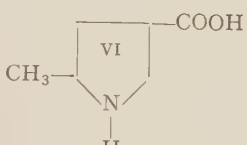
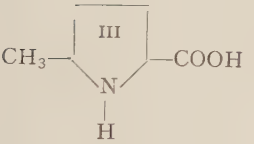
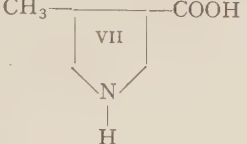
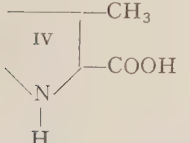
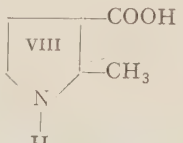
$$(36') \quad \int_{\tau_\infty} \rho' \psi d\tau = \int_{\tau_\infty} \rho \psi' d\tau$$

che è il classico teorema di Green-Gauss.

**Chimica.** — *Costanti di ionizzazione acida e comportamento spettrofotometrico nell'I.R. e nell'U. V. di acidi c-metil-pirrolidici* (\*). Nota di MARISA SCROCCO e RODOLFO NICOLAUS, presentata (\*\*) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

In relazione a precedenti lavori sull'argomento, viene presa in esame la serie degli acidi monopirrolcarbonici e dei loro esteri derivati dall' $\alpha$  e dal  $\beta$  metilpirrolo.

TABELLA I.

Sostanza	$pK_a$	Sostanza	$pK_a$
 <p>I</p>	4,40 (a)	 <p>V</p>	4,95 (a)
 <p>II</p>	4,60 (b)	 <p>VI</p>	5,35 (b)
 <p>III</p>	5,0 (b)	 <p>VII</p>	5,65 (b)
 <p>IV</p>	5,10 (b)	 <p>VIII</p>	5,80 (b)

(a) Questo lavoro.

(b) Misure eseguite da uno di noi e R. Caramazza nell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Napoli e che saranno oggetto di una prossima pubblicazione.

(\*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale ed Inorganica e di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.



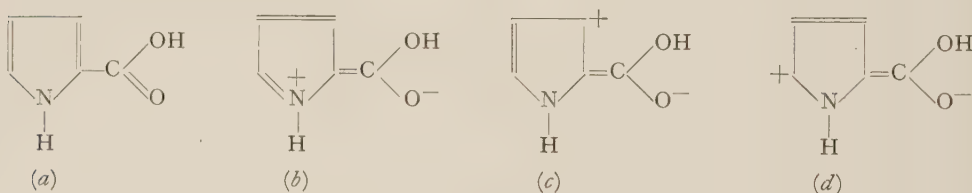
Per la serie degli acidi vengono, per il momento, forniti solamente valori di costante di ionizzazione acida del carbossile, mentre per la serie degli esteri vengono dati i valori di frequenza infrarossa dell'NH imminico, e le lunghezze d'onda U. V.

Dall'insieme di questi dati, che ci proponiamo di completare per la serie degli acidi in un prossimo lavoro, è possibile ricavare qualche informazione di carattere chimico-fisico e strutturalistico sul comportamento dei pirroli sostituiti: argomento che è ancora molto poco noto dato che tali pirroli si sono resi disponibili solo recentemente.

I risultati sono elencati nelle tabelle I e II.

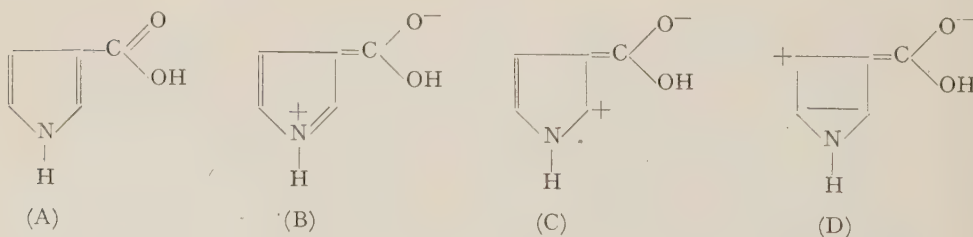
### DISCUSSIONE.

Se, in via del tutto approssimata, si adottano gli schemi della teoria della risonanza, si possono scrivere, per l'acido  $\alpha$ -pirrol-carbonico, le seguenti forme più significative:



dove le configurazioni nelle quali si può schematizzare la perturbazione dei sistemi elettronici  $p_z$  sono essenzialmente le (b), (c), e (d).

Per l'acido  $\beta$ -pirrol-carbonico sono, analogamente:

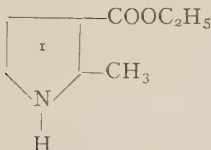
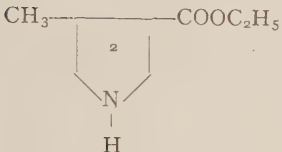
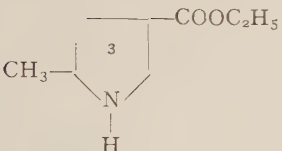
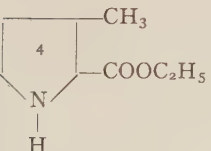
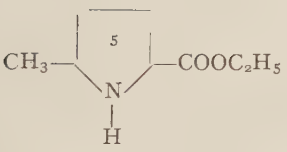
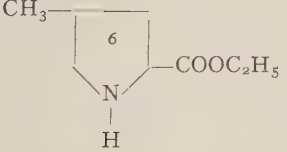


In quest'ultimo caso il termine (D) può essere trascurato per il suo basso contributo alla risonanza. Quindi nell'acido  $\beta$ -pirrol-carbonico le forme nelle quali si può schematizzare la perturbazione dei sistemi elettronici  $p_z$  sono solamente le (B) e (C).

Dall'esame di questi schemi si può trarre una prima interpretazione della diversa coniugazione del C=O nei due acidi che si considerano come da noi mostrato in una precedente Nota <sup>(1)</sup>.

(1) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XX, 795 (1956).

TABELLA II.

Sostanza	I.R. $\nu_{\text{N-H}}$ soluz. $\text{CCl}_4$	I.R. $\Delta\nu$	U.V. $\lambda_{\text{max}}$
	3481 3334	147	257
	3490 3346	144	234
	3483 3316	167	262
	3478 3328	150	268
	3462 3290	172	278
	3474 3332	142	(240) 276,5

Nelle misure U.V. di questi acidi si sono ottenuti i valori di  $\lambda_{\max} = 245 m\mu$  per l'acido  $\beta$ -pirrol-carbonico e di  $\lambda_{\max} = 262 m\mu$  per l'acido  $\alpha$ -pirrol-carbonico.

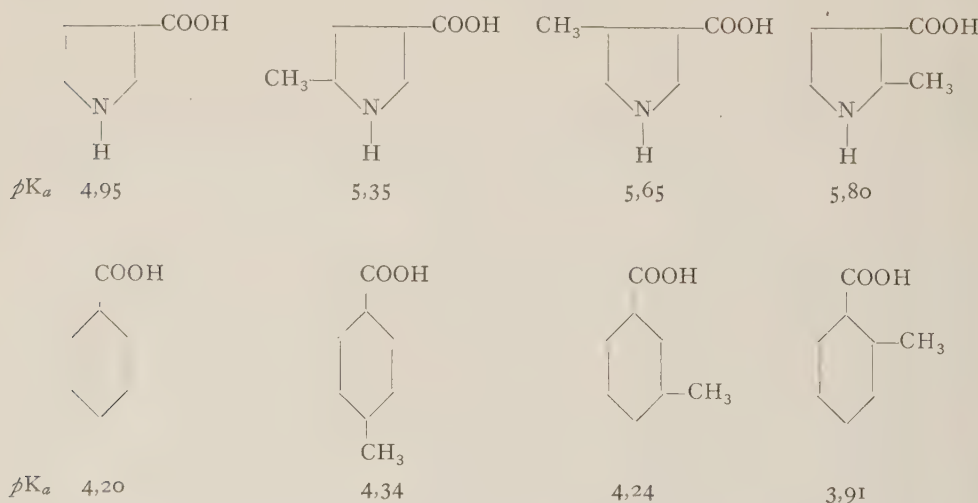
Da questi dati risulta che il gruppo C=O del carbossile è più coniugato nell' $\alpha$  acido che non nel  $\beta$  acido.

Le forme, infatti, tra le quali risuona quest'ultimo per un valore di  $C^+ - O^-$  polarizzato sono in numero minore che nell'acido  $\alpha$ -pirrol-carbonico (due forme contro tre), da cui un maggior valore nel carattere di doppio legame del C=O per il carbossile in posizione  $\beta$  che in posizione  $\alpha$ .

Per i valori di costante di ionizzazione acida noi troviamo, invece, che la sostituzione in  $\beta$  porta ad un valore di  $pK_a$  più alto che non la sostituzione in  $\alpha$  (4,95 contro 4,40  $pK_a$ ).

Questo anomalo alto valore nella costante di ionizzazione acida del composto  $\alpha$  sostituito e che si ripete per tutta la corrispondente serie metilata in confronto del  $\beta$  sostituito e dei suoi derivati, con ogni probabilità ha origine da un effetto di chelazione interna, simile a quello riscontrato da Branch e Yabroff<sup>(2)</sup> sull'acido salicilico, e che si somma all'effetto di risonanza.

Se ora, partendo dalle precedenti considerazioni, prendiamo in esame una delle serie degli acidi pirrolici metil sostituiti e la confrontiamo con la serie analoga del benzolo



appare immediatamente evidente che l'introduzione di un metile diminuisce, in genere, la forza dell'acido e l'andamento è parallelo nelle due serie tranne che per i termini con la sostituzione in «orto». Per quest'ultimi infatti, si ha un rafforzamento di acidità nel benzolo mentre, nel pirrolo si ha ancora una diminuzione nella forza dell'acido.

(2) G.E.K. BRANCH and DAVID L. YABROFF, « J. A. C. S. », 56, 2568 (1934).

La spiegazione di questo effetto, «orto» nel benzolo è stata piuttosto controversa.

Una ipotesi attribuisce l'effetto alla formazione di un legame idrogeno interno: così per esempio, Sidwick e Callow <sup>(3)</sup> per la salicilaldeide e per l'ortonitrofenolo.

Studi più recenti forniscono ora dati sufficienti per ritenere che il fenomeno sia invece essenzialmente dovuto ad un effetto di impedimento originato da una interferenza del sostituito in orto il quale farebbe ruotare il gruppo carbossilico fuori del piano dell'anello diminuendone così il contributo alla risonanza.

Questo effetto è conosciuto come «effetto di inibizione sterica di risonanza» <sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup>.

Dai dati di costante di ionizzazione acida da noi ottenuti, effetti simili di inibizione sterica in posizione orto non compaiono negli acidi pirrolici e l'innalzamento nel valore del  $pK_a$  ha un andamento costante per tutta la serie.

Sarà interessante tornare su questo argomento sostituendo in orto al carbossile dei gruppi alchilici di maggiore ingombro.

Non è facile però poter dire, per questi composti metilati, fino a che punto tale abbassamento nel valore della costante di ionizzazione sia dovuto a puro effetto induttivo del gruppo metilico e fino a che punto ad effetti di risonanza in cui viene stabilizzata, mediante l'introduzione del gruppo metile, l'una o l'altra delle forme.

Tale incertezza trova conferma nell'esame parallelo sulla costante di ionizzazione dell'NH la quale viene valutata, tenendo conto della relazione lineare osservata tra questa e la  $\Delta\nu$  <sup>(6)</sup> tra le vibrazioni libera ed associata dell'NH stesso, dai valori di  $\Delta\nu$  misurati.

Se esaminiamo questa differenza di frequenza per tutti i termini della serie partendo dai valori di  $\Delta\nu = 170 \text{ cm}^{-1}$  <sup>(7)</sup> per l'estere  $\beta$ -pirrol-carbonico e di  $\Delta\nu = 146 \text{ cm}^{-1}$  <sup>(7)</sup> per l'estere  $\alpha$ -pirrol-carbonico, si può vedere come l'introduzione di un gruppo  $-\text{CH}_3$  nella serie derivante dall'estere  $\beta$ -pirrol-carbonico origina degli effetti che possono, in genere, considerarsi di tipo induttivo. È da osservare, però, come, nel composto 3 della serie, che ha il metile in  $\alpha$  ed in posizione trans al carbossile, tale effetto sia quasi nullo mentre ci si sarebbe aspettato, per questo composto, l'effetto maggiore sia per la posizione di sostituzione ( $\alpha$ ), sia per la minore facilità di una induzione diretta del metile sul gruppo carbossilico, come potrebbe essere per gli altri composti, e che potrebbe diminuire l'azione del metile sull'NH.

Nella serie dell'estere  $\alpha$ -pirrol-carbonico si osserva invece, nei composti 4 e 5, addirittura un'inversione dell'effetto.

(3) SIDWICK and CALLOW, « J. Chem. Soc. », 125, 527 (1924).

(4) H. C. BROWN and G. K. BARBAS, « J.A.C.S. », 69, 1137 (1947).

(5) H. C. BROWN, M. D. TAYLOR and S. SUJISCHI, « J.A.C.S. », 73, 2464 (1951).

(6) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Atti Acc. Naz. Lincei », XXI, 103 (1956).

(7) Questi valori vengono da noi pubblicati in un'altra Nota.



Tale anomalo incremento nella protonizzazione dell'azoto, o meglio, tale incremento nella capacità chelante dell' $\text{NH}$  causato dall'introduzione di un  $-\text{CH}_3$  in certe posizioni, non è spiegabile con un effetto induttivo e si è portati a supporre che (specie quando tale sostituzione avvenga in posizione  $\alpha$ ) o intervenga un effetto di segno contrario a quello induttivo per il quale l'introduzione di un metile abbia la proprietà di stabilizzare la forma di risonanza con l'azoto protonizzato, o che tale introduzione (in posizione  $\alpha$ ) porti l'idrogeno imminico fuori del piano dell'anello. Ci proponiamo di approfondire ulteriormente questo problema.

Da questa sommaria descrizione dei dati che ci è stato possibile raccogliere intorno a queste sostanze appare evidente quanto siano ancora poco chiari questi fenomeni.

Una maniera per accertarsi se ed in qual grado modificazioni nella struttura molecolare diano origine a variazioni nei valori di alcune delle forme di risonanza previste, può essere ancora quella dello studio dello spettro ultravioletto.

Bonino e Marinangeli <sup>(8)</sup> hanno recentemente riassunto in maniera molto chiara quali possono essere le configurazioni elettroniche degli stati eccitati del gruppo  $\text{C}=\text{O}$  e, quindi, quali siano le transizioni elettroniche corrispondenti e quali quelle permesse dalle regole di selezione.

Ne risulta un notevole interesse per lo studio dell'assorbimento U.V. nella regione nella quale ci si può aspettare una banda di assorbimento attribuibile a transizioni di tipo  $\text{N} \rightarrow \text{V}$  che sono quelle più influenzabili, da effetti di coniugazione. Noi, per la nostra discussione, abbiamo per ora solo dei dati U.V. misurati sulla serie degli esteri in soluzione acquosa: le condizioni, quindi, in cui sono state fatte le misure non sono le migliori ed i dati possono essere solamente considerati come indicativi. Torneremo su questo argomento in un prossimo lavoro nel quale ci proponiamo di prendere in esame più a fondo gli spettri U.V. della serie degli acidi cercando, per queste misure, le condizioni migliori di attendibilità ed evitando, se possibile, perturbazioni imputabili a solventi ossidrilati o ad effetti dovuti alla esterificazione.

Comunque, si può vedere anche da questi dati sommari come ci siano dei netti spostamenti batocromi tra i vari termini della serie anche se non sempre chiaramente spiegabili.

Se prendiamo in esame la serie dell'estere  $\beta$ -pirrol carbonico si può vedere come mentre per il composto (2) della serie per il quale si è previsto un effetto di risonanza del tutto trascurabile (forma D), si ha una diminuzione di lunghezza d'onda rispetto all'estere non sostituito corrispondente (234  $\text{m}\mu$  contro 247  $\text{m}\mu$ ), per i composti (1) e (3) si hanno netti spostamenti batocromi che fanno supporre, per questi composti, una maggiore coniugazione del  $\text{C}=\text{O}$  con l'anello che non nel corrispondente estere non sostituito con gruppi metilici.

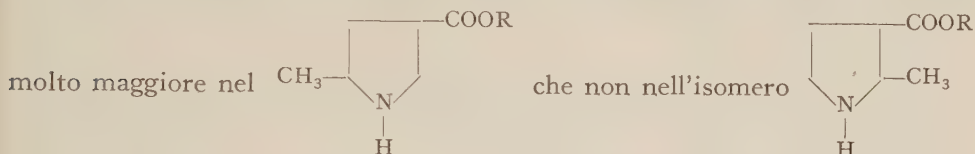
(8) G. B. BONINO e A. M. MARINANGELI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XIX, 222 (1951).

Non è altrettanto chiaro, invece, lo spostamento batocromo del termine (6) della serie.

Ci ripromettiamo in ogni modo di tornare sull'argomento non appena avremo dati ultravioletti più attendibili ed i corrispondenti valori di frequenza di vibrazione del  $C=O$  degli acidi.

A completamento dello studio di questo « effetto metile » sulla configurazione elettronica degli acidi pirrolici è interessante osservare quale diverso peso ha la « posizione » occupata dal  $-CH_3$  nell'anello sulla distribuzione elettronica nella molecola ed in particolare sulla protonizzazione dell'azoto che è l'elemento molecolare di più facile osservazione.

Si può vedere, per esempio, che la protonizzazione dell'azoto risulta



e la spiegazione può essere ricercata in una maggiore stabilizzazione della forma protonizzata dall'introduzione di un metile in posizione 5 che da una sostituzione in 2 come nell'isomero e, parimenti, per i derivati dall'estere  $\alpha$ -pirrolico, una stabilizzazione maggiore della forma protonizzata per l'introduzione di un  $-CH_3$  in posizione 5 che per una sostituzione in 3 o in 4.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Le sostanze in esame sono state preparate secondo quanto già descritto in un precedente lavoro <sup>(9)</sup>.

La purezza dei composti usati è stata controllata oltre che con i consueti metodi analitici, anche per cromatografia su carta.

Le misure I.R. sono state eseguite su soluzioni sature in tetracloruro di carbonio con un apparecchio Perkin Elmer 112 montato con prisma di fluoruro di litio e le misure nell'U.V. con un apparecchio Beckman D.U. in soluzione acquoso-alcoolica con un tenore di alcool di circa il 4°/∞. Le misure di  $pK_a$  dei gruppi carbossilici sono state eseguite con il metodo potenziometrico.

(9) R. A. NICOLAUS e L. MANGONI, « Annali di Chimica », 46, 847 (1956).

**Mineralogia.** — *Bonattite: un nuovo minerale di alterazione del giacimento elbano di Capo Calamita* (\*). Nota di CARLO L. GARAVELLI, presentata (\*\*) dal Socio G. CAROBBI.

Nel presente lavoro vengono espone alcune ricerche su di un campione minerale, raccolto nel giacimento di Capo Calamita nell'isola d'Elba, nel quale è stato possibile dimostrare la presenza, come costituente fondamentale, del solfato di rame triidrato  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ , accompagnato da piccole quantità di calcantite.

Già nel 1870 il grande Arcangelo Scacchi [1] pubblicò uno studio cristallografico di questo sale, da lui preparato artificialmente. Il composto risultò appartenere alla classe monoclinica domatica, con costanti cristallografiche:

$$a : b : c = 0,4321 : 1 : 0,5523 \quad ; \quad \beta = 96^\circ 25'$$

Questi valori si trovano riportati nella *Chemische Krystallographie* di P. Groth [2]. Successivamente, dopo numerosi lavori al riguardo, E. Posnjak e G. Tunell [3] riscontrarono definitivamente questo sale come una fase stabile nel sistema  $\text{CuO}-\text{SO}_3-\text{H}_2\text{O}$ , e ne delimitarono il campo di stabilità. Non mi risulta tuttavia che questo composto sia stato finora riscontrato in natura.

Il materiale descritto nel presente studio venne raccolto nella zona superiore del giacimento ferifero di Capo Calamita, al cantiere «Macei», in prossimità dello sbocco di una sorgente acida proveniente da una vecchia galleria ormai crollata e completamente ostruita. Queste acque derivano dall'ossidazione di pirite e solfuri di rame, e sono fortemente acide per  $\text{H}_2\text{SO}_4$  libero. Esse hanno determinato intorno alla sorgente la deposizione di copiose quantità di solfati di rame, magnesio e ferro bivalente.

L'esemplare qui in particolare descritto formava una crosta di pochi centimetri di spessore impiantata su di un blocco di skarn ad hedenbergite profondamente alterato. Queste incrostazioni sono di un bel colore ceruleo chiaro caratteristico, opache e prive di qualsiasi lucentezza; esse appaiono formate da un aggregato criptocristallino e mostrano una compattezza notevole. Al microscopio binoculare il materiale appare completamente omogeneo, e nemmeno con i maggiori ingrandimenti si riesce a porre in evidenza qualche cristallo di forma definita.

Al microscopio mineralogico, il minerale si risolve in un aggregato di minutissimi cristalli di forma indistinta, incolori, senza pleocroismo apprezzabile, e dotati di potere rifrangente piuttosto elevato. Anche con ingrandimenti molto forti il materiale conserva il suo aspetto omogeneo: possono

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia, Petrografia e Geochimica dell'Università di Firenze, Centro di studio per la Geochimica e la Mineralogia del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

se mai distinguersi alcune granulazioni ancora più minute, con polarizzazione di aggregato e potere rifrangente nettamente minore. È probabile che tali granulazioni siano da riferirsi alla calcantite, che le indagini chimiche e roentgenografiche hanno mostrato presente in piccola quantità.

L'estrema piccolezza dei cristalli e l'assenza di caratteristiche morfologiche individuabili, hanno impedito non solo ogni identificazione di angoli, piani di sfaldatura, ecc., ma anche una determinazione esatta degli indici di rifrazione. È stata possibile soltanto, per immersione in miscele di olio di vaselina, olio di cannella e monobromonaftalina, la valutazione di un indice di rifrazione medio, che è risultato compreso fra 1,578 ed 1,601. Le minute granulazioni cui si è accennato presentavano invece un indice medio nettamente inferiore ad 1,578.

Da misure ripetute della densità (per immersione in una miscela di tetrabromuro di acetilene e xilolo) ho ottenuto il valore di  $2,62 \pm 0,06$  a  $25^{\circ}\text{C}$ .

Poiché i saggi chimici preliminari avevano mostrato che la composizione del minerale era quella di un solfato idrato di rame, questi valori delle costanti fisiche hanno mostrato trattarsi con ogni probabilità del sale  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ . Per questa sostanza si desumono infatti, dalla letteratura, valori in buon accordo con quelli trovati per il minerale di Capo Calamita, come appare dal seguente prospetto:

$\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$		minerale in esame	
densità . . . .	2,663 . . . . .	2,62 $\pm$ 0,06	
indice $\alpha$ . . . .	1,554		
indice $\beta$ . . . .	1,577	indice medio	1,589.
indice $\gamma$ . . . .	1,618		

Il valore della densità è tratto dal lavoro di T. G. Thorpe e J. I. Watts [4]; i valori degli indici di rifrazione dal trattato di A. N. Winchell [5].

Sono state eseguite due analisi chimiche del materiale in esame. Nella prima di esse, il rame è stato dosato per via elettrolitica e l'acqua come perdita in peso dopo riscaldamento a  $280^{\circ}\text{C}$ ; nella seconda il rame è stato titolato iodometricamente, e l'acqua è stata titolata secondo Karl Fisher, con rivelazione potenziometrica del punto finale. In entrambi i casi, il magnesio è stato titolato mediante complessone III in presenza di nero eriocromo T; il radicale solforico è stato pesato come  $\text{BaSO}_4$ ; ed il ferro pesato come  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  e considerato tutto come bivalente. Le tracce minime di manganese sono state apprezzate per via colorimetrica.

Data la particolare natura del sale idrato analizzato, non è stata possibile una distinzione fra l'acqua di costituzione e la semplice umidità, e pertanto tutta l'acqua è stata considerata come essenziale, come d'altronde è lecito, data la composizione del materiale. Sono state comunque osservate le necessarie precauzioni onde impedire che le condizioni di idratazione del composto potessero variare col tempo, e mi sono accertato che la composizione restava praticamente costante a distanza di vari mesi. Per quanto concerne la determinazione di  $\text{H}_2\text{O}$  secondo Karl Fisher, ho potuto constatare che, nel caso di determinazioni dell'acqua di cristallizzazione di sali metallici, l'equivalenza apparente fra acqua e reattivo di Fisher varia in modo sensibile con la natura del catione. È stato pertanto adottato un fattore empirico, ottenuto mediante alcune determinazioni su  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ .



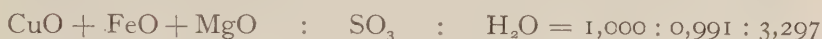
TABELLA I.

$\text{CuSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$		$\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$		$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$		Minerale di Capo Calamita	
$d$	$1/10$	$d$	$1/10$	$d$	$1/10$	$d$	$1/10$
4,85	47	5,10	68	10,5	8	5,09	65
4,79	65	4,85	30	6,11	8	4,83	33
4,73	47	4,72	26	5,77	27	4,69	18
3,71	9	4,42	100	5,72	27	4,40	100
3,62	12	3,96	44	5,46	100	3,96	37
3,43	100	3,69	16	5,21	16	3,69	9
3,37	85	3,65	52	5,13	16	3,65	54
3,19	32	3,43	48	4,83	5	3,42	50
3,13	79	3,29	10	4,71	63	3,28	9
2,582	12	3,25	64	4,66	60	3,24	67
2,515	15	3,18	40	4,28	15	3,18	35
2,480	41	3,01	40	3,98	67	3,00	39
2,430	15	2,972	22	3,70	30	2,970	21
2,365	9	2,819	42	3,54	20	2,814	43
2,264	24	2,747	10	3,45	15	2,743	26
2,233	21	2,660	6	3,30	18	2,660	6
2,069	6	2,557	8	3,27	13	2,550	6
2,020	21	2,498	40	3,18	16	2,494	39
1,910	9	2,420	12	3,05	25	2,420	9
1,814	9	2,353	16	2,911	7	2,349	11
1,672	18	2,277	36	2,865	27	2,275	33
1,592	26	2,213	14	2,825	33	2,211	9
1,566	10	2,104	14	2,790	7	2,103	11
		2,080	16	2,747	15	2,079	11
		1,947	10	2,660	12	1,938	11
		1,902	10	2,564	7	1,900	9
		1,827	10	2,530	3	1,824	9
		1,763	10	2,420	13	1,762	11
		1,724	10	2,409	16	1,722	11
		1,694	16	2,355	5	1,693	15
		1,659	12	2,333	7	1,658	15
		1,641	10	2,320	3	1,638	6
		1,614	18	2,198	8	1,613	20
				2,139	8		
				2,076	7		
				2,023	13		
				1,982	8		
				1,889	50		
				1,827	33		
				1,771	13		
				1,739	3		
				1,687	5		
				1,623	12		
				1,615	8		
				1,569	12		

Ecco i risultati delle due analisi, sensibilmente concordanti, ed i valori medi da essi calcolati:

	analisi 1		analisi 2		media
CuO . . . . .	35,18	. . . . .	35,28	. . . . .	35,23
FeO . . . . .	0,86	. . . . .	0,79	. . . . .	0,82
MnO . . . . .	tr.	. . . . .	tr.	. . . . .	tr.
MgO . . . . .	0,22	. . . . .	0,27	. . . . .	0,25
SO <sub>3</sub> . . . . .	36,28	. . . . .	36,69	. . . . .	36,49
H <sub>2</sub> O . . . . .	27,64	. . . . .	27,03	. . . . .	27,33
Totale . . . .	100,18	. . . . .	100,06	. . . . .	100,12

Da questi dati si ricavano i seguenti rapporti molecolari:



I risultati analitici mostrano chiaramente come nel campione in esame debba essere contenuto uno (od eventualmente più) idrati del  $\text{CuSO}_4$  a contenuto di  $\text{H}_2\text{O}$  inferiore a quello pertinente alla calcantite. Le ricerche sulle proprietà fisiche, esposte precedentemente, rendono plausibile l'ipotesi che questo sale meno idrato sia il  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ , accompagnato da piccole quantità di  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  che spiegano l'eccesso di acqua, rispetto a tre molecole, indicato dall'analisi chimica. Secondo questa interpretazione, la composizione mineralogica del materiale studiato (a parte le piccole quantità di ioni isomorfogeni con il  $\text{Cu}^{++}$ ) può esprimersi come segue:

$\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ (calcantite) . . . . .	14,85 %
$\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ . . . . .	85,15 %

Non può però ammettersi senza prove che la sostanza analizzata corrisponda ad una configurazione di equilibrio, ed essendo risultate d'altronde forzatamente troppo sommarie le determinazioni di costanti fisiche (in particolare ottiche e cristallografiche) che è stato possibile condurre sul materiale disponibile, è stato necessario ricorrere a metodi roentgenografici per l'ottenimento di informazioni definitive.

Data la relativa somiglianza degli spettri di polvere corrispondenti ai vari idrati del  $\text{CuSO}_4$ , che si trovano tabulati nella letteratura [6], ho rinunciato alla ripresa di debyeogrammi su pellicola. Sono stati eseguiti dapprima alcuni spettri di polvere utilizzando lo spettrogoniometro Philips in dotazione all'Istituto di Mineralogia di Pisa (1); i risultati conseguiti sono stati in seguito confermati ed ampliati utilizzando l'apparecchiatura XRD - 5 della General Electric attualmente in funzione nell'Istituto di Mineralogia di Firenze. L'accordo perfetto esistente fra le due serie di dati è particolarmente significativo per il minerale elbano qui studiato, che è risultato conservarsi inalterato di un intervallo in qualche mese.

(1) Debbo alla gentile ospitalità del Direttore, prof. S. Bonatti, che qui ringrazio unitamente ai suoi Assistenti, questa prima serie di registrazioni.

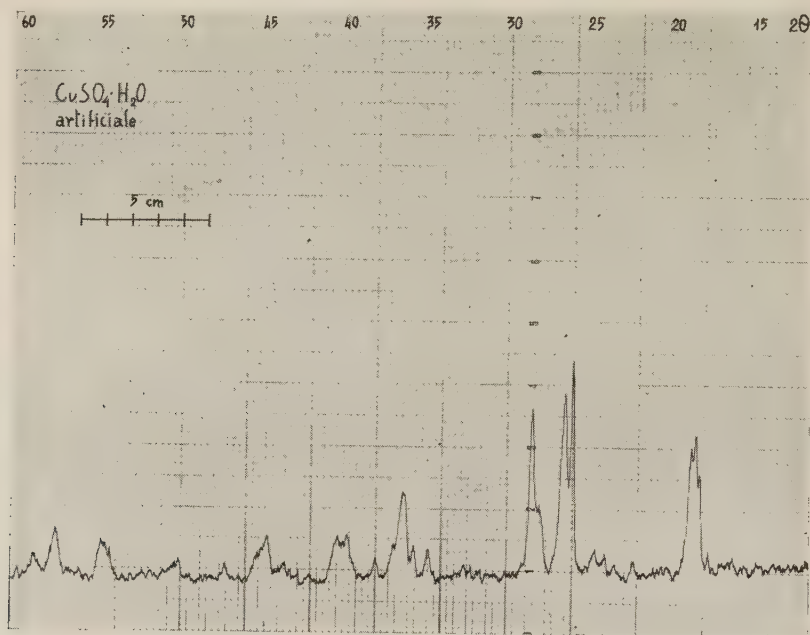


Fig. 1. - Solfato di rame monoidrato artificiale.

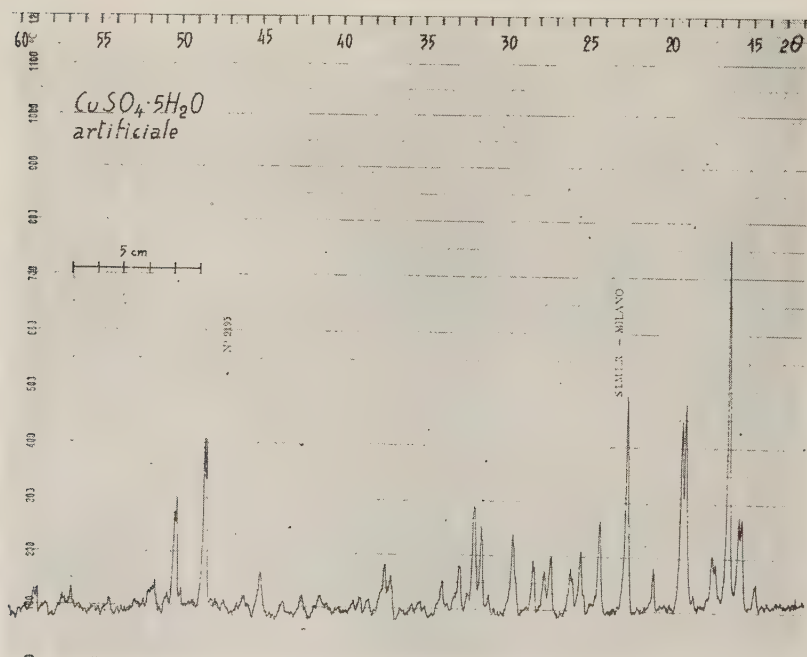


Fig. 2. - Solfato di rame pentaidrato artificiale.

Condizioni di ripresa (apparecchiatura General Electric XRD-5): Raggi X: 40 KV, 19 mA; fenditure:  $1^\circ \text{MR-MR} - 0,05^\circ$ ; sensibilità: 500 c.p.s. fondo scala; costante di tempo: 3,5 secondi; velocità del contatore:  $2^\circ$  al minuto; velocità della carta:  $30''/\text{ora}$ .

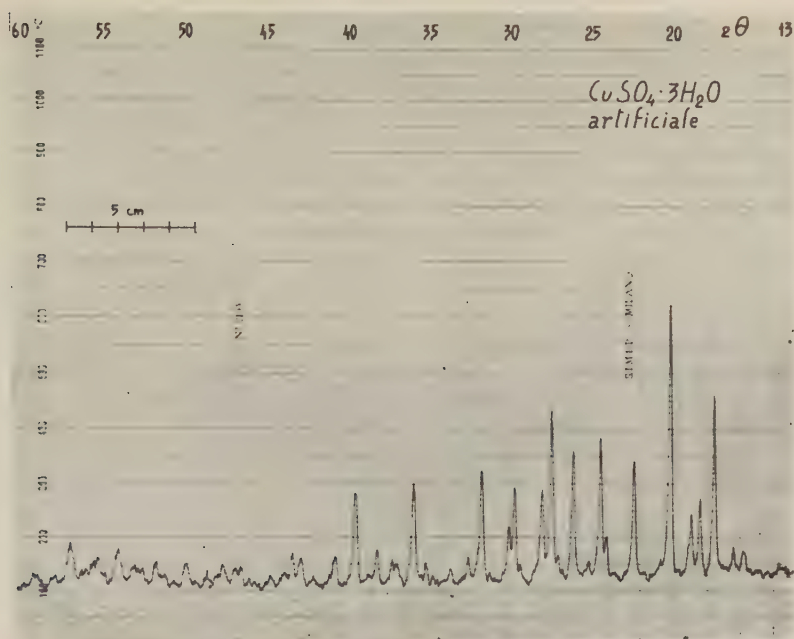
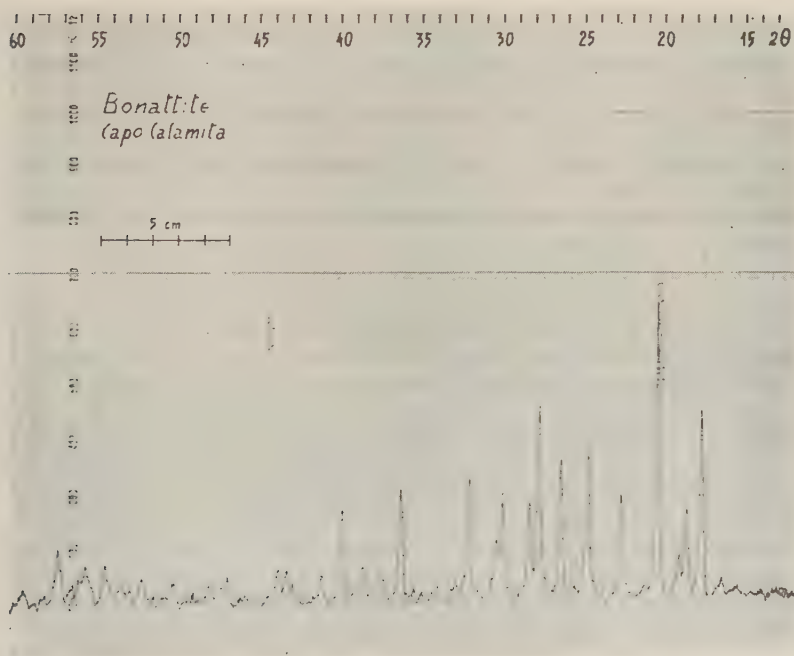


Fig. 3. - Solfato di rame triidrato artificiale.

Fig. 4. - *Bonattite* di Capo Calamita.

Condizioni di ripresa (apparecchiatura General Electric XRD - 5): Raggi X: 40 KV, 19 mA; fenditure:  $1^\circ$  MR-MR -  $0,05^\circ$ ; sensibilità: 500 c.p.s. fondo scala; costante di tempo: 3,5 secondi; velocità del contatore:  $2^\circ$  al minuto; velocità della carta:  $30''$ /ora.



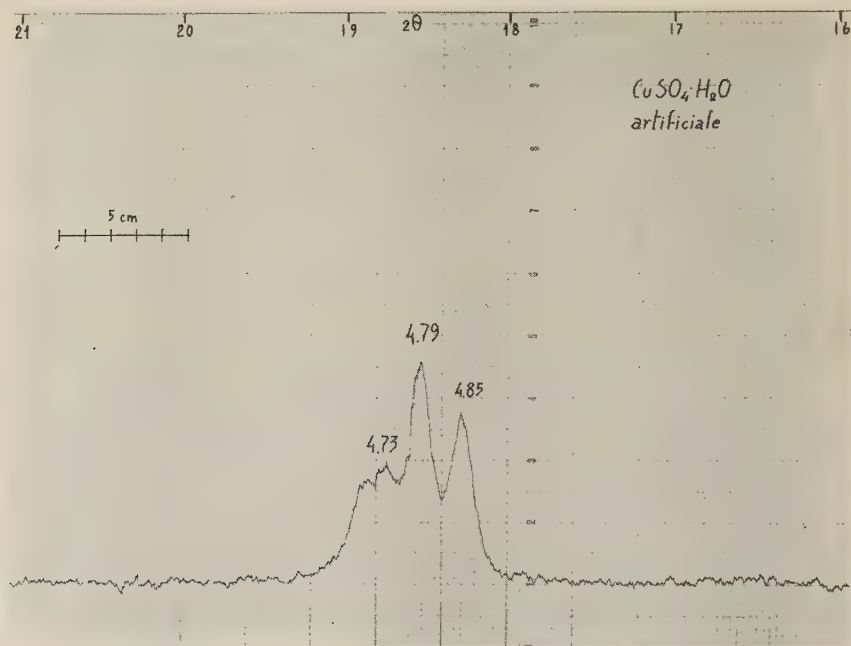


Fig. 5. - Solfato di rame monoidrato artificiale.

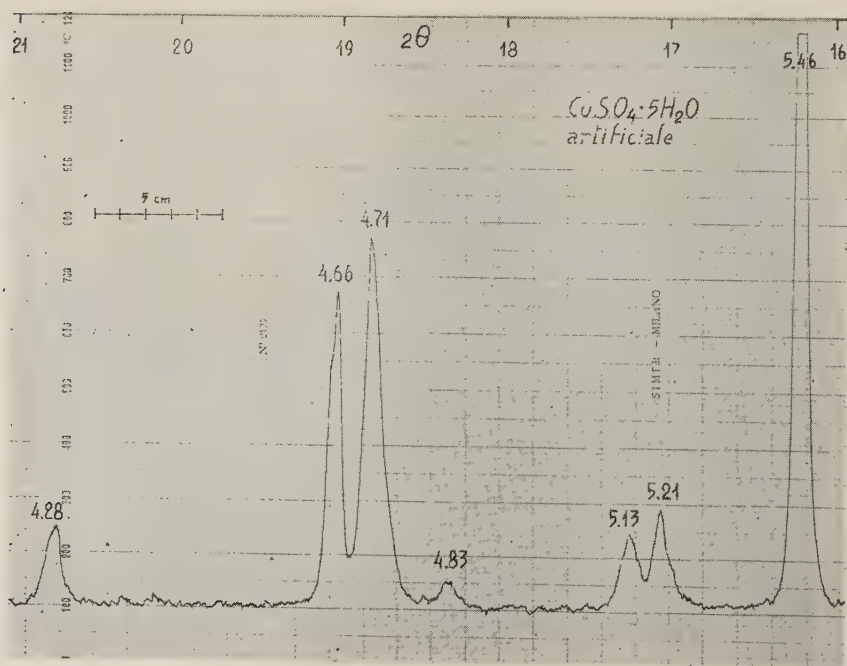


Fig. 6. - Solfato di rame pentaidrato artificiale.

Condizioni di ripresa (apparecchiatura General Electric XRD - 5): Raggi X: 40 KV, 19 mA; fenditure: 1° MR-MR - 0,05°; sensibilità: 500 c.p.s. fondo scala; costante di tempo: 7,0 secondi; velocità del contatore: 0,2° al minuto; velocità della carta 30''/ora.

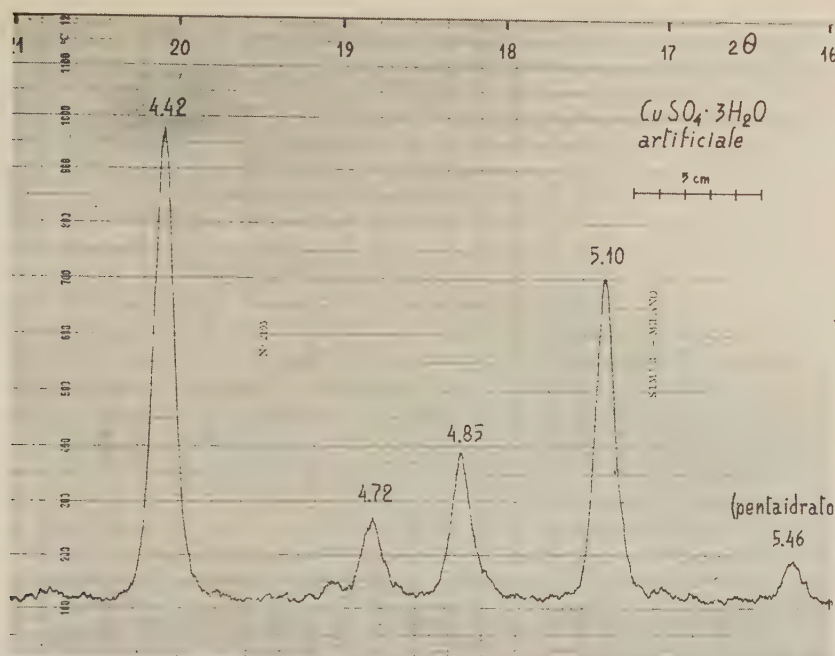


Fig. 7. - Solfato di rame triidrato artificiale.

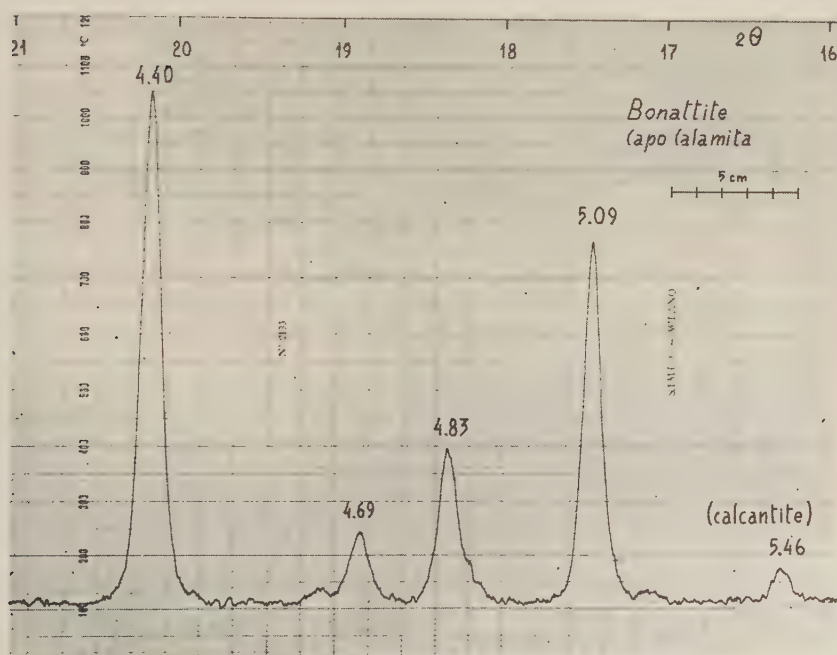


Fig. 8. - Bonattite di Capo Calamita.

Condizioni di ripresa (apparecchiatura General Electric XRD - 5): Raggi X: 40 KV, 10 mA; fenditure: 1° MR - MR - 0,05°; sensibilità: 500 c.p.s. fondo scala; costante di tempo: 7,0 secondi; velocità del contatore: 0,2° al minuto; velocità della carta: 30''/ora

Poiché i dati riportati nella letteratura erano stati ottenuti mediante registrazione fotografica, ho proceduto dapprima alla registrazione di una serie di spettri di polvere per i vari idrati del  $\text{CuSO}_4$  ottenuti artificialmente, ed in particolare:

a)  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ : prodotto p. a. della U.C.B.; frammenti di cristalli controllati al binoculare, lavati con acqua e conservati dopo macinazione in ambiente saturo di umidità ed a temperatura superiore a  $10^\circ\text{C}$ .

b)  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ : ottenuto per evaporazione di una soluzione contenente il 55 % in volume di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  conc.; e per disidratazione del pentaidrato in essiccatore sotto vuoto a temperatura normale.

c)  $\text{CuSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ : ottenuto per evaporazione a  $40^\circ\text{C}$  da una soluzione fortemente solforica (circa 70 % in volume di  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ); e per disidratazione del pentaidrato in stufa a  $120^\circ\text{C}$ .

Gli spettri di polvere delle tre sostanze hanno mostrato ottima riproducibilità, indipendentemente dall'apparecchiatura impiegata e dal modo di preparazione. Solo il pentaidrato ha dato una scarsa riproducibilità nelle intensità di alcune righe, fatto questo di spiegazione non semplice, avendo adottato precauzioni onde impedire orientazioni preferenziali sui preparati. Gli spettri vennero replicati, utilizzando la radiazione  $K\alpha$  del rame filtrata, e variando per ciascuna sostanza il tipo della lastrina, la sensibilità e la velocità di rotazione del contatore Geiger. I risultati di queste misure sono riportati nelle prime tre colonne della Tabella I.

Sono stati infine eseguiti spettri di polvere del minerale elbano qui descritto. Le riprese, eseguite anch'esse ripetutamente come quelle dei vari solfati idrati di rame artificiali, hanno dato risultati pienamente concordanti fra loro, e tali da attribuire senza alcuna incertezza il materiale studiato al composto  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ . In tutti gli spettrogrammi effettuati sul campione naturale, si osservano due deboli righe, a circa 5,45 e 5,75 Å. Tali deboli righe si ritrovano, con la stessa intensità, anche negli spettri di polvere eseguiti per il triidrato preparato artificialmente. Poiché tuttavia esse sono in coincidenza con forti righe del pentaidrato, non sono state prese in considerazione, anche per il fatto che sicuramente (come indica il dato dell'analisi chimica) nel materiale naturale dovevano essere presenti piccole quantità del pentaidrato medesimo.

I valori dei parametri reticolari ottenuti per il minerale di Capo Calamita sono riportati nella quarta colonna della tabella, accompagnati dalle intensità relative, e fatta esclusione per le due righe suddette, che sono state anche escluse dall'elenco relativo al triidrato artificiale.

Come si vede direttamente dall'esame dei valori di  $d$ , non sussiste alcuna incertezza diagnostica. Nelle figure 1, 2 e 3 sono riportati spettri di polvere eseguiti rispettivamente sui composti artificiali  $\text{CuSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$  e  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ ; questi spettri sono infine confrontati con quello dato dal minerale elbano qui descritto (fig. 4). Per una maggiore chiarezza, e per dare una idea dei limiti di sicurezza del metodo, viene riportata per ciascun spettro (figg. 5, 6 e 7) anche la zona più significativa ai fini diagnostici (da  $2\theta = 16^\circ$  fino a  $2\theta = 21^\circ$  per la radiazione  $K\alpha$  del rame), ripresa nelle condizioni di massima risoluzione consentite dall'attrezzatura impiegata. Anche in questo caso si riporta per confronto lo spettro ripreso sulla sostanza naturale (fig. 8).

Particolari ricerche sono state dedicate alla verifica di una eventuale presenza del sale  $\text{CuSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ , che un primo confronto fra i valori ottenuti

per il materiale naturale e quelli tabulati nella letteratura aveva fatto ritenere non improbabile. Un esame critico di questi ultimi dati ha mostrato tuttavia che lo spettro di polvere eseguito da J. D. Hanawalt, H. W. Rinn ed L. K. Frevel [7] per il monoidrato, e riportato nelle schede A.S.T.M., deve in realtà riferirsi ad una miscela di monoidrato e triidrato; e pertanto manca ogni indizio per affermare la presenza del monoidrato stesso nel campione studiato.

Riassumendo, da queste ricerche mi sembra potersi affermare con sicurezza la presenza del  $\text{CuSO}_4 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$  come costituente essenziale dell'esemplare descritto. Si tratta dunque di una nuova fase cristallina identificata fra i minerali di alterazione del giacimento elbano di Capo Calamita. Propongo che a questo nuovo minerale venga assegnato il nome di *bonattite*, in omaggio al prof. S. Bonatti, rappresentante della antica, gloriosa Scuola mineralogica pisana, a cui tanto devono le ricerche sui minerali e le rocce della Toscana.

Per quanto concerne la genesi in natura di questo minerale, mi sembra che essa non possa ricondursi ad un semplice «sfiorimento» di cristalli di calcantite preformati. La calcantite abbonda infatti nella zona in cui raccolsi il campione qui studiato, e non mostra di regola che semplici tracce di disidratazione. La presenza, nel luogo di raccolta, di acque circolanti a contenuto di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  libero molto elevato, fa invece supporre che il triidrato rappresenti un corpo di fondo in equilibrio con acque madri fortemente solforiche. È possibile che esso non rappresenti la fase di prima deposizione, la quale potrebbe benissimo essere costituita da calcantite. Ove però l'evaporazione delle acque madri, avvenuta lentamente, avesse determinato una elevata concentrazione di  $\text{H}_2\text{SO}_4$  a contatto con il corpo di fondo, è immediata la trasformazione di quest'ultimo nella fase corrispondente alle nuove condizioni di equilibrio. Il processo è stato da me verificato a partire da soluzioni debolmente acide, e può spingersi fino alla formazione del monoidrato.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. SCACCHI, *Dei cristalli di solfato di rame con tre proporzionali di acqua*, «Rend. R. Accademia Sci. Fis. Mat. Napoli», IX, 84 (1870).
- [2] P. GROTH, *Chemische Krystallographie*, vol. II, p. 411 (1906).
- [3] E. POSNJAK-G. TUNELL, *The system cupric oxide-sulphur trioxide-water*. «Am. Journ. Sci.», XVIII, 1 (1929).
- [4] T. G. THORPE-J. I. WATTS, *On the specific volume of water of crystallization*, «Journ. Chem. Soc. Trans.», XXXVII, 102 (1880).
- [5] A. N. WINCHELL, *The microscopic characters of artificial inorganic solid substances or artificial minerals*, p. 230 (1931).
- [6] AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS, *Alphabetical and grouped numerical index of X-ray diffraction data*. Pubbl. n. 48 B, schede nn. 2-0147, 1-0301, 3-0194, 1-0620 (1950).
- [7] J. D. HANAWALT-H. W. RINN-L. K. FREVEL, *Chemical analysis by X-ray diffraction*, «Ind. Eng. Chem. Anal. Ed.», X, 457 (1938).



**Fisiologia vegetale.** — *Sul meccanismo dell'azione attivante della florizina sulla fotosintesi e sulla reazione di Hill*<sup>(\*)</sup>. Nota di ERASMO MARRÈ e ORIETTA SERVETTAZ, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio S. TONZIG.

È stato precedentemente rilevato come la florizina espliciti sulle piante superiori effetti tali da farla considerare uno strumento prezioso per lo studio di determinati processi metabolici. La singolarità principale dell'azione del glucoside consiste nel fatto che, mentre esso da un lato inibisce decisamente la crescita [1, 2, 3], la respirazione *in vivo* [4] e, analogamente a quanto noto in campo animale [5], l'attività di diversi sistemi respiratori *in vitro* (deidrogenasi [6], glutatione riduttasi), dall'altro esso si rivela, in base alle prime ricerche a tale scopo intraprese, dotato nello stesso tempo e alle stesse concentrazioni, di un'altrettanto chiara azione di stimolo sull'attività fotosintetica [4].

Quest'opposto effetto sui due sistemi respiratorio e fotosintetico che pure risultano sempre più chiaramente connessi tra loro, e aventi in comune intere catene di reazioni metaboliche [7, 8], suggerisce la speranza che il riconoscimento del modo d'azione del glucoside possa condurre a risultati di notevole interesse per quanto riguarda i rapporti tra respirazione e fotosintesi, nonché alcuni punti oscuri del meccanismo di queste funzioni.

Nella presente Nota vengono esposti alcuni risultati ottenuti nel proseguimento delle nostre ricerche circa l'azione della florizina sulla fotosintesi, sia *in vivo* che su cloroplasti isolati. Tali risultati confermano e integrano quelli precedentemente ottenuti circa l'azione di stimolo sulla fotosintesi reale *in vivo*, e dimostrano come anche su cloroplasti isolati sia riconoscibile un netto effetto attivante del glucoside sulla fotolisi dell'acqua (reazione di Hill) e alcune delle reazioni ossidoriduttive a questa associate. Essi permettono inoltre, attraverso il rilevamento delle possibili interazioni chimiche tra florizina e sistemi coinvolti nella fotosintesi, o nella fotolisi, di prospettare un soddisfacente, seppur provvisorio schema del meccanismo d'azione di questo interessante composto.

#### MATERIALI E METODI.

Nelle esperienze circa l'azione della florizina sulla fotosintesi *in vivo* abbiamo impiegato ancora una volta la parte più giovane (5-7 cm. distali) di piantine di *Eloдея canadensis*, in cultura nella serra di questo Istituto. L'accumulo di fotosintati è stato seguito determinando il contenuto in glucidi totali (zuccheri solubili più polisaccaridi acido-idrosolubili) come precedentemente descritto [9]. L'evoluzione fotosintetica di ossigeno è stata misurata

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

su foglie staccate di *Elodea* in apparecchio di Warburg costruito appositamente per studi sulla fotosintesi dalla ditta Brown. Lo stesso apparecchio è stato impiegato per la determinazione dell'attività fotolitica (reazione di Hill) delle sospensioni di cloroplasti, ottenute per centrifugazione a  $1000 \times g$ . e lavaggio in saccarosio o mannite 0,5 M come descritto da Arnon [10]. L'azione della florizina, come pure quella di un suo derivato per ossidazione enzimatica, sulla riduzione fotochimica del citocromo C da parte di cloroplasti isolati e sulla ossidazione all'oscurità del citocromo ridotto è stata studiata disponendo entro vaschette di capacità 3 cc e di passo di 1 cm. dello spettrofotometro Beckmann mod. DU, un'adeguata quantità di cloroplasti sospesi in mezzo isotonic (mannite), in presenza o meno di florizina, e seguendo a lunghezza d'onda di 550 m $\mu$  [11] la riduzione o la riossidazione del citocromo C aggiunto all'ultimo momento (30'' prima della prima lettura).

Come reagenti abbiamo usato: citocromo C (cit. C) «Sigma», florizina «BDH» altri reagenti Merck. Il cit. C ridotto è stato da noi preparato dalla forma ossidata mediante riduzione con acido ascorbico, a pH 7. In alcune esperienze, oltre all'azione della florizina come tale, è stata studiata quella di un suo derivato ossidato (florizina ossidata, Fl. oss.) originato dalla reazione tra florizina e ossigeno atmosferico, a pH neutro o debolmente alcalino, e catalizzata da un enzima del tipo delle polifenolossidasi, largamente diffuso nelle piante superiori [12]. Tale composto è stato ottenuto esponendo alla luce per alcune ore (6-8) una soluzione  $4 \times 10^{-3}$  M di florizina in bicarbonato 0,1 M, in presenza di foglie di *Elodea* accuratamente lavate, quindi allontanando la CO<sub>2</sub> del bicarbonato per acidificazione. L'andamento della reazione di ossidazione fino al suo compimento è stato seguito spettrofotometricamente, sfruttando il fatto che la florizina ossidata presenta, a pH neutro o alcalino, una netta banda di assorbimento nel verde-azzurro, con un massimo tra 480 e 490 m $\mu$ , mentre la florizina ridotta non assorbe praticamente in questa zona.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

##### A) *Azione sulla fotosintesi «in vivo».*

Nelle ricerche precedenti l'effetto della florizina era stato essenzialmente studiato in base alle variazioni nella produzione di ossigeno da parte di rametti di *Elodea*, trattati o meno con florizina, determinate secondo il metodo di Winkler [4]. Nella presente ricerca il fenomeno è stato studiato sia ancora come azione sull'evoluzione di ossigeno (usando però una tecnica più precisa di quella prima seguita), sia nel suo aspetto più essenziale, quello cioè dell'aumento della capacità di organizzare effettivamente il carbonio, misurando l'aumento di fotosintati come glucidi totali.

a) *Azione sull'evoluzione di O<sub>2</sub>.* - Questa è stata determinata disponendo nelle vaschette di Warburg gruppi di 20 foglioline di *Elodea* in tampone carbonato-bicarbonato e, per i saggi, florizina  $10^{-3}$  M. I risultati ottenuti (tabella I) confermano pienamente quelli precedenti: la florizina, cioè, induce un rapido incremento della produzione fotosintetica di ossigeno.

b) *Azione sulla produzione di fotosintati.* - Gruppi di segmenti apicali di piantine di *Elodea*, lunghi 5-7 cm. venivano portati in ampi recipienti di porcellana a fondo piatto, contenenti soluzione di Shive diluita a 1/5 e, nei saggi, florizina  $10^{-3}$  M, disposti sotto un pannello di tubi fluorescenti. Le variazioni nel tenore in zuccheri totali venivano determinate sottraendo dai valori ottenuti al termine dell'esperienza quello iniziale, determinato su gruppi comparabili di piante fissate all'inizio dell'esperienza. I dati della tabella II dimostrano come anche questo aspetto della fotosintesi sia profondamente influenzato dalla florizina: l'aumento in zuccheri totali nelle piante trattate col glucoside appare infatti dello stesso ordine di quello sopra rilevato per l'evoluzione di O<sub>2</sub>. È importante osservare come in entrambi i casi l'effetto sia del tutto indipendente da quello opposto sulla respirazione: infatti nelle nostre condizioni di esperienza la fotosintesi domina così largamente sul con-

sumo sia di  $O_2$  che di glucidi all'oscurità (rapporto fotosintesi respirazione di circa 6/1) da togliere ogni peso a tale possibilità. Gli aumenti osservati sono da considerare quindi a carico non solo della fotosintesi apparente ma anche di quella reale.

TABELLA I.

*Azione della florizina sulla fotosintesi di foglioline di «Elodea», misurata come evoluzione di  $O_2$ .*

Ogni vaschetta di Warburg conteneva 20 foglioline, tampone  $KHCO_3-Na_2CO_3$  0,1 M, pH 8,9, nei saggi florizina  $10^{-3}$  M vol. finale 3 cc., temperatura  $20^\circ C$ , oscillazioni per minuto 60.

Dati come medie di quattro esperienze in doppio.

Condizioni sperimentali	mm <sup>3</sup> di $O_2$ consumato in 10 min. primi al buio	mm <sup>3</sup> di $O_2$ prodotto in 10 min. primi alla luce	Fotosintesi reale	Variazioni dovute alla florizina
controllo buio . . . .	3	—	—	
controllo luce . . . .	—	16	19	
florizina, buio . . . .	2	—	—	
florizina, luce . . . .	—	33	35	+ 84 %

TABELLA II.

*Azione della florizina sulla fotosintesi in «Elodea canadensis» misurata come aumento dei glucidi totali (solubili acido-idrolizzabili).*

Rametti di *Elodea* in bicarbonato di Na 0,05 M, contenente nei saggi florizina  $2 \times 10^{-3}$  M. Medie di esperienze in doppio.

Esp. N.	Contenuto in glucidi totali in mg/g peso secco			
	Iniziale	Dopo 3 ore di luce		Aumento da florizina
		controlli	florizina	
1	91	111	122	+ 55 %
2	110	127	143	+ 94 %
3	208	223	236	+ 86 %
4	128	147	160	+ 76 %
5	112	137	170	+ 112 %
6	117	147	175	+ 93 %
Medie	127	148	167	+ 90 %

B) *Azione della florizina su cloroplasti isolati.*

Confermata così, in modo che ci sembra soddisfacente, la realtà dell'effetto di stimolo della florizina sulla fotosintesi, nel tentativo di penetrarne meglio la natura abbiamo spostato le nostre ricerche dal piano della cellula viva a quello dei cloroplasti isolati. È noto che questi, in opportune condizioni sperimentali, permettono di riprodurre separatamente le tre fondamentali tappe della fotosintesi: fotolisi dell'acqua, formazione di composti ad alto livello energetico e fissazione della  $\text{CO}_2$  [10].

Riportiamo qui i dati da noi ottenuti per quanto riguarda l'azione della florizina sulla fotolisi dell'acqua (reazione di Hill), e sulla fotoreduzione del citocromo C da cloroplasti isolati, rimandando a note successive quelle circa l'azione sui fenomeni di fosforilazione e organizzazione.

TABELLA III.

*Azione della florizina sulla fotolisi dell'acqua in sospensioni di cloroplasti di «Spinacia oleracea» e di «Elodea canadensis».*

Ogni vaschetta di Warburg conteneva cloroplasti in saccarosio 0,4 M, tampone ai fosfati 0,1 M pH 7 e KCl 0,01 M 2 cc. Nei saggi florizina  $6 \mu\text{M}$  chinone,  $8 \mu\text{M}$  oppure ferricianuro di K,  $20 \mu\text{M}$ , aggiunti (in un cc. di acqua) dal braccio laterale al termine del periodo di ambientamento al buio (10 minuti primi). Atmosfera di azoto. Temperatura  $15^\circ\text{C}$ .

Dati come medie di esperienze in doppio.

Materiale	Accettore di H	Evoluzione di $\text{O}_2$ alla luce, $\text{mm}^3/10$ minuti primi		Variazioni dovute alla florizina
		Controlli	Florizina $10^{-3}$ M	
Spinaci . . . . .	—	2	2	0
Spinaci . . . . .	Chinone . . . .	20	37	+ 85 %
Spinaci . . . . .	Ferricianuro . .	19	22	+ 15 %
Elodea . . . . .	—	1	1	0
Elodea . . . . .	Chinone . . . .	10	16	+ 60 %
Elodea . . . . .	Ferricianuro . .	8	7	— 12 %

a) *Azione sulla fotolisi.* — Per queste esperienze sono stati utilizzati cloroplasti ottenuti da foglie sia di *Elodea* che di spinaci. L'attività fotolitica è stata determinata in apparecchio di Warburg con sistema di illuminazione incorporato, secondo la tecnica convenzionale, in atmosfera di azoto [10]. Come risulta dai dati della tabella III l'azione della florizina sulla reazione di Hill appare strettamente condizionata dalla natura dell'accettore di idrogeno impiegato nella reazione. In presenza di benzochinone la florizina esalta evidentissimamente il processo di fotolisi: l'aumento (circa il 70 %) è dello stesso ordine di quello sopra rilevato *in vivo* per l'evoluzione di  $\text{O}_2$  e la produzione di fotosintati. Per contro l'effetto del glucoside appare scarso o nullo quando il chinone venga sostituito con un altro accettore di



H quale il ferricianuro. Parimenti inattiva risulta la florizina sulla fotolisi (peraltro estremamente ridotta) esplicata dai cloroplasti in assenza di accettore di idrogeno. Aspetto interessante di queste esperienze sulla fotolisi appare quello della stretta analogia tra il comportamento dei cloroplasti di *Elodea* e quelli di spinacio, che dimostra come l'azione della florizina sulla fotosintesi debba considerarsi come un effetto di portata generale, non dovuto alle particolari condizioni fisiologiche proprie di un ristretto gruppo di organismi.

b) *Azione sulla fotoriduzione del citocromo C e sulla ossidazione del citocromo C ridotto.* - È noto che la fotolisi dell'acqua da cloroplasti isolati può essere studiata, oltre che come evoluzione di  $O_2$ , anche seguendo nel tempo la riduzione di un adatto accettore dell'idrogeno

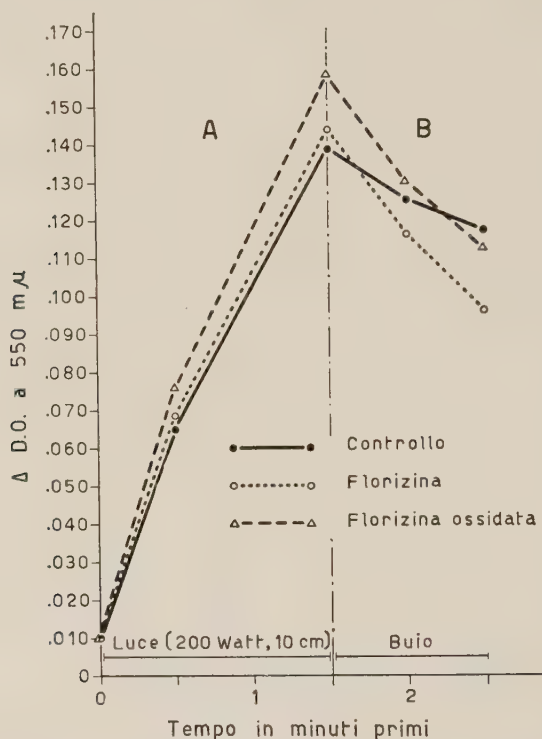


Fig. 1. - Azione della florizina e della florizina ossidata ( $10^{-3}$  M) sulla fotoriduzione (A) e sulla successiva riossidazione all'oscurità (B) del citocromo C. Composizione dell'incubato: sospensione di cloroplasti in mannite 0,4 M e Tris 0,1 M, pH 7, cc. 3; Cit. C, ossidato, 0,1  $\mu$  mole.

proveniente dalla fotolisi dell'acqua. Tra i diversi accettori uno dei più interessanti è certamente il citocromo C, il cui intervento nei cloroplasti come sistema trasportatore di elettroni nelle serie di ossidoriduzione coinvolte nella fotosintesi sembra reso probabile dal recente reperto della localizzazione nei cloroplasti di un enzima specificamente adibito alla sua riduzione [13]. Avendo visto che i nostri preparati di cloroplasti dimostrano una netta capacità di ridurre, in presenza di luce, il citocromo C aggiunto al mezzo di incubazione, abbiamo pensato che lo studio dell'azione della florizina su questo processo, e su quello complementare (riossidazione all'oscurità del citocromo ridotto alla luce), potesse aiutarci a individuare il meccanismo d'azione del glucoside. I risultati di queste esperienze sono riportati nella fig. 1 che mostra, come dato principale, come la florizina acceleri in misura notevolissima la riossidazione del cit. C ridotto per via fotolitica dai cloroplasti di pisello.

Per quanto riguarda la riduzione del cit. C alla luce (nel grafico calcolata aggiungendo ai valori trovati quelli calcolati in base alla riossidazione del citocromo nell'intervallo buio immediatamente successivo a quello di illuminazione per tempi corrispondenti) l'azione della florizina sembra tradursi in un aumento, però molto meno marcato, del ritmo di riduzione. Dalla stessa figura risulta pure come la forma ossidata della florizina sia, in entrambi questi effetti, nettamente più attiva di quella ridotta: che quindi è possibile agisca in quanto rapidamente convertibile, nei cloroplasti (e per una reazione che sembra enzimatica), in florizina ossidata.

A conclusione analoghe porta l'esame dei risultati in fig. 2, che mostrano l'azione

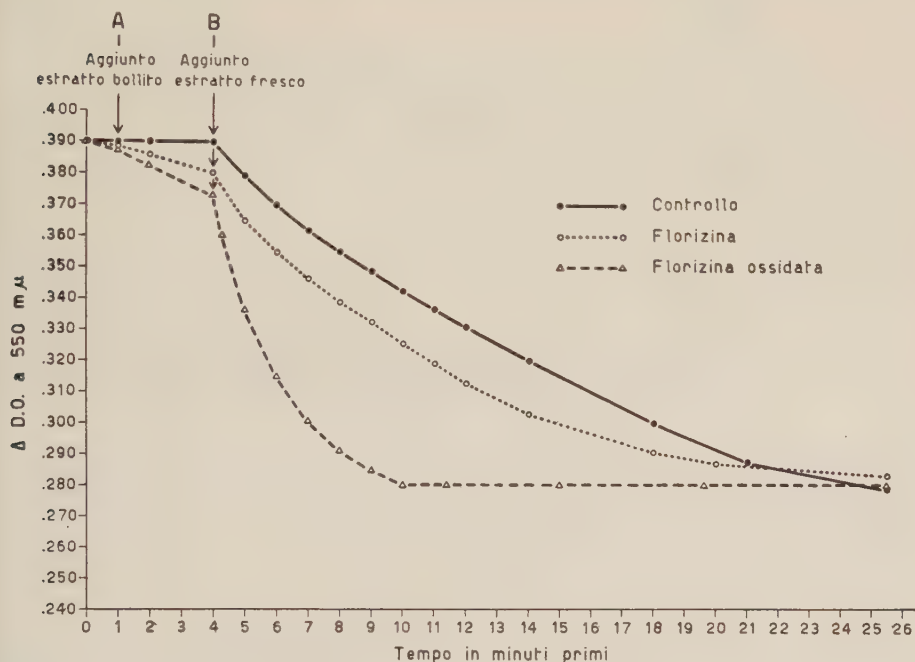


Fig. 2. — Azione della florizina ( $5 \cdot 10^{-4} M$ ) e della florizina ossidata ( $10^{-4} M$ ) sull'ossidazione di citocromo C, precedentemente ridotto con acido ascorbico, da parte di estratti grezzi di foglie di *Elodea canadensis*. Composizione dell'incubato: Tris  $0,1 M$ , pH 7, cc. 2,8; cit. C ridotto  $0,025 \mu$  mole;  $0,1$  cc di estratto  $10\%$  di foglie di *Elodea*, bollito per 1 min. primo, e dello stesso estratto, ma fresco, aggiunti rispettivamente ai tempi A e B.

della florizina e della fl. ossidata sulla ossidazione del cit. C (ridotto subito prima dell'esperienza con acido ascorbico) da parte di estratti totali di foglie di *Elodea*, estratti ricchi di cloroplasti sia integri che parzialmente disintegrati. Si osserva come l'ossidazione del cit. C, praticamente nulla in assenza di florizina e di estratto, compare, seppure in misura modesta, dopo aggiunta di piccole quantità di estratto di *Elodea* bollito per 1 minuto solo, in presenza di florizina; come essa sia ben evidente in presenza di estratto fresco e, in questo caso, come sia nettissimamente accelerata sia dalla fl. ridotta che dalla fl. oss., e molto di più dalla forma ossidata.

c) *Ossidazione non enzimatica della florizina e riduzione da acido ascorbico della florizina ossidata.* — Le esperienze di cui sopra, suggerendo la possibilità di un intervento della fl. nella catena di sistemi ossidoriduttivi che trasportano all'ossigeno l'idrogeno proveniente dalla fotolisi dell'acqua, impostavano il problema del possibile punto di inserzione del

glucoside lungo questa stessa catena. Abbiamo ritenuto interessante studiare, a questo proposito, le possibili reazioni della florizina e della fl. oss. con alcuni sistemi ossidoriducibili e in particolare con il ferricianuro, il p-benzochinone e il cit. C, in quanto normali accettori nella reazione di Hill, e con l'AA, in quanto composto di nota importanza nel trasporto di idrogeno nella fotosintesi *in vitro* (10, 14).

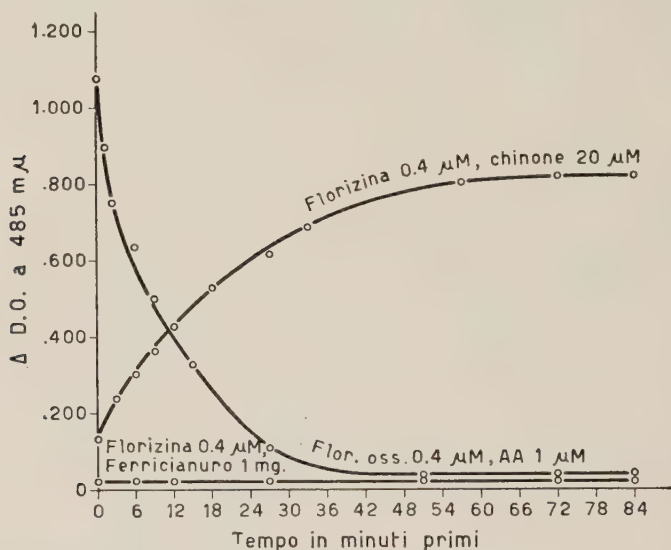


Fig. 3. - Ossidazione non enzimatica della florizina ad opera del p-benzochinone, e riduzione della florizina ossidata ad opera dell'acido ascorbico (AA), seguite in base alla variazione nel tempo della densità ottica a 485 mμ (zona di massimo assorbimento per la flor. ossidata) pH 7,2.

I risultati di queste esperienze (fig. 3) possono così riassumersi:

- a) I due sistemi cit. ridotto-cit. ossidato e florizina ridotta-fl. oss. non mostrano, almeno a pH fisiologico, alcuna tendenza a reagire tra loro: una interazione tra di essi, in sistemi biologici, dovrebbe quindi presupporre la presenza di un enzima specifico.
- b) Mentre il ferricianuro appare del tutto incapace di ossidare la florizina ridotta, per contro il p-benzochinone la ossida pressoché quantitativamente.
- c) L'acido ascorbico riduce energicamente la florizina ossidata a un composto incolore, che ha tutte le caratteristiche della florizina allo stato originario, ridotto. Il potenziale di ossidoriduzione del sistema fl.-fl. oss. sembra quindi compreso tra quelli dei sistemi dell'AA. e del benzochinone, e cioè tra + 0,08 V e + 0,33 V circa (a pH 7).

#### DISCUSSIONE E CONCLUSIONI.

Riassumendo:

I. - Viene confermata l'intensa azione di stimolo della florizina sulla fotosintesi reale, misurata sia come produzione di  $O_2$  che come accumulo di fotosintati.

II. - In sospensioni di cloroplasti la florizina stimola nettamente la reazione di Hill in presenza di chinone. Tale effetto non compare quando l'accettore di H nel sistema è rappresentato da ferricianuro.

III. – La florizina, come pure, e in misura maggiore, il suo derivato per ossidazione enzimatica, accelerano di molto la riossidazione al buio del citocromo C ridotto fotoliticamente da cloroplasti isolati di pisello o da estratti integri di foglie di *Elodea*. Anche la riduzione fotolitica del citocromo C appare significativamente stimolata dalla florizina, quando i valori di riduzione siano corretti per la contemporanea riossidazione.

IV. – La florizina, in assenza di catalizzatori biologici, e a pH fisiologici, non interagisce col citocromo C e col ferricianuro, mentre è rapidamente ossidata dal benzochinone, e la sua forma ossidata è rapidamente ridotta dall'acido ascorbico.

Questi risultati permettono di impostare un primo schema circa il presumibile meccanismo d'azione del glucoside sulla fotosintesi. In primo luogo il fatto che l'azione di stimolo *in vitro* sulla reazione di Hill si osservi solo in presenza di chinone e non di ferricianuro, quando, d'altro lato, solo il primo di questi composti è capace di ricevere idrogeno dalla florizina, suggerisce che l'effetto attivante del glucoside derivi dalle sue caratteristiche di composto ossidoriducibile. In quanto tale, esso appare capace di inserirsi sul flusso dell'idrogeno proveniente dalla fotolisi dell'acqua, accelerandone la deviazione verso accettori esterni, purchè adatti, come il chinone; e quindi aumentando la frazione di ossigeno che viene liberato nella reazione di Hill.

D'altra parte, l'azione di stimolo della florizina (anche qui maggiore per la forma ossidata) sulla riossidazione del citocromo C successiva alla sua fotoriduzione, dimostra ancora come il glucoside possa accelerare il flusso di idrogeno (elettroni) attraverso i sistemi ossidoriduttivi del cloroplasto. La maggior attività di fotoriduzione del citocromo C da cloroplasti in presenza di florizina o di florizina ossidata sarebbe così spiegabile come una conseguenza diretta della più rapida riossidazione del citocromo ridotto, e quindi del mantenimento di un alto livello del composto capace di ricevere idrogeno. La differenza rispetto il caso, fatto sopra, della reazione di Hill, sembra consistere nel fatto che qui manca, apparentemente, un sistema terminale capace di accumulare idrogeno (come nel caso del chinone): infatti nelle sospensioni di cloroplasti isolati in nessun caso abbiamo potuto mettere in evidenza una riduzione della florizina aggiunta nella forma ossidata. In altri termini, la florizina sembra agire come sistema trasportatore, e non come un accettore finale di idrogeno.

Se poi la florizina agisca accelerando il trasporto di idrogeno dal citocromo C (o altro sistema analogo), eventualmente presente nei cloroplasti, all'ossigeno atmosferico oppure a composti ossidati dall'ossigeno proveniente dalla fotolisi [10], è questione che non può essere, in base ai presenti dati, risolta.

Proporzionalmente maggiore appare la complessità del problema, quando si passi all'interpretazione dei risultati ottenuti *in vivo*. Che qui l'azione della florizina investa il processo fotosintetico nel suo insieme è dimostrato dall'aumento indotto sulla sintesi di fotosintati. Quest'aumento presume che la flori-



zina agisca aumentando l'intensità di un processo di importanza limitante per l'organizzazione della  $\text{CO}_2$ . Ora i due processi che, sul piano più generale, condizionano la fotosintesi sono la disponibilità di idrogeno ad alto potenziale ossidoriduttivo (TPNH) necessario alla riduzione dell'acido trifosfoglicerico, e la produzione di composti (del tipo dell'ATP) capaci di fornire l'energia necessaria alla sintesi dell'accettore primario della  $\text{CO}_2$  (ribuloso 1-5 P), e alla riduzione dell'acido trifosfoglicerico (Calvin 8). È stato d'altra parte precedentemente rilevato [4] come l'azione della florizina sulla fotosintesi *in vivo* sia nettamente maggiore per le alte intensità di illuminazione; e cioè in condizioni in cui la reazione fotolitica, e quindi la disponibilità di idrogeno, dovrebbero passare in seconda linea, come fattore limitante, di fronte all'esigenza di una rapida produzione di legami ad alto tenore energetico (ATP). È noto, d'altra parte, come questi si formino nel cloroplasto in seguito alla ricombinazione di parte dell'idrogeno e dell'ossigeno formatisi nella scissione fotolitica dell'acqua, processo che come si è detto appare nettamente accelerato *in vitro* dalla florizina. L'azione della florizina sulla fotosintesi reale *in vivo* sarebbe così interpretata come dovuta allo stimolo impresso al trasporto di H lungo i sistemi ossidoriduttivi del plastidio verde, e quindi alla produzione di legami ricchi di energia lungo questo trasporto.

Tale ipotesi è legittimata dal fatto che un'azione del glucoside come sistema ossidoriducibile (quale quella da noi proposta) sembra inserirsi, nella catena di ossidoriduzione fotosintetica, a livello di potenziale d'ossidoriduzione più positivo di quello del citocromo (poichè la riossidazione di questo è stimolata dalla florizina), e quindi situato a valle delle tappe in cui l'energia liberata nel trasporto di elettroni è sufficiente alla sintesi di due legami ricchi di energia.

Del resto, anche se l'azione accelerante della florizina sulla fase finale del trasporto di idrogeno dovesse tradursi nella impedita sintesi di un terzo legame energetico, questo non implicherebbe se non un minore rendimento relativo della funzione (diminuzione del rapporto legami energetici sintetizzati/ $\text{H}_2\text{O}$  scissa) peraltro, più che largamente compensato dall'aumento della velocità di reazione, e quindi della sintesi assoluta di legami energetici, in accordo con l'analogo concetto, enunciato per la sintesi respiratoria di ATP, da Lardy [15].

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sp. », 26, 1304 (1950).
- [2] H. J. STREET and J. S. LOWE, « Ann. Bot. », 14, 307 (1950).
- [3] K. V. THIMANN and E. MARRÈ, « Am. Journ. Bot. », 41, 556 (1954).
- [4] E. MARRÈ, « Boll. Soc. It. Biol. Sp. », 26, 1299 (1950).
- [5] B. SHAPIRO, « Bioch. J. », 41, 151 (1947).
- [6] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 296 (1954).
- [7] J. A. BASHAM and M. CALVIN, in *Currents in Biochemical Research*, ed. Green, Interscience, 1956.

- [8] M. CALVIN, V Congresso Int. di Bioch. Brusselle, 1955.  
[9] E. MARRÈ, «N. Giorn. Bot. It.», n. s., 40, 914 (1953).  
[10] D. I. ARNON, M. B. ALLEN and F. R. WHATLEY, «Bioch. and Bioph. Acta», 20, 449 (1956).  
[11] B. L. HORECKER and L. A. HEPPEL, «J. Biol. Ch.», 178, 385 (1949).  
[12] E. MARRÈ, «Boll. Soc. It. Biol. Sp.», 26, 1302 (1950).  
[13] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, in corso di stampa.  
[14] E. MARRÈ e G. LAUDI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», 18, 402 (1955).  
[15] H. A. LARDY, in «The biology of phosphorus» di L. F. Wolterinlz, Michigan State College Press, 1952.

**Citologia.** — *Metodo Feulgen in Ematologia: un procedimento semplificato (idrolisi a temperatura ambiente) e rapido (30 minuti)* (\*).  
Nota di E. BATTAGLIA, presentata (\*\*) dal Socio A. CHIARUGI.

È opinione dell'autore che il metodo Feulgen non sia stato completamente sfruttato in ematologia.

Mentre colorazioni standard, quali Wright, Giemsa, Pappenheim (May-Grunwald-Giemsa), si prestano egregiamente per le usuali diagnosi di strisci di sangue e di midollo (e per quest'ultimo scopo, in quanto metodi standard, sono in un certo senso da preferirsi per facilità di confronti, ecc.), il metodo Feulgen, di particolare finezza ed elettività nucleare, si presta meglio per ciò che potrebbe definirsi la carilogia del sangue (studio delle anomalie della mitosi in atto, struttura cromosomica e relative peculiarità morfologiche, degenerazione nucleare, endomitosi, poliploidia, ecc.).

In confronto con le tecniche citologiche più diffuse (Wright, Giemsa, ecc.) il metodo Feulgen si presenta senz'altro più complesso, in quanto esso richiede una idrolisi a caldo (a 60° C) con 1N·HCl, ed un tempo maggiore di colorazione (immersione dei preparati nel reattivo di Schiff, o fucsina leucobasica nella corrente dizione citologica).

Seguendo la schedula suggerita da Undritz e Rothlin <sup>(1)</sup> nel loro recente Atlante di Ematologia, l'intero procedimento richiede circa due ore e consta più precisamente delle seguenti tappe:

1° Fissaggio degli strisci in alcool metilico (15 minuti), oppure alla fiamma;

2° idrolisi: successiva immersione degli strisci per 5 minuti in acqua distillata, quindi in 1N·HCl freddo e finalmente in 1N·HCl a 60° C per 4 minuti;

(\*) Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Firenze, pubbl. n. 224. Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Trieste.

(\*\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

(1) Cfr. «Sandoz Atlas of Haematology», p. 31, Basle, 1952.

3° arresto dell'idrolisi mediante breve immersione in 1N·HCl freddo e quindi lavaggio in acqua distillata;

4° trasferimento in acido fucsina-solforoso (reattivo di Schiff) per 1-1 1/2 ore. Segue lavaggio, con acqua solforosa, per 2 minuti ripetendo tale lavaggio due o più volte;

5° immersione per 5-10 minuti in acqua di fonte, asciugamento dei preparati e loro successivo esame sotto immersione ad olio.

Gli inconvenienti del metodo Feulgen, realizzato come sopra descritto, possono essere elencati come segue:

a) necessità dell'attrezzatura indispensabile per operare a determinata temperatura;

b) tempo optimum d'idrolisi assai ristretto, oltrepassato il quale l'intensità della colorazione decade rapidamente.

Gli inconvenienti a) e b) tendono a limitare la quantità dei preparati che possono essere idrolizzati nello stesso tempo e quindi ostacolano il lavoro di routine;

c) perdita di cellule durante l'idrolisi.

L'autore, che da tempo si interessa di perfezionamenti tecnici dell'originario metodo di Feulgen e Rossenbeck, <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup>, ha preso in esame il problema di una semplificazione e di una più agevole applicazione del metodo Feulgen all'ematologia. I risultati di tale studio possono essere così riassunti:

1° il fissaggio iniziale degli strisci, prima dell'idrolisi, non è strettamente necessario. Strisci non fissati sono in genere preferibili a quelli fissati perchè il citoplasma si presenta (nei primi) del tutto privo di qualunque colore, trasparente. Qualora una fissazione sia richiesta, come ad esempio nei casi di mitosi affette da «stickiness», con «pseudoponti cromatinici», fusi multipolari (ad esempio nell'anemia perniciosa, leucemia, ecc.), *un fissaggio di 5 minuti in un liquido composto di alcool etilico 95°, 6 parti + ac. acetico glaciale 2 parti + cloroformio 1 parte*, dà un risultato superiore a quello ottenuto con la usuale fissazione con alcool metilico;

2° gli inconvenienti sopra ricordati ai paragrafi a), b), c), possono essere eliminati introducendo l'*idrolisi fredda* (cioè l'idrolisi a temperatura ambiente) <sup>(5)</sup> al posto della classica *idrolisi calda* a 60° C.

Si è riscontrato che i 4 minuti di idrolisi calda (60° C, con 1N·HCl) raccomandati da Undritz e Rothlin, come prima ricordato, sono vantaggiosamente sostituibili con una *idrolisi fredda di 8-10 minuti* a temperatura

(2) R. FEULGEN H. ROSSENBECK, *Mikroskopisch-chemischer Nachweis einer Nucleinsäure vom Typus der Thymonucleinsäure und die darauf beruhende elektive Färbung von Zellkernen in Mikroskopischen Präparaten*, «Zts. Physiol. Chem.», 135, 203-248 (1924).

(3) E. BATTAGLIA, *Accorgimenti nella tecnica citologica relativa alla reazione di Feulgen*, «Caryologia», 3, 381-383 (1951).

(4) E. BATTAGLIA, *La sostituzione dell'idrolisi a caldo con l'idrolisi a temperatura ambiente («idrolisi fredda») nel metodo Feulgen*, «Rendic. Acc. Lincei», in stampa, 1957.

(5) Cfr. precedente nota (4).

ambiente 18°-27° C, realizzata mediante HCl al 18,5%, cioè acido cloridrico concentrato diluito 1 a 1 con acqua distillata.

In pari tempo si è osservato che il tempo optimum di idrolisi è assai ampio, cosicchè *non si osserva apprezzabile variazione nell'intensità della colorazione degli strisci prolungando il tempo di idrolisi da 8 a 18 minuti.*

Ugualmente, forti sbalzi nella temperatura ambiente, quali ad esempio gli sbalzi di natura stagionale, non influenzano sensibilmente i tempi d'idrolisi sopracitati.

Oltre l'idrolisi acida con HCl diluito (18,5 % circa), quali soluzioni idrolizzanti furono pure sperimentate la soluzione nitrica, cioè *ac. nitrico concentrato diluito 1 a 1 con acqua distillata, caratterizzata*, in base a numerose prove, *da tempo optimum d'idrolisi fredda di circa 10 minuti*, ottenendosi un buon risultato, ma tuttavia non così soddisfacente come quello con l'idrolisi cloridrica.

Anche l'idrolisi fredda con acido fosforico (diluito 1 a 1) fu sperimentata, con esito positivo, ma con quest'ultima soluzione il risultato citologico (cioè intensità di colore e finezza di dettagli nucleari) fu assai mediocre in confronto a quello ottenuto con l'idrolisi cloridrica e nitrica;

3° dopo l'idrolisi, il soggiorno dei preparati in reattivo di Schiff (fucsina leucobasica) non risulta necessariamente così lungo (1-1 1/2 ore come suggerito dalla scheda, già ricordata, di Undritz e Rothlin. Abbiamo osservato che una sufficiente intensità di colore è già raggiunta dopo una permanenza, nella fucsina leucobasica, di soli 10 minuti. *Prolungando il tempo a 20 minuti* si perviene al massimo sviluppo di intensità di colorazione.

È nostra opinione che tale differenza di tempo sia da imputarsi od alla bontà della fucsina leucobasica usata od alla freschezza del reattivo stesso, o ad entrambe le cause. Nelle ricerche di cui qui diamo i risultati di tecnica citologica, abbiamo costantemente usato il reattivo di Schiff, preparato da non oltre 7 giorni, e mantenuto in frigorifero. Poichè la composizione della fucsina basica in commercio non è ancora standardizzata ed è perciò variabile, riteniamo utile riferire la sorgente del prodotto utilizzato e la relativa preparazione del reattivo di Schiff, adottata <sup>(6)</sup> e cioè:

Portare all'ebollizione cc. 100 di acqua distillata, togliere dal fuoco e dissolvere, agitando spesso, gr. 1 di fucsina basica (abbiamo usato il prodotto della Hartman-Leddon Co, Philadelphia, U.S.A.; color index n. 677).

Trasferire la soluzione ancora calda (non è necessario nè raffreddare nè filtrare) in una bottiglia di vetro, *con tappo smerigliato*, preferibilmente della capacità di cc. 120-130. Aggiungere immediatamente e nell'ordine, gr. 1 di metabisolfito sodico (superiore al semplice bisolfito), *fresco* (polverulento, senza forte odore di anidride solforosa!) e cc. 10 di 1N·HCl. Chiudere ermeticamente ed agitare. Già dopo un'ora si osserva decolorazione e, se necessario, appena dopo 2 ore dal momento della preparazione, il reattivo di Schiff può essere usato. La preparazione sopra data è facile a ricordarsi in

(6) Cfr. nota (4).



quanto vi ricorre sempre un unico valore numerico (1 nel caso di cui sopra). Ad esempio, premesso che nella bottiglia in cui sarà preparato il reattivo di Schiff è opportuno che lo spazio di aria libera sopra il liquido sia ridotto al minimo, usando una bottiglia di 100 cc., il reattivo di Schiff potrebbe essere preparato con le seguenti quantità: acqua distillata cc. 88-90, fucsina basica gr. 0,88-0,9, metabisolfito sodico gr. 0,88-0,9, 1N·HCl cc. 8,8-9.

Questo reattivo è giallastro, ma tale colorazione non reca alcun disturbo, anzi è inutile, almeno nel nostro caso, decolorarlo con carbone vegetale, come viceversa è suggerito in alcune delle tante schede di preparazione del reattivo di Schiff. Tenendo presente il nostro materiale, la decolorazione con carbone si risolve in una perdita di tempo, non introduce alcun miglioramento nel reattivo, anzi ci è sembrato che il reattivo decolorato impartisse ai preparati un'intensità di colore inferiore a quella impartita dal reattivo non decolorato.

Riassumendo, il procedimento che noi raccomandiamo è il seguente:

I. Immersione dei preparati da strisci di sangue o midollo, seccati all'aria, in HCl diluito (18,5 %), per 8-10 minuti, a temperatura ambiente, cioè *idrolisi fredda di 8-10 minuti*.

II. Il trasferimento dei preparati in reattivo di Schiff e loro permanenza nel reattivo per 20 minuti.

III. Rapido e delicato lavaggio in acqua di fonte, asciugamento dei preparati (come nei preparati colorati con Wright, etc.), e finalmente esecuzione di preparati permanenti seguendo i correnti procedimenti, oppure ricoprimento dei preparati con un sottile film di olio da immersione (tipo Cargille o Shillaber) e diretta osservazione al microscopio. Raccomandiamo in quest'ultimo caso di conservare i preparati in frigorifero dopo ciascun esame, altrimenti il colore tende ad attenuarsi. *Il procedimento di colorazione da noi suggerito richiede circa 30 minuti ed è, a nostro parere, la più semplice, efficace e rapida applicazione del metodo Feulgen alle ricerche ematologiche.*

**Zoologia.** — *Studio delle dipeptidasi e proteinasi nello sviluppo di « Artemia salina » Leach.* Nota (\*) di LORETA BELLINI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

**INTRODUZIONE.** — Precedenti ricerche di Urbani e Coll. [1, 2, 3] sul comportamento delle dipeptidasi e proteinasi nello sviluppo embrionale e larvale degli Anfibi anuri hanno dimostrato che questi enzimi hanno una attività particolarmente intensa quando sono in atto i processi di morfogenesi e di accrescimento. Si è potuto anche mettere in evidenza che alcuni stadi

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e di Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1956.

caratteristici dello sviluppo, come quello di « bottone caudale » e quello di « fine vitello », che segna il passaggio dalla vita embrionale alla vita larvale (Cotronei 1922, 1930, 1932) [4, 5, 6], sono accompagnati da un preciso comportamento di questi fermenti. Inoltre è stato visto che la forte attività proteolitica caratteristica del periodo di grande accrescimento dell'embrione di Anfibi non è accompagnata da una corrispondente diminuzione dell'azoto totale presente nell'uovo vergine, cosa che invece accade per i carboidrati e i lipidi. Da questo ultimo fatto è stata tratta la conclusione che mentre lipasi e amilasi hanno il compito di idrolizzare i substrati vitellini che saranno prevalentemente impiegati per le necessità energetiche dello sviluppo, gli enzimi proteolitici hanno il ruolo di trasformare i protidi vitellini in protidi cellulari. Che gli enzimi proteolitici possono intervenire nei fenomeni di sintesi proteica è una ipotesi avanzata da parecchi Autori. I fatti messi in luce da questi studi sulle dipeptidasi e proteinasi nello sviluppo embrionale degli Anfibi sono in appoggio a queste idee (Urbani, 1955) [7] ed i risultati ottenuti da altri Autori sugli Urodeli (Løvtrup 1953, 1955) [8, 9] sono perfettamente d'accordo con quanto dimostrato negli Anuri.

Dato l'interesse di queste ricerche, nelle quali i problemi della morfogenesi ed il valore degli stadi dei cicli biologici vengono indagati con tecniche enzimatiche, mi sono proposta di studiare il comportamento degli enzimi proteolitici nello sviluppo degli Invertebrati onde poter comparare i miei risultati con quelli ottenuti nei Vertebrati. Come materiale ho scelto l'*Artemia salina*: le gastrule incistate di questo Fillopode possono superare in condizioni di vita latente lunghi periodi. Urbani e Coll. (1953) [10] hanno dimostrato che questi germi incistati conservano, perché preformati, diversi enzimi che entreranno in azione non appena l'acqua idraterà il protoplasma e il germe passerà dalle condizioni di vita minima alla vita attiva continuando lo sviluppo embrionale che l'anabiosi aveva arrestato allo stadio di gastrula (Fautrez-Fyrlefyn 1951) [11].

MATERIALE E METODI. — L'*Artemia salina* Leach è una specie collettiva che secondo i criteri di Artom (1931) [12] include differenti biotipi: un diploide anfimissico, un diploide partenogenetico, un tetraploide partenogenetico e delle razze ottoploidi (Gross, 1932 [23] — Barigozzi, 1934 [22], Gross 1936 [13]). Ho utilizzato per le mie ricerche germi incistati provenienti dalla California ed in vita latente da almeno un anno ed appartenenti al primo biotipo.

Le cisti poste in acqua salata (30 gr. NaCl/litro) schiudono alla temperatura di 18°C. in circa 50 ore dando origine dopo 80-100 ore a naupli nuotanti. Ho notato che le cisti poste in acqua salata ed agitate in modo da venire uniformemente bagnate restano in parte in superficie e in parte si depositano sul fondo del recipiente. In queste ultime, più pesanti, la percentuale di schiusura è praticamente del 100 % mentre di quelle rimaste in superficie solo una parte limitata schiude. Per le mie ricerche perciò ho impiegato esclusivamente le cisti che dopo essere stati bagnate andavano a depositarsi in fondo alla bacinella.

*Dipeptidasi.* - Si è adottato per il dosaggio della attività dipeptidasica il metodo di Linderström - Lang e Holter [14]. 300 individui ai vari stadi di sviluppo sono stati omogenati in 200  $\mu$ l di acqua distillata a mezzo di un piccolo omogenizzatore di vetro. L'omogenato totale in quantità di 7,7  $\mu$ l è stato unito con 7  $\mu$ l di alanilglicina 0,2 M pH 7,4. Dopo incubazione a 39°C per 20 minuti la reazione è stata bloccata con 30  $\mu$ l di HCl 0,06 N alcoolico e quindi si sono titolati gli aminogruppi liberi con lo stesso acido in ambiente acetico (rosso naftile indicatore) a mezzo di una microburetta «Aglà». I bianchi sono stati eseguiti al *tempo zero* e tutte le determinazioni effettuate in triplo. L'attività dipeptidasica è espressa in  $\mu$ l HCl 0,06 N e nei grafici riportati nel presente lavoro si riferisce a determinazioni eseguite in questa maniera<sup>(1)</sup>.

*Proteinasi.* - L'attività proteinasica è stata studiata con il micrometodo di Holter e Løvtrup [15] che è un adattamento della tecnica di Duspiva (1939) [16]. 300 individui ai vari stadi di sviluppo sono stati omogenati in 70  $\mu$ l di acqua distillata. 22  $\mu$ l di questo omogenato sono stati uniti con 22,2  $\mu$ l di una soluzione di caseina e con 22,2  $\mu$ l di tampone fosfato citrato ammonio secondo Duspiva a pH 4,9. Dopo cinque ore di incubazione a 39°C la reazione è stata bloccata con l'aggiunta di 90  $\mu$ l di acqua + 180  $\mu$ l di acido tricloroacetico 0,3 M. Dopo permanenza in icebox per 4 ore la caseina non idrolizzata è stata sedimentata con centrifugazione a 3000 giri per tre minuti e 82  $\mu$ l del supernatante perfettamente limpido sono stati uniti con 166  $\mu$ l di NaOH 0,5 M e il colore sviluppato con 22,4  $\mu$ l di reattivo di Folin diluito al momento dell'uso. Tutti i reattivi sono stati preparati secondo le indicazioni di Urbani e De Cesaris Coromaldi (1954) [17]. Il colore è stato fotometrato al microcolorimetro a cellula fotoelettrica di Urbani (1952) [18]. I bianchi sono stati fatti al *tempo zero*. L'attività proteinasica è espressa in estinzioni (E) e nei grafici riportati nel presente lavoro si riferisce a determinazioni eseguite a questa maniera.

*Azoto totale.* - È stato determinato il tenore in azoto totale dei germi incistati dal momento della idratazione fino allo stadio di nauplio. Il metodo adoperato è quello della Nesslerizzazione diretta con le seguenti modalità: 25 individui sono stati raccolti su di un piccolo quadrato di vetro di 5 x 5 mm ricavato da un coprioggetti per microscopia, e fatti cadere in fondo ad un palloncino in Pyrex. Per gli stadi di nauplio liberamente natante sono stati presi 25 esemplari e 25 gusci vuoti. Dopo mineralizzazione con 200  $\mu$ l di H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> al 50 %, il mineralizzato è stato sciolto con 10 ml di acqua distillata e ad 1 ml di questo sono stati aggiunti 5 ml di acqua distillata ed 1 ml di reattivo di Nessler. Il colore sviluppato è stato fotometrato allo *Spectronic* a 400 m $\mu$ . Le estinzioni ottenute sono state tradotte in gamma di azoto con una curva di taratura costruita con quantità note di solfato di ammonio. I dati riportati nel presente lavoro si riferiscono a determinazioni dell'azoto totale eseguite in questa maniera.

**RISULTATI.** - L'attività dipeptidasica, presente nei germi incistati allo stato secco, come dimostrato da Urbani e Coll. [19], aumenta già dopo 15 minuti di idratazione e continua ancora a salire come è illustrato nella fig. 1. Il forte aumento dell'attività enzimatica rallenta dopo la prima ora di idratazione e pur continuando a crescere, come illustrato nella fig. 2, la salita della curva è più dolce. Intorno a 40 ore di idratazione, il guscio che racchiude l'embrione si è fessurato e l'embrione stesso comincia gradatamente a fuoriuscire. Il massimo di attività dipeptidasica è stato trovato allo stadio nel quale il giovane nauplio è uscito dal guscio ma ancora non ha cominciato a nuotare. Le determinazioni eseguite su naupli liberamente natanti mo-

(1) I differenti simboli che compaiono nei grafici indicano i diversi lotti esaminati.

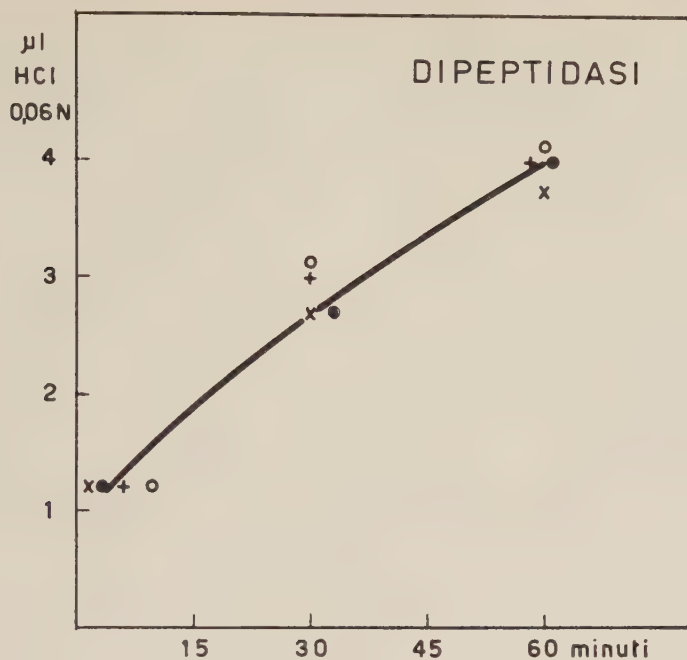


Fig. 1. - Comportamento delle dipeptidasi durante la prima ora di sviluppo di *Artemia salina*. In ordinate l'attività enzimatica, in ascisse il tempo di idratazione in minuti primi.

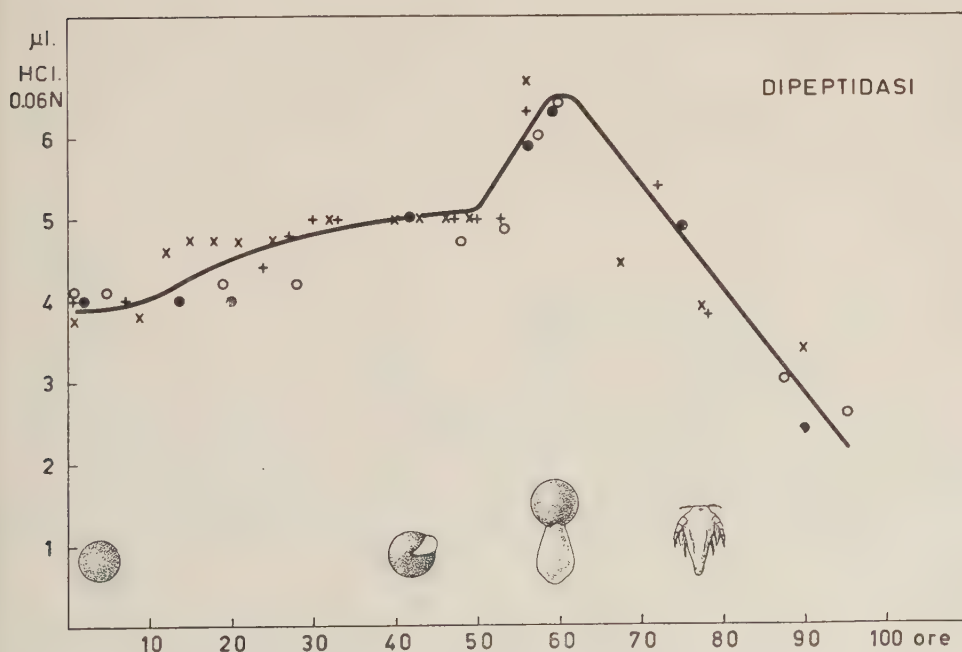


Fig. 2. - Comportamento delle dipeptidasi durante lo sviluppo di *Artemia salina*: sono schematizzati gli stadi più significativi. In ordinate l'attività enzimatica, in ascisse le ore di sviluppo.



strano una decisa diminuzione dell'attività enzimatica. L'andamento di questa curva ricorda quello trovato da De Cesaris Coromaldi (1954) [20] su *Rana esculenta* e da Urbani e De Cesaris Coromaldi [21] su *Bufo vulgaris* dove ad un leggero progressivo aumento dell'attività dipeptidasica durante lo sviluppo embrionale segue una brusca caduta dell'attività stessa. Questi Autori hanno messo in relazione la diminuzione del tenore in enzima con lo stadio di fine vitello degli Anfibi che Cotronei (1922, 1930, 1932) [4, 5, 6] ha dimostrato segnare il passaggio dalla vita embrionale alla vita larvale ed è determinato dalla fine del riassorbimento del tuorlo. In questo momento secondo la concezione di Cotronei si modificano le correlazioni umorali e metaboliche dell'embrione che diventa larva e gli studi enzimatici condotti da Urbani e dai suoi Collaboratori hanno dato una precisa conferma del valore biochimico di questo stadio di sviluppo nel ciclo vitale degli Anfibi. Ho pensato allora che anche nel caso dell'*Artemia* la caduta dell'attività enzimatica che si rileva nei naupli nuotanti avesse lo stesso significato, che cioè, la decrescente attività dipeptidasica che si osserva da questo momento in poi stesse ad indicare che il Fillopode ha esaurito le scorte vitelline. Ho potuto controllare questa ipotesi mettendo nelle capsule, dove sviluppavano le *Artemie*, delle zooclorelle e ho visto che i piccoli Fillopodi cominciano ad alimentarsi quando iniziano il nuoto. Il reperto non è difficile ad ottenersi se si osservano i giovani naupli al microscopio: si può vedere *in vivo* che l'apparato digerente contiene da questo stadio di sviluppo in poi i residui della clorofilla delle zooclorelle ingerite. L'attività proteinasica, contrariamente a quella dipeptidasica, rimane press'a poco costante nella prima ora di idratazione (fig. 3) ed un forte aumento si osserva invece dalla ventesima ora di sviluppo fino alla 65 (fig. 4) che corrisponde, anche in questo caso, al momento nel quale il nauplio è uscito dal guscio ma non ha iniziato il nuoto, dopo di che si ha una brusca caduta dell'attività proteinasica. Anche qui il fenomeno va messo in relazione con l'esaurimento delle scorte deutoplasmatiche. Se infatti i giovani naupli digiunanti vengono alimentati con zooclorelle sia le proteinasi che le dipeptidasi mostrano un netto aumento della loro attività. Il comportamento dell'azoto totale mostra che nel periodo di sviluppo da me studiato, vi è una diminuzione dell'azoto totale del 18-20% dei valori iniziali della gastrula incistata. Questo sta ad indicare che solo una piccola parte delle riserve azotate viene bruciata per le necessità energetiche dello sviluppo embrionale. Sarà interessante seguire, sullo stesso materiale, il tenore in lipidi e carboidrati onde poter analizzare, nello sviluppo di *Artemia salina* la successione delle sorgenti energetiche e poter comparare i risultati con quelli ottenuti da Urbani nello sviluppo degli Anuri e da Løvtrup negli Urodeli.

CONCLUSIONI. - I risultati da me ottenuti sull'attività proteolitica (dipeptidasi e proteinasi) nello sviluppo di *Artemia salina* si prestano ad alcune considerazioni e conclusioni. Innanzi tutto si vede dall'esame dei

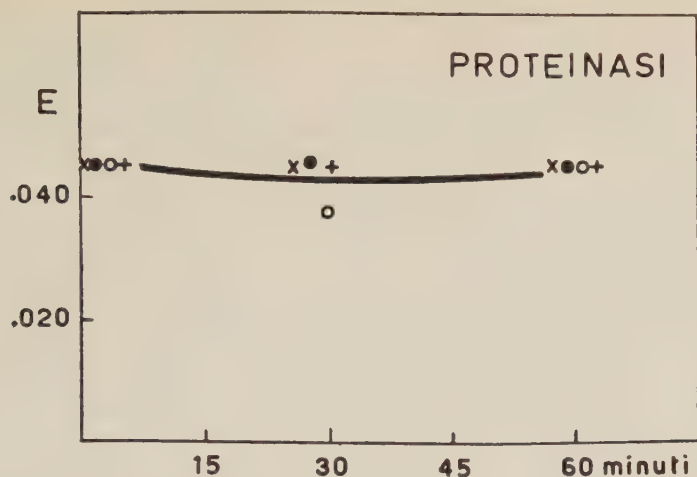


Fig. 3. - Comportamento delle proteinasi durante la prima ora di sviluppo di *Artemia salina*. In ordinate l'attività enzimatica, in ascisse il tempo di idratazione in minuti primi.

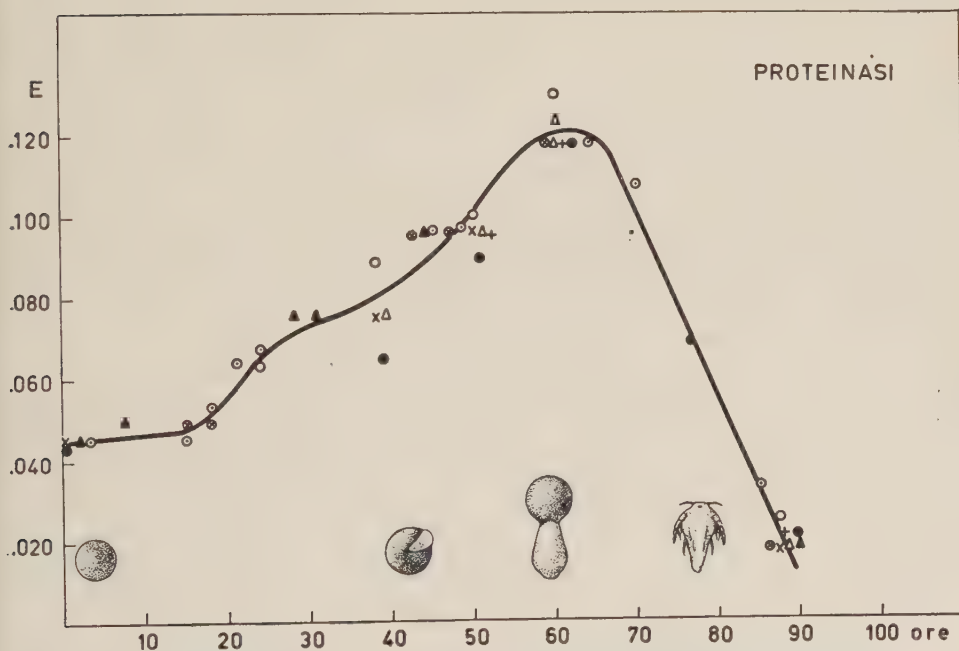


Fig. 4. - Comportamento delle proteinasi durante lo sviluppo di *Artemia salina*: sono schematizzati gli stadi più significativi. In ordinate l'attività enzimatica, in ascisse le ore di sviluppo.

grafici riportati nella presente Nota che dipeptidasi e proteinasi hanno un differente comportamento, analogamente a quanto è stato dimostrato nello sviluppo embrionale degli Anfibi anuri. Le dipeptidasi mostrano un forte aumento nei primi periodi di idratazione mentre successivamente la loro

attività passa soltanto da 4  $\mu$ l a 6  $\mu$ l. Le proteinasi invece fino alla 20<sup>a</sup> ora rimangono praticamente costanti ( $E = .045$ ) e quindi aumentano fino ad una  $E$  di . 120. Questo sta ad indicare che ambedue questi enzimi sono indubbiamente ingranati con i processi costruttivi che si realizzano nell'individuo in sviluppo ma il ruolo da loro svolto nelle attività metaboliche è diverso. La fine delle riserve vitelline è segnalata da una brusca caduta delle attività enzimatiche e richiamo l'attenzione sul parallelismo di comportamento di questi enzimi nello sviluppo embrionale dei Vertebrati (Anfibi) e degli Invertebrati (Crostei) in funzione di determinati stadi del loro ciclo biologico. La concezione di Cotronei che la fine del riassorbimento del tuorlo nello sviluppo degli Anfibi segna il passaggio dalla vita embrionale a quella larvale con modificazioni di carattere umorale e metabolico, ha trovato negli studi di Urbani (1955) [1] una conferma ed una precisazione di carattere enzimologico. La estensione di questo indirizzo di ricerca dai Vertebrati agli Invertebrati ha dimostrato che anche nell'*Artemia salina* l'esaurimento dei materiali deutoplasmatici da parte dell'embrione che si è sviluppato è accompagnato dalle stesse modificazioni di comportamento degli enzimi proteolitici.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] URBANI E., « Ric. Sci. », 25, 2258 (1955).
- [2] URBANI E., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 89 (1955).
- [3] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 341 (1955).
- [4] COTRONEI G., « Arch. Zool. Ital. », 10, 85 (1922).
- [5] COTRONEI G., « Mon. Zool. Ital. », 41, 8 (1930).
- [6] COTRONEI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 6, 15 (1932).
- [7] URBANI E., « Experientia », 11, 209 (1955).
- [8] LØVTRUP S., « C. R. Lab. Carlsberg Sér. Chim. », 28, 400 (1953).
- [9] LØVTRUP S., « C. R. Lab. Carlsberg Sér. Chim. », 29, 261 (1955).
- [10] URBANI E. e URBANI MISTRUZZI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 126 (1953).
- [11] FAUTREZ-FIRLEFYN N., « Arch. de Biol. », 62, 391 (1951).
- [12] ARTOM C., « Mem. R. Accad. d'Italia », 2, 1-57 (1931).
- [13] GROSS F., « Zeitschr. Zellforsch. », 23, 522 (1936).
- [14] LINDERSTRÖM-LANG K. U. e HOLTER H., « Z. Physiol. Chem. », 226, 173 (1934).
- [15] HOLTER H. e LØVTRUP S., « C. R. Lab. Carlsberg Sér. Chim. », 27, 27 (1949).
- [16] DUSPIVA F., « Protoplasma », 32, 211 (1939).
- [17] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », 26, 2364 (1954).
- [18] URBANI E., « Ric. Sci. », 22, 2174 (1952).
- [19] URBANI E., ROGNONE L. e RUSSO S., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 13, 300 (1952).
- [20] DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », 24, 319 (1954).
- [21] URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Ric. Sci. », 24, 1275 (1954).
- [22] BARIGOZZI C., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », vol. 9 (1934).
- [23] GROSS F., « Naturwiss. », 20, 1, (1932).

**Istologia.** — *Grandezza dei neuroni piramidali della corteccia cerebrale in alcune specie di Mammiferi di differente mole somatica* (\*).  
Nota di ANTONIO BARASA, presentata (\*\*) dal Socio G. LEVI.

Il problema della relazione tra numero e grandezza dei neuroni e mole somatica si può ritenere risolto per i neuroni sprovvisti di dendriti, quali quelli dei gangli sensitivi. Già le antiche osservazioni di G. Levi (1908) <sup>(1)</sup> sovra cani di mole corporea differente avevano dimostrato una considerevole prevalenza nel volume dei neuroni negli individui di maggior mole. Più tardi Fazio e Cattaneo (1935) <sup>(2)</sup>, e Spina Franca Netto (1951) <sup>(3)</sup> mediante la determinazione del numero e della grandezza dei neuroni sensitivi in specie molto affini, di differente mole somatica, dimostrarono che vi è bensì una prevalenza nel numero dei neuroni nelle specie di maggior mole, ma che questa prevalenza è inadeguata all'innervazione di una superficie corporea tanto più estesa; di conseguenza l'insufficiente prevalenza numerica è compensata dall'ipertrofia dei singoli neuroni.

G. Levi (1925) <sup>(4)</sup> ha dato la seguente interpretazione di questa differenza: la prevalenza nel numero dei neuroni sensitivi negli animali di maggior mole corporea dipende dalla persistenza per un periodo più lungo di elementi indifferenti in grado di moltiplicarsi; quando questa riserva è esaurita, incomincia l'ipertrofia dei singoli neuroni, l'entità della quale varia in relazione alla durata ed alla velocità del periodo di accrescimento. La stessa interpretazione vale tanto per le differenze di grandezza dei neuroni che per quelle tra le fibre muscolari striate (elementi perenni secondo Bizzozzero).

Per i neuroni dei centri nervosi provvisti di una estesa arborizzazione dendritica, la questione si presenta più complessa che per quelli dei gangli sensitivi. Era stato invero dimostrato per le cellule radicolari motrici, per le cellule del Purkinje del cervelletto, per le cellule piramidali della corteccia cerebrale, che esistono differenze di una certa entità nella grandezza del pirenoforo (o pericario) tra animali di mole corporea differente (G. Levi 1906) <sup>(5)</sup>. Dubois <sup>(6)</sup> ha cercato di integrare i dati ottenuti da Levi col materiale ottenuto dalla determinazione del peso del cervello nei vari animali. Secondo

(\*) Ricerche compiute con un contributo del C.N.R. nel Centro di Studio sull'accrescimento e nell'Istituto di Anatomia degli animali domestici presso l'Università di Torino.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) G. LEVI, *I gangli cerebrospinali*. Suppl. al vol. 7, « Arch. it. Anat. Embr. », 1908.

(2) C. FAZIO e CATTANEO, « Mon. zool. it. », 46, 101 (1935).

(3) SPINA FRANCA NETTO, « Z. Zellforsch. », 36, 222 (1951).

(4) G. LEVI, « Ergebn. Anat. », 26, 87 (1925).

(5) G. LEVI, « Arch. it. Anat. Embr. », 5, 291 (1906).

(6) E. DUBOIS, « Proc. Ac. Sc. », 20. Amsterdam (1918).



Dubois il potenziale, il quale è l'esponente del rapporto tra le grandezze dei neuroni di due individui della stessa specie, ma di differente mole corporea (calcolato secondo i dati di Levi a 0,26), è molto vicino al valore ottenuto col determinare il rapporto tra i pesi del cervello nelle due specie (0,31). Il che conferma la previsione, che l'aumento del volume del cervello secondo l'esponente 0,26 dipende da incremento nel volume dei neuroni, senza aumento numerico (esponente ontogenetico).

Negli organi nervosi centrali, la determinazione della grandezza del pirenoforo, non vale, come per i gangli sensitivi, a rappresentare il volume della parte protoplasmatica del neurone; questa estensione è molto più grande di quanto risulta dalla misurazione del pericarico.

Da osservazioni singole risulta che l'arborizzazione dendritica è incomparabilmente più estesa negli animali di gran mole che in quelli di piccola mole. Ciò emerge da alcuni dati riferiti da G. Levi <sup>(7)</sup> e da Alberto Stefanelli <sup>(8)</sup>. Però le osservazioni su questo argomento sono estremamente scarse.

Fondandomi sovra preparati eseguiti colla modificazione di Cox al metodo Golgi, modificazione che, com'è noto, dà risultati molto completi e costanti, ho esaminato i caratteri dei neuroni piramidali di regioni omologhe della corteccia, e più precisamente furono confrontati i neuroni piramidali grandi <sup>(9)</sup> dello strato delle cellule piramidali profonde nel *Campo 4* della corteccia nelle seguenti specie di Mammiferi: *Mus musculus albinus*, *Mus rattus albinus*, *Canis familiaris*, *Bos taurus* ed *Equus caballus*.

Mi propongo di dare in avvenire una descrizione particolareggiata dei caratteri di questi neuroni nei vari animali e delle differenze nel loro numero e nella loro densità.

Per il momento mi limito a fornire qualche dato sulle differenze più vistose tra i neuroni piramidali nei vari animali, quali appaiono in preparati con la reazione di Golgi.

In questi neuroni, come del resto in altri neuroni dell'asse cerebro-spinale, il pirenoforo si continua insensibilmente nel tratto iniziale del prolungamento protoplasmatico principale, il quale, come il pirenoforo, contiene tigroide; cosicché i dati che abitualmente sono riferiti sulla grandezza di questi elementi sono privi di valore. Finché non si sarà trovato un metodo quantitativo per determinare l'estensione e l'entità della massa globale della parte protoplasmatica del neurone (pirenoforo e dendriti), siamo costretti a rinunciare a determinazioni quantitative, accontentandoci di istituire confronti tra l'estensione dell'arborizzazione dendritica che neuroni omologhi dei vari animali di mole corporea differente assumono.

Nel topino e nel ratto le cellule piramidali hanno forma simile a quella comunemente descritta come tipica per questi elementi. Il pirenoforo, di

(7) G. LEVI, *Trattato di Istologia*, vol. II, p. 731 e 733, U.T.E.T., 1954.

(8) STEFANELLI ALBERTO, « Boll. soc. it. Biol. Sper. », 7, 1462 (1932).

(9) A quanto sembra le cellule piramidali giganti (di Betz) sono proprie dell'uomo; non esistono in altri Mammiferi.

forma globosa, o, più raramente, triangolare, si continua verso l'alto nel dendrite apicale, il quale diminuisce gradatamente di spessore verso la superficie. Dal contorno del pirenoforo emanano numerosi dendriti basali, più lunghi e più ramificati nel ratto che nel topino; sottili e corte collaterali, con decorso orizzontale od obliquo, originano anche da vari punti del dendrite apicale. Quest'ultimo termina dividendosi in pochi e corti rami fra di loro divergenti; talvolta, nel topino, esso termina affilato senza suddividersi ulteriormente. Nel complesso, nel ratto, l'arborizzazione dendritica è notevolmente più estesa che nel topino, sia nelle piccole che nelle medie e nelle grandi cellule piramidali (cfr. figura 1: *a*, *b*).

Nel cane, le piccole e medie cellule piramidali mantengono ancora l'aspetto tipico, ma il pirenoforo è più grande che nelle specie precedenti, ed il numero, lo spessore e la lunghezza dei dendriti e delle loro collaterali appare più rilevante. Caratteristico è l'aspetto delle cellule piramidali più grandi (vedi figura 1: *c*): il loro pirenoforo presenta forme diverse, spesso irregolari; da esso partono numerosi e robusti dendriti basali, i quali, dopo un certo tratto, si suddividono in rami secondari. Nella maggior parte dei casi il dendrite apicale origina senza limiti netti dal pirenoforo con un robusto tronco; quest'ultimo ben presto si suddivide in due o più robusti rami, i quali, dopo breve tragitto, si biforcano in branche secondarie divergenti, rivolte verso la superficie; ne risulta un ciuffo di robusti rami ascendenti i quali per lo più decorrono per lunghi tratti senza fornire collaterali; soltanto poco prima di terminare ogni ramo si suddivide ulteriormente in sottili rami secondari. Talora, invece di un dendrite apicale, si originano direttamente dal pirenoforo vari tronchi ascendenti. Nel complesso, nei tre ordini di cellule piramidali, piccole, medie e grandi, la grandezza del pirenoforo e l'estensione dell'arborizzazione dendritica assume nel cane una estensione notevolmente superiore a quella riscontrata nel topino e nel ratto.

Nel bovino e nel cavallo, la grandezza del pirenoforo è di poco superiore a quella del cane. L'arborizzazione dendritica, invece, è incomparabilmente più estesa in tutte le varietà di neuroni, in confronto a quelli del cane. I rami dendritici sono più numerosi, più robusti e soprattutto più lunghi. In particolare risalta la suddivisione in grossi rami del dendrite apicale, i quali talvolta originano indipendentemente dal pirenoforo, altre volte, invece, da un grosso tronco comune, e costituiscono, per divisioni successive e per emissioni di rami collaterali, un ciuffo di dendriti ascendenti il quale assume nel bovino e nel cavallo una estensione enorme, raggiungendo la superficie della corteccia (vedi figura 1: *d*, *e*). Inoltre, in queste due ultime specie, la presenza di un ciuffo apicale di dendriti, non è un carattere esclusivo dei più grandi neuroni piramidali, ma si rintraccia anche nei medi e nei piccoli.

L'arborizzazione dendritica delle cellule piramidali del cavallo, specialmente di quelle medie e piccole, è alquanto più estesa di quella che si riscontra nel bovino.

Da quanto è stato detto, risulta che, tra le specie esaminate, in cane, bovino e cavallo, la forma delle cellule piramidali differisce alquanto da quella

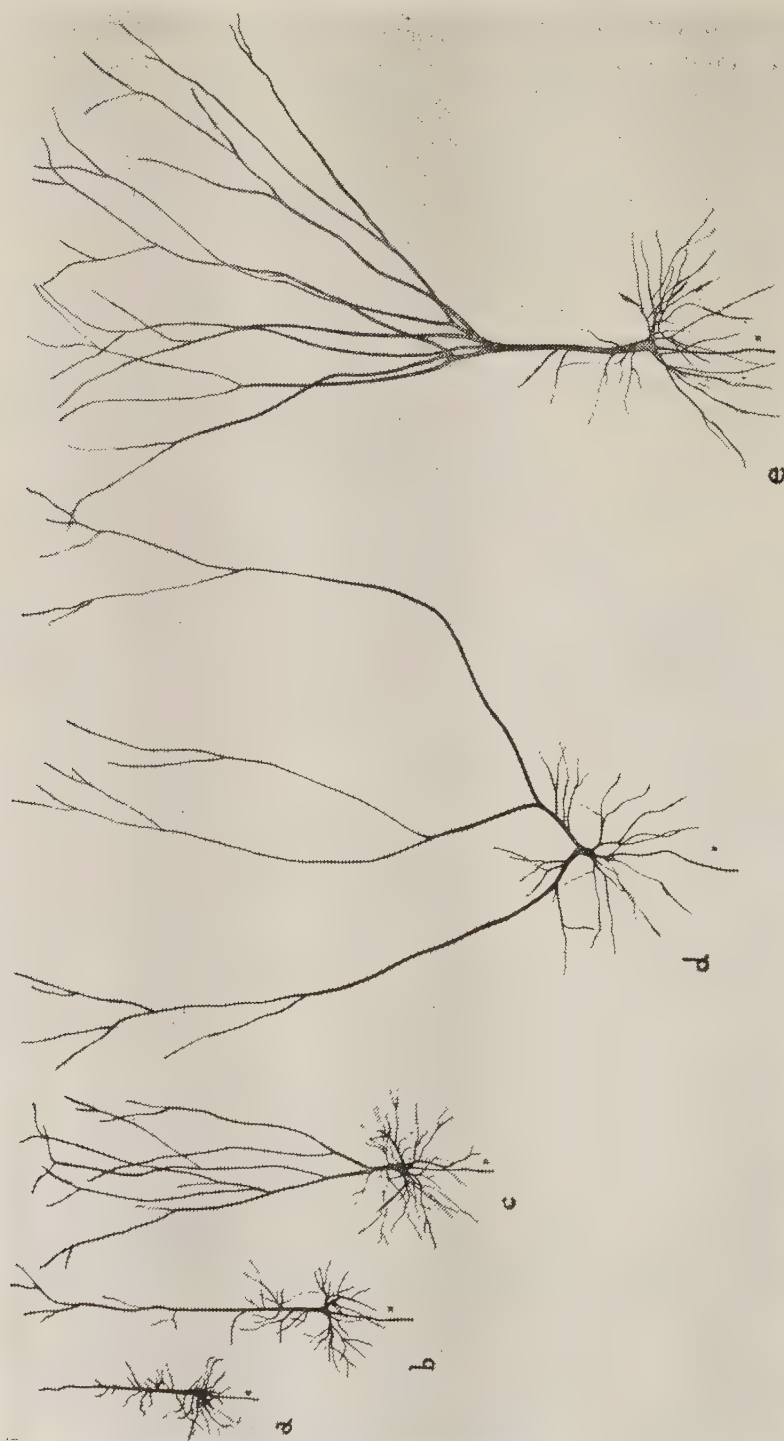


Fig. 1. - Sono riprodotti, allo stesso ingrandimento (di 40) i più grandi neuroni dello strato delle grandi cellule piramidali profonde del Campo 4 della corteccia cerebrale delle seguenti specie: a) *Mus musculus albinus*, b) *Mus rattus albinus*, c) *Canis familiaris*, d) *Bos taurus*, e) *Equus caballus*.

descritta da Cajal per l'uomo: il pirenoforo, infatti, molto di rado presenta una forma veramente piramidale, ed il dendrite apicale, per lo più unico nell'uomo, è sostituito da vari robusti rami divergenti i quali, con il gran numero di rami collaterali e secondari, hanno una estensione tanto più rilevante quanto maggiore è la mole corporea della specie animale considerata.

DISCUSSIONE. — Queste mie osservazioni documentano meglio quanto era già in parte noto, che cioè, mentre la grandezza del pirenoforo varia in misura modesta in relazione alla mole corporea — mi riservo di riferire in avvenire valori esatti ottenuti dalle misurazioni dei pirenofori nelle singole specie — l'estensione dell'arborizzazione dendritica, invece, presenta nelle cinque specie esaminate differenze relevantissime.

Con ciò si spiega il fatto, già conosciuto per ricerche antecedenti, che la densità dei pirenofori nella corteccia cerebrale è in ragione inversa della mole corporea.

Questa circostanza era già stata posta in rilievo dal Nissl<sup>(10)</sup>; questi ha fondato su di essa la sua ben nota ipotesi del «*Grigio*» (*Grau*), la quale tendeva a svalutare l'importanza del neurone nell'estrinsecazione delle funzioni nervose. Questa ipotesi è stata ripresa di recente da Karl Bauer<sup>(11)</sup>. Fin dal 1904 G. Levi<sup>(12)</sup>, pur confermando che nelle specie di maggiore mole somatica i pirenofori dei neuroni sono meno densi che in quelle di piccola mole, ritenne che questa differenza di densità, dipendesse dalla differente estensione dell'arborizzazione dendritica.

Determinazioni recenti di Tower ed Elliot<sup>(13)</sup> confermano il principio, che la densità dei neuroni, in una regione determinata della corteccia, è inversamente proporzionale alla mole corporea: nella balena vi sarebbero soltanto 6800 neuroni per mm<sup>3</sup> di corteccia, nell'elefante 6.900, nell'uomo 24.500 nel ratto 80.000.

Le presenti ricerche, col dimostrare, meglio di quanto fosse stato fatto finora, l'enorme entità delle differenze esistenti nell'estensione delle arborizzazioni dendritiche in relazione alla mole corporea, valgono a dare una interpretazione plausibile delle differenze riscontrate nella densità dei neuroni in specie di grandezza corporea differente. Ed è evidente che correlativamente alla differente estensione della parte protoplasmatica del neurone, anche le collaterali dei neuriti efferenti ed afferenti, come pure il numero delle cellule di nevroglia, variano in proporzione.

(10) F. NISSEL, *Die Neuronlehre und ihre Anhänger*. G. Fischer, Jena (1903).

(11) K. BAUER, (*Organisation d. Nervengerwebes u. Nervensystems* U. Schwarzenberg, München-Berlin (1953).

(12) G. LEVI, «*Monit. Zool. it.*», 15, 130 (1904).

(13) TOWER a. ELLIOT, «*Am. Journ. Phys.*», 168, 747 (1952).



**Fisiologia.** — *Un nuovo metodo di esplorazione delle funzioni laringee: la fotoelettrolaringografia* (\*). Nota di SERGIO CERQUIGLINI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Descriviamo in questa Nota un nuovo metodo di esplorazione delle funzioni laringee da noi ideato e già soddisfacentemente messo a punto attraverso controlli effettuati sia su modello artificiale che, *in vivo*, sull'animale da esperimento.

Essendo stati invitati dal Direttore della Clinica Otorinolaringoiatrica dell'Università di Roma, prof. G. Ferreri, ad affrontare, in collaborazione con la sua Scuola, lo studio sperimentale di alcuni problemi di fisiologia laringea oggi altamente dibattuti, abbiamo ritenuto opportuno anzitutto passare in critica rassegna i diversi metodi finora impiegati per indagare i processi fonatori e, in particolare, i meccanismi funzionali del generatore laringeo.

La storia dello sviluppo delle conoscenze al riguardo chiaramente dimostra che in questo, come in ogni altro campo della fisiologia sperimentale, qualche significativo progresso è sempre derivato dalla introduzione e dalla applicazione di nuovi metodi di esplorazione e di misura. Tra questi di gran lunga più redditizi e sicuri sono risultati quanti hanno consentito di analizzare il dinamismo funzionale del complesso strumento vocale nell'animale vivo. Per contro, assai meno proficue, quando addirittura non responsabili di improduttivi fuorviamenti concettuali, anche presso valorosi ricercatori, sono state le suggestioni derivate dall'osservazione del comportamento di modelli laringei artificiali costruiti in analogia a strumenti sonori già realizzati o meno dalla tecnica musicale.

Tra i metodi di esplorazione diretta finora impiegati i maggiori meriti spettano a quelli che permettono di studiare la cinematica laringea, specie durante l'emissione della voce, e il comportamento dei congegni muscolari e nervosi che ad essa presiedono, soprattutto quando siano tali da fornire di ogni fenomeno rilevato una documentazione obbiettiva. Ne fanno fede il favore via via incontrato dalla laringoscopia, dalla laringo-stroboscopia, -strobofotografia, -strobostereofotografia e -strobocinematografia, dalla tomografia, dalla roentgencinematografia, dalla cinematografia ultrarapida, dalla elettroencefalografia e dalla elettromiografia.

Devesi ammettere, tuttavia, che un così fornito arsenale strumentale e gli assalti sferrati con tanto acume strategico già da un paio di secoli, non hanno ancora portato alla definitiva conquista del segreto funzionale dell'apparato fonatorio. Ne è prova la grave crisi recentemente aperta dalla enun-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

ciazione di una nuova teoria, cosiddetta neurogena, della vibrazione delle corde vocali, che minaccia di scuotere dalle fondamenta le più importanti costruzioni della fisiologia e della fisiopatologia della fonazione, e la contesa accesi tra gli agguerriti affermatore di essa e i più numerosi sostenitori di convinzioni oramai considerate classiche.

Senza affatto voler qui entrare nel merito di questa interessantissima questione, ci limiteremo a rilevare come essa chiaramente denunci una tuttora persistente e importante carenza metodologica in tema di fisiologia sperimentale della fonazione. Sta di fatto che avverso la validità delle prove finora addotte a sostegno di ogni affermazione innovatrice può essere invocata — e lo è da parte di autorevolissimi sperimentatori — una qualche fallacia di metodo procedente dalla subbiettività dei rilievi o, quanto meno, da artefatti inerenti alla preparazione stessa se non addirittura agli strumenti di misura.

Tali considerazioni ci hanno reso convinti dell'opportunità di affidarci, per lo svolgimento del piano di indagini propostoci, ad un metodo di esplorazione delle funzioni laringee che nettamente si distaccasse da ogni altro fin qui adoperato sì da permetterci non solo di controllare, sulla base di qualche nuovo principio, le deduzioni già tratte in tanto discussa materia con i metodi noti, ma anche di esplorare le funzioni dell'organo in condizioni diverse da quelle finora consentite.

Ogni attività funzionale della laringe, sia essa di natura volontaria o di natura riflessa, interessi la vita vegetativa o quella di relazione, si riduce, in definitiva, alla possibilità di far variare convenientemente a livello di un determinato distretto la forma e le dimensioni di una condotta d'aria corrente così da condizionare processi aerodinamici utilizzabili dall'organismo a finalità diverse, sia meccaniche che acustiche. È quindi a livello dello spazio glottideo, dove si traduce in effetto ogni attività meccanica di cui l'organo è capace, che abbiamo cercato la possibilità di effettuare rilievi e misure. In altri termini, abbiamo mirato alla possibilità di misurare e di registrare le variazioni dell'area glottica per trarne informazioni sui moti del contorno materiale di essa. Così facendo avremmo evitato di limitare le osservazioni al rilievo dei soli effetti indiretti (pressori, acustici) del gioco funzionale dell'apertura glottidea (che, peraltro, si producono solo quando l'organo venga attraversato da correnti aeree), o a quello dei soli movimenti cordali. La obbiettivazione diretta di questi ultimi, infatti, tranne che per i regimi di basse e bassissime frequenze, è risultata finora o impossibile se affidata ai comuni metodi meccanografici o tutt'altro che inoppugnabile se affidata ai comuni metodi ottici, mentre quella indiretta (quale è possibile tentare con metodi elettrofisiologici) potrebbe essere considerata non assolutamente probativa.

Tra le diverse soluzioni prese in esame la più idonea al raggiungimento del nostro scopo ci è sembrata quella che definitivamente abbiamo prescelto e sulla quale si fonda il metodo che qui appresso descriviamo.

Un fascio di radiazioni luminose attraversa la fessura glottidea e viene raccolto da un elemento fotoelettrico. Qualsiasi movimento della rima glottidea che si traduca in una variazione di ampiezza della fessura produrrà nel fotoelemento una corrispondente variazione di potenziale che, adeguatamente amplificata, potrà essere osservata su un oscilloscopio a raggi catodici e fotograficamente registrata. La sensibilità del sistema dipenderà, naturalmente, dalla qualità dell'elemento fotoelettrico, dalla sua sensibilità e dal suo grado di inerzia, dalla configurazione e dalle dimensioni della sua superficie fotosensibile, dalla posizione e distanza di questa rispetto alla fessura e alla sorgente luminosa, nonché dalla natura e dalla intensità delle radiazioni impiegate.

Per le nostre prove ci siamo serviti di un fotoelemento a strato di sbarramento Westinghouse illuminato da un fascio di luce bianca fornita da una comune lampada da 4 W, alimentata in corrente continua mediante accumulatore (8 V). Il fotoelemento, a forma di disco del diametro di 8 mm, è stato fissato entro un'armatura cilindrica di rame, con funzione di schermo, e con questa racchiuso all'interno di un astuccio cilindrico di perspex nero, rivolgendo la superficie sensibile verso il fondo di questo costituito da una lamina incolore dello stesso materiale, perfettamente trasparente ed avente faccie piane e parallele. La visualizzazione e la misura delle variazioni di potenziale è stata eseguita mediante un oscillografo a raggi catodici a due canali (ETC, mod. H-21 A) con schermo a fluorescenza violetta (P 11) previa amplificazione.

In tali condizioni abbiamo raggiunto una amplificazione di  $2 \times 10^5$ . Le registrazioni sono state eseguite mediante una camera a scorrimento rapido (Fairchild Oscillo-Record Camera, obb. Wollensak 50 mm, f 1,5) su film da 35 mm (Schermofoto Ferrania X 2 A).

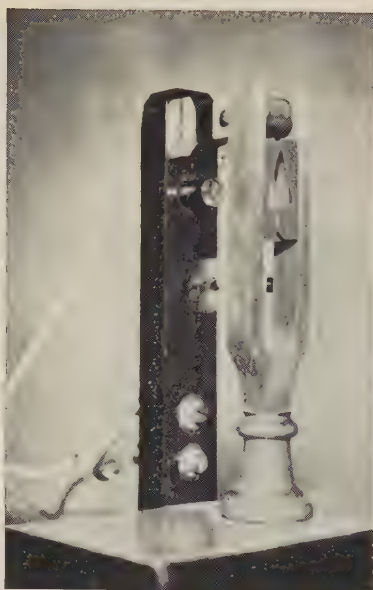
Per controllare la sensibilità, la fedeltà di misura e l'efficienza del complessivo sistema abbiamo realizzato il dispositivo rappresentato nella fig. 1. Esso consiste di un diapason tarato (435 Hz, a  $+ 20^\circ \text{C}$ ) su ciascuno dei rebbi del quale è fissata una sagoma di corda vocale ritagliata da un leggero cartoncino nero: l'affrontamento delle due sagome, convenientemente disposte su piani paralleli, nello spazio compreso fra i due rebbi concorre a formare una fessura che, grosso modo, simula una rima glottidea e la cui ampiezza subisce periodici incrementi e decrementi in accordo con le vibrazioni del diapason; queste ultime sono autointrattenute da un dispositivo elettromagnetico. Attraverso detta fessura viene illuminata la fotocellula con un fascio di raggi luminosi convenientemente condensati da una lente. In tali condizioni gli spostamenti, impercettibili a vista, dei bordi della fessura si traducono sullo schermo oscilloscopico in onde sinusoidali di grande ampiezza la cui perfetta regolarità di forma, e la cui frequenza esattamente coincidente con quella di vibrazione del diapason, rispecchiano la sensibilità e la fedeltà del sistema di registrazione (fig. 2).

Le prove *in vivo* sono state eseguite su un cane di media taglia (kg 14) in narcosi barbiturica (Nembutal sodico, mg 45/kg di peso corporeo, endo-

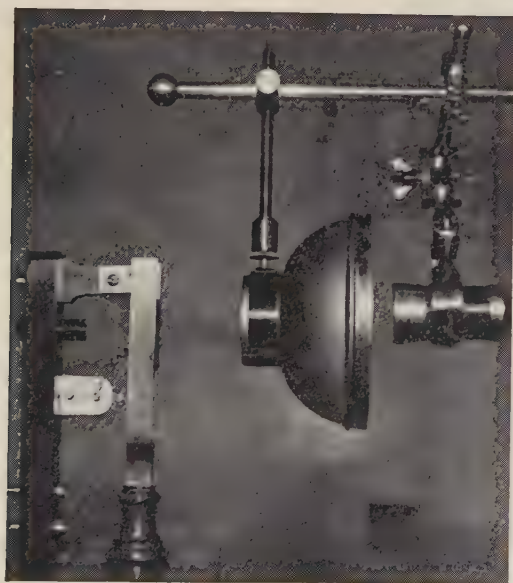




A



B



C

Fig. 1.

A, modello di fessura glottidea montato su diapason ( $La_3$ ) elettromagneticamente intrattenuto; B, lo stesso con elemento fotoelettrico che riguarda la fessura; C, montaggio completo con dispositivo di illuminazione.



peritoneo). L'animale è stato operato di tracheotomia bassa e convenientemente intubato. Dopo aver messo allo scoperto il nervo laringeo inferiore di sinistra, all'altezza della cartilagine cricoide, ed averlo delicatamente isolato per un tratto conveniente, lo abbiamo adagiato su un paio di elettrodi stimolatori (tipo Dastre) previa collocazione di un sottile lembo di gomma para atto a garantire l'isolamento elettrico dai tessuti circostanti. Attraverso l'apertura inferiore del moncone prossimale della trachea abbiamo introdotto il cilindro di perspex (diam. esterno: mm 12,9; lunghezza: mm 39) racchiu-



Fig. 2. - Oscillogramma della risposta fotoelettrica alle vibrazioni del diapason (435 Hz) rappresentato nella fig. 1. Registrazione contemporanea (traccia superiore) di una oscillazione di 50 Hz (c. a. rete di illuminazione) assunta come riferimento.

dente l'elemento fotoelettrico, in modo che quest'ultimo si trovasse orientato verso la faccia inferiore delle corde vocali da cui veniva a distare 1 cm circa. Mantenendo convenientemente aperte le fauci dell'animale con un divaricatore, e fissata la lingua, in trazione, al pavimento della bocca, abbiamo provveduto ad illuminare attraverso la glottide (in tale postura perfettamente visibile) la fotocellula. A tale scopo il sistema costituito dalla lampada alimentata in c.c. e dalla lente condensatrice è stato avvicinato fino a breve distanza dagli incisivi dell'animale e fissato in posizione atta a far sì che i raggi di luce venissero a cadere perpendicolarmente sulla superficie sensibile della fotocellula traguadata attraverso la rima glottidea. Stabilite le connessioni con il preamplificatore e con l'oscillografo mediante cavo schermato, si è provveduto ad estinguere ogni sorgente di luce alimentata in c.a. presente nella stanza onde eliminare l'introduzione di un artefatto fotoelettrico di fonte ambientale altrimenti inevitabile.

L'intero dispositivo strumentale è schematicamente rappresentato nella fig. 3.

Le stimolazioni del nervo laringeo sono state eseguite con impulsi di corrente rettangolari della durata di 1 m/sec, alla frequenza di 1 al sec, con un voltaggio sufficiente a fornire stimoli di intensità tale da provocare una scossa semplice dei muscoli delle corde vocali nettamente apprezzabile a vista. Sull'oscillografo sono stati registrati contemporaneamente, ciascuno su proprio canale, i segnali relativi agli stimoli applicati al nervo ed alle risposte fornite dal fotoelemento. Nella fig. 4 è riportato un esempio di tali registrazioni.

L'esame dei tracciati ottenuti permette di conoscere il senso dei movimenti cordali, la loro durata e il periodo di latenza. Le misure cronologiche possono, evidentemente, essere spinte fino ad un grado di precisione estrema, l'inerzia

e la banda di frequenza del sistema di registrazione dipendendo praticamente dalla inerzia del fotoelemento. Nel caso particolare, l'elemento Westinghouse da noi adoperato, alle prove di taratura previamente istituite, si è dimostrato capace di rispondere correttamente fino a frequenze dell'ordine di circa 3000 Hz

Alla registrazione visiva e fotografica delle risposte del fotoelemento alle variazioni della fessura glottidea può essere utilmente associata, come abbiamo potuto controllare in prove appositamente eseguite sia su modello che *in vivo*, la riproduzione acustica diretta, a mezzo di altoparlante, o indiretta, a mezzo di registrazione su nastro magnetico.

In base alle premesse teoriche ed ai soddisfacenti risultati finora ottenuti nelle nostre prove sperimentali, riteniamo che il metodo da noi ideato offra nuove e promettenti possibilità per lo studio delle funzioni laringee.

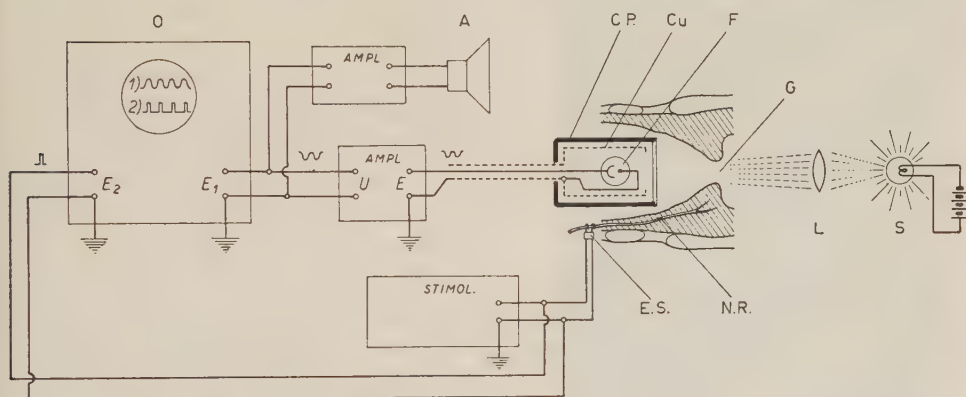


Fig. 3. - Schema di dispositivo strumentale per la *fotoelettraringografia*.

G, glottide; F, fotoelemento Cu, schermatura di rame; C. P., custodia di perspex; S, sorgente luminosa; L, lente condensatrice; N.R., nervo ricorrente; E.S., elettrodi stimolatori; O, oscillografo a doppia traccia; A, altoparlante.

Esso, infatti, permette di registrare graficamente ogni possibile variazione di ampiezza della fessura glottidea, dalla massima apertura alla occlusione completa, e pertanto ogni possibile movimento, attivo o passivo, delle strutture laringee, e delle corde vocali in particolare, che ne sia responsabile. Per tale metodo di esplorazione delle funzioni laringee la denominazione che ci sembra più conveniente, e che vorremmo proporre, è quella di *fotoelettraringografia* (F.E.L.G.).

Rileviamo, per inciso, che a nostra conoscenza la registrazione grafica delle variazioni di diametro dell'orificio glottideo e delle vibrazioni delle corde vocali è stata tentata finora solo occasionalmente in alcune circostanze sperimentali ed unicamente con metodi meccanografici diretti. Ci riferiamo, in particolare, alle registrazioni delle contrazioni dei muscoli glottidei fatte nel 1876 da M. Chauveau [1] per studiare la velocità degli influssi nervosi motori sperimentando sul nervo ricorrente nei solipedi; a quelle effettuate

nel 1885 da Ch. François-Franck [2] per studiare, nel cane, le reazioni respiratorie alle eccitazioni cerebrali epilettogene e non; ed a quelle effettuate nel 1923 da L. Bellucci [3] per studiare, nel cane e nella scimmia, la localizzazione dei centri corticali motori delle corde vocali e la possibilità di provocare, attraverso la stimolazione di essi, l'epilessia laringea sperimentale.

Il metodo fotoelettrico da noi escogitato presenta rispetto ad ogni possibile metodo grafico diretto, ed a quello meccanografico in particolare, vantaggi tali da sembrarci fin d'ora promettente di ben più ampie e precise possibilità di indagine, non fosse altro per l'elevata frequenza naturale del sistema di registrazione e per il disimpegno dalla necessità di porre le strutture mobili laringee a contatto con qualsiasi sistema materiale.

Le prove da noi effettuate *in vivo*, sopra riferite, riguardano una sola delle possibili preparazioni sperimentali e solo una determinata disposizione delle parti strumentali, quali ci è sembrato conveniente adottare per verificare l'efficienza del nostro metodo in via di principio. È evidente che tanto l'una che l'altra potranno variare a seconda della natura del problema di volta in volta affrontato, della specie animale e delle condizioni sperimentali prescelte. Limitandoci a considerare anzitutto i casi in cui, sia nell'animale da esperimento che nell'uomo, si renda possibile praticare una tracheotomia potrà trovarsi conveniente, a seconda delle modalità operatorie e sperimentali, del tipo e delle dimensioni del fotoelemento e della luce adottata, la disposizione sud-



Fig. 4. - Fotoelettrrolaringogramma ottenuto per stimolazione del n. ricorrente (Cane).

I punti visibili al disopra della traccia superiore corrispondono agli stimoli (durata 1 msec, frequenza 1/sec); la traccia inferiore mostra la corrispondente risposta. I tracciati si leggono da sinistra a destra e, in continuazione, dall'alto in basso; stimolo (S) e risposta (R) sulle ordinate, tempo sulle ascisse.

cammino inverso dei raggi luminosi, con disposizione della sorgente di luce al di sotto della fessura glottidea e del rivelatore fotoelettrico al di sopra di questa. In altri casi, laddove risultasse più conveniente una maggiore flessibilità di percorso dei raggi luminosi, si potrà ricorrere a fenomeni di rifrazione e di riflessione, ed a rendere più idonea o più significativa la ricezione potranno impiegarsi più elementi fotoelettrici collegati in serie, in parallelo o in opposizione.



Oltre a ciò merita di essere considerata con la massima attenzione la possibilità di realizzare la fotoelettrolaringografia nel soggetto integro, in considerazione delle ben più vaste applicazioni che essa potrebbe trovare nello studio di problemi di fisiologia, di fisiopatologia e di diagnostica. Nell'intento di raggiungere questo importante obbiettivo abbiamo già iniziato alcune prove i cui risultati appaiono promettenti.

Quale prima applicazione del nostro metodo in campo di indagini fisiologiche abbiamo iniziato nel nostro Laboratorio, in collaborazione con G. Paludetti e G. Auriti della Clinica Otorinolaringoiatrica dell'Università di Roma, una serie di esperimenti intesi alla verifica delle risposte motorie delle corde vocali già osservate da P. Laget [4] con metodo laringo-stroboscopico in corso di stimolazione elettrica, a varie frequenze, del nervo ricorrente del cane. Com'è noto i risultati riferiti da questo Autore rappresentano uno dei più consistenti punti d'appoggio sperimentali della moderna tesi di R. Husson [5, 6, 7] sulla genesi encefalica della vibrazione delle corde vocali. La loro discussa accettabilità [8, 9] ne rende estremamente interessante la verifica con nuovi sussidi metodologici. I risultati delle ricerche da noi istituite in proposito saranno oggetto di prossima pubblicazione.

L'A. sentitamente ringrazia il dott. P. L. Ballesio per l'entusiastico e fattivo aiuto prestatogli nel montaggio delle apparecchiature strumentali e nelle operazioni di registrazione fotografica.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. CHAUVEAU, «C. R. Acad. Sc.», 1876 (citato da François-Franck).
- [2] CH. FRANÇOIS-FRANCK, *Leçons sur les fonctions motrices du cerveau*. Doin, Paris 1887, p. 136.
- [3] L. BELLUCCI, «Arch. Fisiol.», XXII, 87 (1924).
- [4] P. LAGET, «J. Physiol. Paris», XLV, 147 (1953).
- [5] R. HUSSON, *Etude des phénomènes physiologiques et acoustiques fondamentaux de la voix chantée*. Thèse Fac. Sc. Paris, 17 juin 1950. «La Revue Scientifique», Paris 1950.
- [6] R. HUSSON, «J. Physiol. Paris», XLIII, 757 (1951).
- [7] R. HUSSON, «Annales d'Oto-Laringologie», II, 124 (1952).
- [8] A. FESSARD e B. VALLANCIEN, «J. Français d'O.R.L.», V, 328 (1956).
- [9] J.W. VAN DEN BERG, «Acta Physiol. Pharmacol. Neerl.», V, 40 (1956).



**Ecologia.** — « *Influenze cosmiche* » e suicidio. (*Sugli effetti di poco note condizioni ambientali sull'attività nervosa superiore*)<sup>(\*)</sup>.  
Nota di ENRICO MESSERI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. CHIARUGI.

Molte « accidentalità » nelle vicende umane sono ritenute del tutto occasionali, per quanto spesso favorite da particolari impulsi della psiche per interferenze ambientali.

Riferendoci ad un precedente studio sul ritmo dei concepimenti [1], abbiamo voluto saggiare se, anche nel caso dei suicidi, potesse essere messa in evidenza una qualche correlazione fra questi episodi ed i valori fornitici dal « Test inorganico » del Piccardi (tempo di precipitazione e sedimentazione di una sospensione colloidale di ossicloruro di bismuto in recipiente aperto, o schermato da foglia di rame), sul significato del quale rimandiamo alla descrizione originale dell'Autore [2-4].

Se prendiamo in esame le statistiche nazionali dei suicidi, osserviamo anzitutto che questo fenomeno, legato a particolari e gravi sofferenze della psiche in rapporto a difficoltà più o meno forti della vita, soggiace ad un naturale ritmo stagionale (grafico « A »).

Analizzando il tracciato che riproduce in ascisse i mesi dei vari anni ed in ordinate i valori numerici del fenomeno per un quinquennio (1951-55), si nota anzitutto un andamento ciclico della curva, con onde e depressioni, in determinate epoche dell'anno. In particolare si osserva che i valori massimi del fenomeno si ripetono regolarmente ogni anno nei mesi di maggio, giugno e luglio, mentre i valori più bassi si notano, meno regolarmente, nei mesi invernali ed in particolare nel gennaio di ogni anno, salvo nel 1951 il cui valore minimo è segnato dal dicembre. Nelle curve dei singoli anni si osserva una ascesa nei mesi iberno-primaverili fino all'inizio dell'estate, con rapida discesa durante questa stagione e con irregolarità, nei vari anni, per l'autunno.

Ad un primo esame il tracciato ci appare fornito da una serie di onde e depressioni, notevolmente regolari, nella loro ritmicità semestrale.

L'esame del grafico fa pensare anche a cause meteorologiche (temperatura, pressione, umidità, ecc.), ma per ora non è stato possibile un raffronto fra queste vicende climatiche ed il fenomeno, data anche la grande estensione latitudinaria del nostro Paese. Negli U.S.A. sono state eseguite notevoli osservazioni in questo campo [3] specie per gli effetti che lasciano dietro a se i fronti meteorologici dei cicloni.

Il suicidio è sollecitato da numerose interferenze ambientali in soggetti particolarmente psicolabili, e di ciò ci stiamo occupando in una particolare analisi ecologica del fenomeno in Italia, che verrà fra breve pubblicata. Attualmente ci interessa di indagare se alle più note componenti ambientali (fisico-terrestri, sociali, etiche, ecc.) si può aggiungere qualche

(\*) Istituto di Fisiologia dell'Università di Messina.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

altro fattore ancora poco conosciuto, la cui intensità, solo da alcuni anni è stato possibile misurare, grazie al metodo di Piccardi.

Prendendo ora in esame il Test di Piccardi nella sua componente «D» (sotto schermo di rame), osserviamo le seguenti caratteristiche, specie nei primi 3 anni (1951, 1952, 1953): valori massimi annuali nei mesi di primavera (maggio-giugno) e valori minimi in gennaio febbraio, marzo. Negli ultimi due anni (1954-55) il tracciato è più irregolare, per il passaggio dalla fine del vecchio ciclo solare all'inizio del nuovo (grafico «B»). Per meglio poter raffrontare i grafici dei due fenomeni in esame prendiamo ora in considerazione per ambedue i problemi la somma dei dati annuali per il triennio 1951, 1952, 1953 (grafico «C»).

Se si sovrappongono le due curve, così ottenute, si nota anzitutto la loro somiglianza specie per tre caratteristiche principali:

1° perfetta coincidenza dell'apice delle due curve nel mese di maggio;  
2° rapida ascesa delle due linee nei mesi primaverili (marzo, aprile, maggio);  
3° rapida discesa delle due curve nei mesi di giugno e luglio; 4° nuova ascesa nei mesi di agosto e settembre; 5° negli altri mesi i due tracciati non sono così nettamente somiglianti fra loro, pure ripetendo nella media andamenti simili (caduta nel gennaio e febbraio), con discordanze varie nei mesi di novembre e dicembre.

TABELLA I A.

*Frequenza mensile tempi  
flocculazione Test P. D.*

MESE	ANNO				
	1951	1952	1953	1954	1955
Gennaio . . . . .	37,5	36,7	39,8	37,5	46,8
Febbraio . . . . .	33,2	20,6	35,2	33,2	46,8
Marzo . . . . .	29,8	37,6	20,9	17,4	38,4
Aprile . . . . .	49,2	44,5	44,5	35,5	38,5
Maggio . . . . .	58,2	52,7	47,9	30,0	45,5
Giugno . . . . .	57,1	52,3	36,7	22,4	46,5
Luglio . . . . .	54,1	43,8	37,4	21,8	56,3
Agosto . . . . .	49,1	42,4	33,2	33,0	53,9
Settembre . . . . .	53,3	43,0	37,5	34,6	67,7
Ottobre . . . . .	52,1	45,5	36,3	36,5	62,4
Novembre . . . . .	50,9	46,5	28,3	44,8	48,0
Dicembre . . . . .	41,5	39,9	29,2	49,1	47,7

TABELLA I B.

*Frequenza mensile suicidi*

ANNO				
1951	1952	1953	1954	1955
213	202	197	152	197
218	226	226	171	256
291	252	273	231	300
278	260	287	263	300
379	306	311	339	227
347	330	308	350	330
294	313	222	279	228
274	255	246	265	222
243	214	230	243	223
229	205	205	202	222
206	203	218	206	214
195	218	244	210	230

Riassumendo: da una scorsa delle tabelle I A e I B che riproducono, mese per mese, il numero (frequenza) dei suicidi, ed il tempo di flocculazione

dell'ossicloruro di bismuto in un recipiente schermato di metallo (Test «D» inorganico di Piccardi), si ha l'impressione che le due serie seguono un andamento parallelo. Questa impressione è confermata dal confronto dei relativi diagrammi riportati nel grafico «A» e «B» almeno per quanto riguarda il triennio 1951-1953. Questo grafico è costituito riportando in ascisse il tempo (mese per mese), ed in ordinate l'intensità dei due fenomeni distinti.

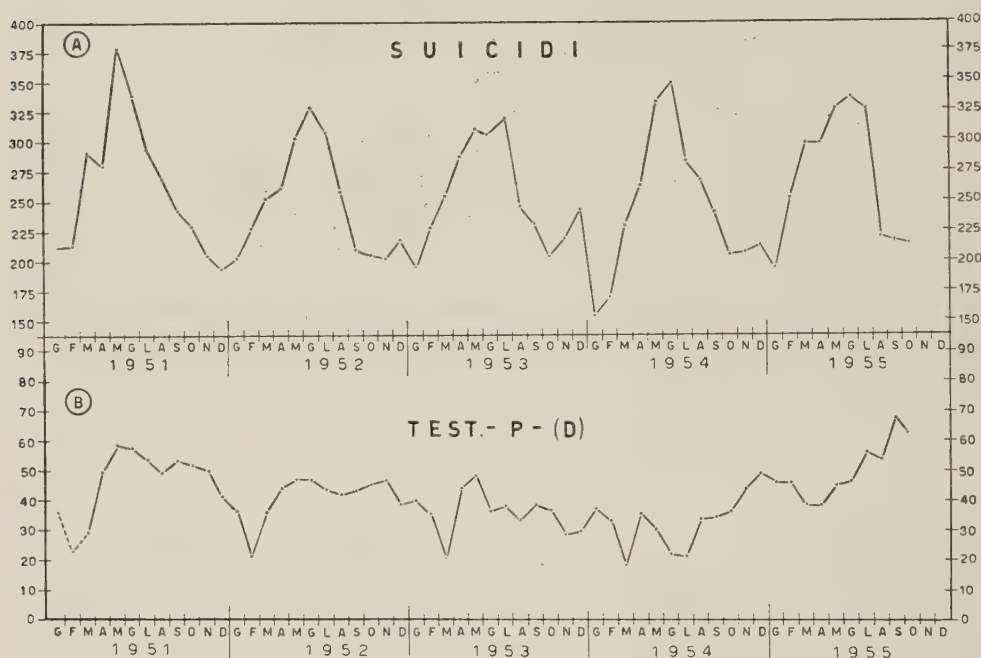


Fig. 1

Poiché le due curve si ripetono con periodicità annuale, sebbene non identicamente, abbiamo pensato che allo scopo di purificare le presumibili variazioni mensili da inevitabili alterazioni provenienti da cause accidentali, fosse opportuno sostituire ai valori singoli la somma dei valori corrispondenti agli stessi mesi di più anni successivi. In concreto abbiamo elaborato in questa forma il materiale nel triennio 1951-53, ottenendo i dati dalle tabelle I e II, nei quali il parallelismo fra i due fenomeni è ancora più evidente. Inoltre per dare al fenomeno una buona rappresentazione visiva, abbiamo riportato i dati delle tabelle I e II su di un unico diagramma, a scale sovrapposte, graduando queste scale in modo che il campo di variazione, nel quale si svolge il fenomeno in esso rappresentato, misurasse nei due casi la stessa ampiezza. È questo il metodo comunemente usato dagli studiosi di statistica quando vogliono dare una maggiore intuibilità visiva alle correlazioni fra due fenomeni.

TABELLA I.

*Test Piccardi (D)*  
Somma 3 anni (1951-53)

Gennaio . . . . .	1140
Febbraio . . . . .	890
Marzo . . . . .	883
Aprile . . . . .	1382
Maggio . . . . .	1588
Giugno . . . . .	1461
Luglio . . . . .	1053
Agosto . . . . .	1247
Settembre . . . . .	1338
Ottobre . . . . .	1339
Novembre . . . . .	1257
Dicembre . . . . .	1096

TABELLA II.

*Frequenza suicidi*  
Somma 3 anni (1951-53)

Gennaio . . . . .	712
Febbraio . . . . .	670
Marzo . . . . .	816
Aprile . . . . .	825
Maggio . . . . .	996
Giugno . . . . .	985
Luglio . . . . .	729
Agosto . . . . .	775
Settembre . . . . .	887
Ottobre . . . . .	639
Novembre . . . . .	627
Dicembre . . . . .	657

Nel Test P. D. i dati riferiti ai primi due mesi del 1951 sono stati ricavati dai corrispondenti mesi del 1954, poiché le esperienze sul « Test » furono iniziate solo nel marzo 1951.

Abbiamo ottenuto in tal modo il grafico « C » nel quale la linea tratteggiata rappresenta le variazioni mensili del Test Piccardi, e la linea continua le variazioni mensili nella frequenza dei suicidi, espresse entrambe dalle somme triennali.

Come è facile controllare, e come abbiamo già accennato, le due curve risultano almeno per i primi 9 mesi dell'anno, quasi identiche, salvo un leggero ritardo del minimo assoluto dei tempi di flocculazione (Test P.) che cade fra il febbraio ed il marzo, rispetto al minimo assoluto dei suicidi, che cade in febbraio, ed un persistere di alte frequenze dei suicidi (sebbene non più massime) dopo la caduta del tempo di flocculazione (Test P.) del suo valore massimo (maggio), ed un leggero ritardo nell'accrescimento delle frequenze dei suicidi dopo il minimo del luglio, e finalmente un notevole anticipo della caduta delle stesse frequenze, rispetto alla caduta del Test P dopo il massimo relativo di settembre.

In linea generale si ha perciò l'impressione che i due fenomeni abbiano un andamento parallelo, ma che non sia altrettanto facile affermare che quello di natura fisica, rilevato dal Test P., sia causa di quello (forse prevalentemente fisico-psicologico) che si manifesta nelle frequenze dei suicidi. Si avrebbe piuttosto l'impressione che i due fenomeni dipendessero da una medesima causa, non ancora identificata.



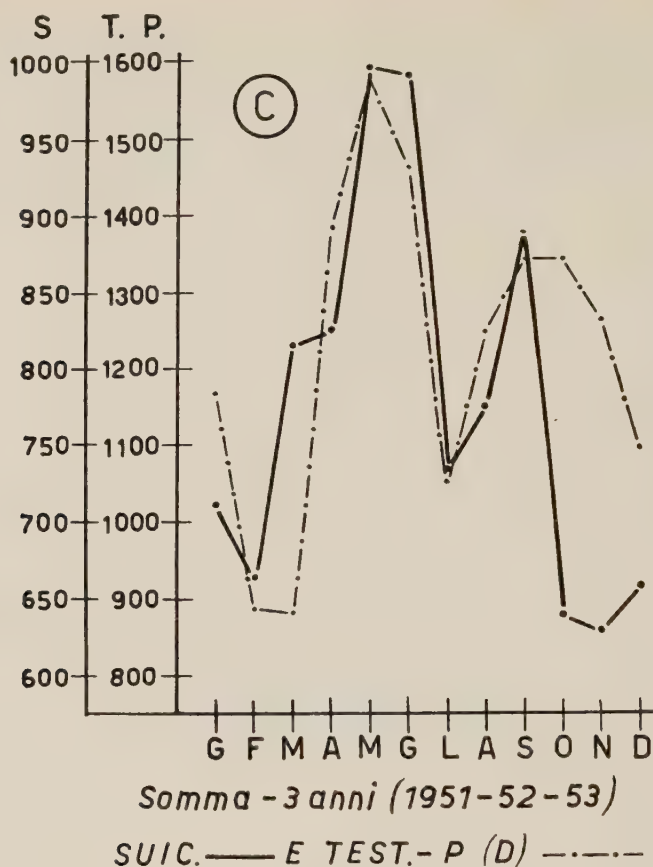


Fig. 2.

Allo scopo di valutare l'intensità della corrispondenza fra le due curve e di renderci conto delle probabilità che il fenomeno da noi osservato sia suscettibile di una interpretazione più ampia (universale), eccedente cioè le circostanze contingenti che possono avere operato nel nostro campione, abbiamo calcolato sui dati triennali delle tabelle I e II il *coefficiente di correlazione* ( $r$ ) di Pearson, secondo la formula

$$r = \frac{S(X \cdot Y)}{\sqrt{S(X^2) \cdot S(Y^2)}}$$

( $X$  = frequenze mensili suicidi;  $Y$  = frequenze mensili dei tempi del Test Piccardi «D» (sotto schermo). L'« $r$ » di Pearson è particolarmente consigliabile in occasione di due fenomeni in relazione lineare, come è il caso presente. Abbiamo valutato la significatività dell'« $r$ » trovato con le Tavole di Fischer.

Dai calcoli eseguiti, in base alla formula su riferita, l'« $r$ » risulta = 0,584. In relazione alla Tavola di Fischer la «significatività» dell'« $r$ » trovato da noi, cade circa sul 3 % di probabilità di errore, e pertanto, secondo la prassi usata in statistica, esso è ampiamente «significativo» per la correlazione dei due fenomeni che noi volevamo mettere in evidenza col presente studio.

A maggiore conferma sulle correlazioni osservate nel triennio (1951-53), abbiamo voluto estendere l'analisi sull'intero quinquennio (1951-55), vale

a dire sul periodo massimo del quale disponiamo dei dati relativi a tutti e due i fenomeni. In questo caso però abbiamo ritenuto opportuno operare non più sui dati mensili, ma sulle medie annuali, in modo da avere sempre più ampio il campo di eliminazione delle numerose circostanze contingenti, che possono avere agito sul terreno psichico.

TABELLA III.

Anni	Media annua suicidi
1951	264
1952	249
1953	255
1954	243
1955	262

TABELLA IV.

Anni	Media annua Test P. « D »
1951	50,2
1952	42,0
1953	35,6
1954	32,9
1955	50,1

Riportando i dati delle due tabelle III e IV su di un unico digramma (grafico « D »), a scale sovrapposte, graduando queste in modo da avere la stessa ampiezza del campo di variazione dei due fenomeni, otteniamo due tracciati (linea continua = frequenza suicidi; linea tratteggiata valori Test P. « D ») che presentano una grande somiglianza tra loro (le scale procedono per i suicidi e per il Test Piccardi con progressione uguale, in ascisse il tempo di anno in anno, in ordinate i valori dell'intensità dei due distinti fenomeni). In particolare si nota che i valori massimi sono rappresentati per ambedue le curve, dagli anni 1951 e 1955, ed il valore minimo pure in comune nel 1954. Solo nel tracciato fra gli anni 1952 e 1953 si nota una netta discordanza fra le frequenze dei suicidi, che sono in ascesa, ed i valori del Test Piccardi, che sono in diminuzione. Negli anni precedenti (1951-1952) e posteriori (1953-54) invece le tendenze dei due tracciati sono concordanti, in progressiva discesa dei rispettivi valori, pure essendo più rapida la caduta delle frequenze dei suicidi rispetto a quelle del Test inorganico. Nell'ultimo tratto del diagramma, in ascesa, invece il parallelismo fra i due tracciati è perfetto.

Le divergenze notate nell'anno 1952, nelle frequenze dei suicidi in ascesa, potrebbero essere anche puramente casuali; ed in tal caso la media ottenuta fra i valori del quadriennio porterebbe alla creazione di una nuova linea (punteggiata), parallela nel primo tratto a quella del tracciato del « Test inorganico », con convergenza nel secondo tratto, rimanendo perfetto il parallelismo nell'ultimo tratto. In questo caso la somiglianza risulterebbe sorprendente, però non potendo dimostrare *a priori* la casualità per la divergenza notata, pure rimanendo fedele la rappresentazione grafica dei

valori ottenuti dalle medie annuali, come riportati nel diagramma «D», (linea continua e tratteggiata) la somiglianza fra i due fenomeni rimane sempre molto evidente, specie nel primo e nell'ultimo tratto del diagramma e nei punti estremi di esso, che concordano perfettamente, negli anni 1951-54-1955. È da considerare infine che i due fenomeni messi a confronto sono di natura quanto mai diversa tra di loro; il primo rigidamente fisico, il se-

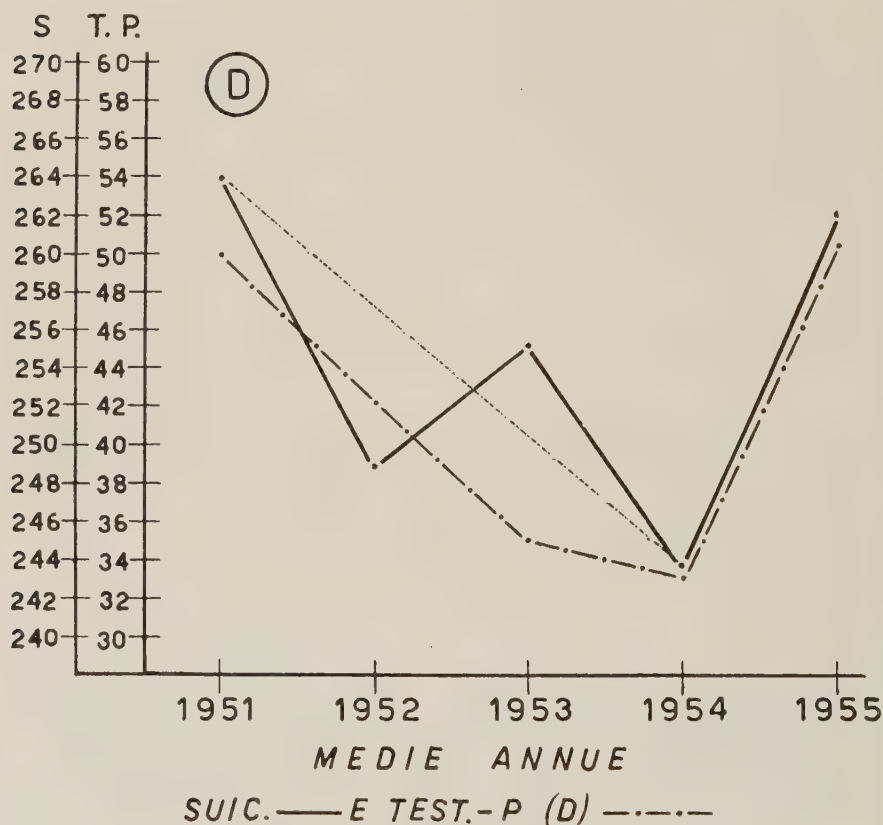


Fig. 3.

condo prevalentemente biopsicologico, ed è naturale che non possa esistere una perfetta concordanza tra di loro, perché in quel caso le «emanazioni cosmiche» rappresenterebbero la più efficiente, se non addirittura l'unica causa del suicidio, il che è assurdo ed inconcepibile, come risulta chiaro anche dalla complessa analisi ecologica del fenomeno, da noi effettuata nell'anno 1955.

Il Test Piccardi, per il significato del quale rimandiamo alla memoria originale [4], rappresenta la misurazione di forze radianti di diversa origine che incombono sul nostro habitat. Alcune sono di origine terrestre (meteorologiche, elettromagnetiche, ionosferiche, ecc.), altre di origine solare (radiazioni visibili ed invisibili, radioelettriche, corpuscolari, macchie,

eruzioni, ecc.), altre infine, provenienti da oltre il nostro sistema solare, dagli spazi siderali o planetarie (raggi cosmici, elettromagnetici, ecc.). Le azioni esercitate da questi «fenomeni esterni» sono efficienti anche se noi non le percepiamo organoletticamente; esse possono essere rivelate dal tempo della reazione di precipitazione dell'ossicloruro di bismuto allo stato colloidale, seguita da sedimentazione. Se la reazione avviene all'aria libera oppure sotto schermo di rame, i risultati relativi variano per molte cause, ma soprattutto perché nell'ambiente schermato molte radiazioni vengono captate e trattenute, e solo quelle più penetranti procedono oltre la barriera del metallo. Queste ultime sono appunto le radiazioni a lunghezza d'onda più corta e più penetranti e verosimilmente corrispondenti alle radiazioni cosmiche. Nessuno strumento fisico, per quanto sensibile, sarebbe capace di misurare con altrettanta fedeltà le variazioni di intensità di queste energie radianti. Questo metodo, ideato dal Piccardi, ci ha messo pertanto, per la prima volta, in condizioni di esperimento tali da potere percepire anche questo lato nascosto del nostro habitat, che molto verosimilmente esercita la sua influenza costantemente anche sulle vicende umane ed in particolar modo sulle funzioni psicosomatiche.

Molte forze elettromagnetiche, chimiche, gravitazionali, ecc. agiscono fra le particelle disperse del colloide, la cui superficie totale risulta enorme (molti metri quadri per un grammo di ossicloruro di bismuto). Queste particelle, seguendo un processo spontaneo, confluiscono in aggregati sempre più grossi, fino alla flocculazione e conseguente precipitazione. Il tempo di questa manifestazione fisica è influenzato dal gioco delle forze esterne, di cui sopra, e pertanto correlato alla loro intensità. Il Piccardi ha potuto inoltre studiare sperimentalmente l'effetto di un campo elettromagnetico sul «Test inorganico» e trovare analogie nette con le osservazioni già fatte nell'impiego del Test sotto schermo e fuori. Orbene anche il protoplasma vivente rappresenta un classico esempio di sostanza colloidale instabile. Nel gioco di forze che regolano la tendenza a raggiungere un certo equilibrio nel sistema colloide, trovano origine le perturbazioni osservate nel tempo di precipitazione, del «Test inorganico». Verosimilmente queste forze agiscono anche sui sistemi colloidali delle cellule, le quali entrano così in uno stato di sofferenza, che può portare a sintomatologie varie a seconda della sensibilità maggiore o minore che i diversi tessuti offrono in un dato momento. È facile comprendere pertanto che le condizioni psicosomatiche di un soggetto possono risentire, talvolta anche molto energicamente, di queste perturbazioni.

Anche se oggi gli studi della fisiologia e della psicologia non sono ancora in grado di mettere in evidenza particolari rapporti fra sistema nervoso ed azione di alcuni elementi ambientali, pure, per quanto molto indirettamente, con le indagini attuali una tenue traccia in questo campo apre la strada ad ulteriori ricerche che potranno essere, in futuro, molto utili per chiarire alcuni problemi di ordine fisiologico, patologico e psicologico [13. 16]. Nello sviluppo di questo studio cercheremo anche di sostituire al test statistico ben più definiti tests biologici, e fra questi reazioni enzimatiche *in vitro*.

Molto interessanti a questo proposito sono le ricerche del Cazzamalli [1] (Riflesso cerebro-psico-radiante), del Berger [6], del Adrian [7] e della nostra scuola sulle attività enzimatiche nella funzione nervosa superiore [14-15], ma il toccare, anche di sfuggita, questo vasto campo della fisiologia ci porterebbe troppo lontano dai fini di questa Nota preliminare; qui basti accennare che esistono già i presupposti teorici perché le ricerche, da noi iniziate, possano essere estese, con metodi appropriati alla risoluzione dei vari problemi, poiché come afferma l'Autore del «Test» «non vi è dubbio ormai che le radiazioni di origine terrestre, solare e cosmica agiscono



in modo visibile su di un colloide in evoluzione e quindi sulla vita delle piante, degli animali e degli uomini ».

A Vienna recentemente lo Strumpf [8] ha ricercato, in uno studio analogo al nostro, di correlare il Test Piccardi col ritmo della frequenza mensile di alcuni delitti (contro la morale, e lesioni corporee) ed ha trovato che i grafici di questi due fenomeni hanno delle analogie soprattutto con due punti di contatto dei valori minori nei mesi di marzo, e di settembre.

Queste ricerche preliminari ci lasciano non poco pensosi circa alcuni problemi, specie sul piano morale (libero arbitrio, ecc.), ma di ciò lasciamo la parola ai competenti ed ai qualificati in questa delicata materia. A noi interessa, nella attuale ricerca sistematica delle concause ambientali del suicidio, di avere intravisto anche questo lato nuovo del problema, che allarga vieppiù l'orizzonte sulle conoscenze dell'*ecologia umana* nel difficile campo delle relazioni sociali e psicologiche, che costituiscono uno dei capitoli più complessi ed avvincenti di questa giovane disciplina [10].

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. e P. MESSERI, « Arch. Antrop. Etnol. », 85 (1955), Firenze.
- [2] G. PICCARDI, « Tecnica Italiana », Anno 9, n. 8, dicembre (1954), Trieste; G. PICCARDI, Atti Accad. Naz. Lincei, « Rendic. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. », 21, fasc. 1-2 luglio (1955), Roma.
- [3] C. A. MILLS, « Amer. Journ. Psych. », novembre (1934), New York.
- [4] G. PICCARDI, « Wetter und Leben », 6, 217 (1954); G. PICCARDI, « Geofisica e Meteorologia », 1, 18, 42, 80 e 103 (1953); 2, 9, 70 (1954); 3, 31 (1955), Genova; G. PICCARDI, « Ciel et Terre », Anno 72, N. 5-6, Mai (1956), Ed. R. Louis, Bruxelles; G. PICCARDI « Rotary Club », ottobre (1955), Ediz. Vallecchi, Firenze; G. PICCARDI, « La Settimana Medica », 44, n. 15 (1956), Firenze.
- [5] F. CAZZAMALLI, « Atti 3° Congresso Italiano Radiobiologia » (1938) Bologna.
- [6] H. BERGER, « Arch. of Psych. », 106, fasc. 2 (1937).
- [7] E. D. ADRIAN, « Journ. of Psych. », 88, fasc. 2 (1936); 89, fasc. 1 (1937).
- [8] E. STRUMPF (von), « Sonderabdruck aus Kriminalistik », 9 Jahr, 1955, Heft 7, Verlag f. Kriminal Fachliteratur, Hamburg.
- [9] V. CAPPARELLI, *L'ordine dei tempi e delle forme in natura*. Ed. Cappelli, vol. 1 e 2 (1929), Bologna; P. LE COMPTE DU NOUY, *Il Tempo e la Vita*. Ed. Einaudi (1939), Milano.
- [10] E. MESSERI, « Arch. Antrop. Etnol. », 85 (1955), Firenze.
- [11] « Documenti di Vita Italiana », A. VI, n. 59 ottobre (1956), Roma Ed. Capriotti.
- [12] R. BENDANDI e G. FLESCHE, « Settimana INCOM Illustrata », N. 29, luglio (1956), S.E.T. Torino.
- [13] K. POLLAK, *Vetter und Klima*, 1021, Verlag, Butzon Bercker Kevelaer, RHLd, (1950).
- [14] A. G. ALIBRANDI e M. NOBILE, « Biologia Latina », V (1953), Milano.
- [15] G. MARTINO, *Elementi di Fisiologia umana*. Ed. Principato (1948), Messina.
- [16] B. T. DÜLL, *Neurologie und Psychiatrie*, Band, 126, Heft 3 (1938). Ed. Springer. Berlin.

**Microbiologia.** — *Studio quantitativo dell'adattamento di Micrococcus pyogenes e Proteus vulgaris alla novobiocina in coltura continua.* Nota di F. GRAZIOSI, presentata (\*) dal Socio V. PUNTONI.

In una precedente pubblicazione (1) è stato descritto un metodo turbidostatico di coltura continua che permette l'analisi quantitativa di fenomeni altrimenti studiabili in modo indiretto. Questo metodo si presta bene allo studio di fenomeni selettivi poiché esso offre la possibilità di conoscere in ogni momento l'ampiezza della popolazione microbica e la sua velocità media di moltiplicazione.

In questi ultimi anni è stato largamente dimostrato che molti fenomeni di adattamento dei batteri agli antibiotici sono dovuti alla selezione di mutanti resistenti presenti in piccolo numero nelle colture batteriche (2). È questo un campo in cui l'introduzione sempre più larga di tecniche quantitative permette di studiare in modo approfondito l'interazione tra determinate sostanze antibatteriche e grandi popolazioni microbiche e di prevedere la velocità e la direzione dei cambiamenti inevitabili che in esse si producono per effetto della selezione naturale.

Abbiamo applicato il metodo turbidostatico di coltura continua allo studio dell'adattamento di *M. pyogenes* (ceppo Oxford) e di *P. vulgaris* alla novobiocina, un antibiotico di recente introdotto nella pratica ed ancora insufficientemente noto. Abbiamo condotto la ricerca su questi microrganismi poiché è noto che essi divengono rapidamente resistenti a molti antibiotici.

Gli esperimenti sono stati condotti aggiungendo a tempi diversi appropriate concentrazioni di novobiocina al recipiente di riserva del terreno di coltura sterile; giungendovi con il terreno di coltura, l'antibiotico si concentra progressivamente nel recipiente in cui avviene la crescita (fermentatore) fino a raggiungere la concentrazione del recipiente di riserva secondo l'espressione:

$$(I) \quad C_f = C_b (1 - e^{-k' \varepsilon})$$

in cui

$C_f$  = concentrazione dell'antibiotico nel fermentatore,

$C_b$  = concentrazione dell'antibiotico nella bottiglia di riserva,

$k'$  = costante di diluizione della coltura (per goccia che fuoriesce dal fermentatore),

(\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) F. GRAZIOSI, « Giorn. di Microb. » (in corso di stampa).

(2) L. L. CAVALLI SFORZA e J. LEDERBERG, « 6° Congr. Intern. di Microb. » (Roma, 1953, pp. 108-142); V. BRYSON e W. SZYBALSKI, « Adv. in Genetics », 7, 1-46, 1955.

$g$  = numero delle gocce fuoriuscite dal fermentatore a partire dal momento della aggiunta dell'antibiotico alla bottiglia di riserva; è facile, pertanto, calcolare la concentrazione di novobiocina nella coltura in ogni momento conoscendo  $k'$ ,  $C_b$  e  $g$ . Naturalmente l'espressione (1) non tiene conto della inattivazione (di lieve entità) cui la novobiocina va incontro nel fermentatore per cause molteplici; tuttavia essa fornisce con sufficiente approssimazione l'andamento del fenomeno.

La coltura che fuoriesce dal fermentatore in un continuo sgocciolamento è misurata mediante un apposito apparecchio di registrazione in cui ogni goccia fa alzare di 1 mm una penna scrivente su carta affumicata; la penna stessa ricade ad intervalli regolari (ogni 1, 2 o 4 minuti nei diversi esperimenti). Semplici misure eseguite sul tracciato così ottenuto permettono di misurare con accuratezza i valori di  $g$  nella (1) in funzione del tempo; inoltre l'altezza delle righe del tracciato è direttamente proporzionale alla velocità di moltiplicazione essendo questa, in un sistema turbidostatico, eguale alla velocità di diluizione della coltura: rimandiamo al lavoro già citato <sup>(2)</sup> per i dettagli di esecuzione delle misure e per il calcolo della costante di moltiplicazione ( $k$ ), del tempo di generazione ( $\tau$ ) e del tempo di duplicazione ( $\vartheta$ ).

Nella fig. 1 è riportato il tracciato originale ottenuto coltivando in turbidostato *M. pyogenes* in concentrazioni progressivamente crescenti di novobiocina. La prima aggiunta di novobiocina al sistema era fatta in base a precedenti misure della concentrazione minima inibente (c.m.i.); le aggiunte successive sono state fatte in base ai dati ottenuti da numerosi esperimenti in cui i germi resistenti via via isolati erano studiati per molti caratteri ed in particolare per la concentrazione minima di novobiocina capace di impedire la crescita.

Dalla fig. 1 è chiaramente visibile che la velocità di moltiplicazione di *M. pyogenes* decresce rapidamente dopo la prima aggiunta di novobiocina (0,1  $\gamma$ /cc) fino a raggiungere valori prossimi allo zero e che la velocità di moltiplicazione risale rapidamente dopo circa 12 ore a valori un poco inferiori a quelli iniziali. In corrispondenza della seconda aggiunta (5  $\gamma$ /cc) la velocità di moltiplicazione cade di nuovo per risalire a valori simili a quelli iniziali dopo circa 18 ore ed infine essa cade rapidamente a zero dopo una terza aggiunta che porta la concentrazione dell'antibiotico a 55  $\gamma$ /cc.

In corrispondenza dei momenti in cui la coltura riacquistava una elevata e stabile velocità di moltiplicazione si effettuava l'isolamento su piastra del liquido fuoriuscito dal fermentatore. In questo e in altri esperimenti protratti anche più a lungo abbiamo ripetutamente isolato almeno 5 tipi di ceppi resistenti ed abbiamo escluso che essi fossero germi di inquinamento con il confronto delle loro proprietà con quelle del ceppo di partenza. In particolare i ceppi isolati non differivano in modo rilevabile dal ceppo di partenza per i seguenti caratteri: morfologia, emolisi, coagulasi, fermentazione della mannite e del lattosio, fluidificazione della gelatina, sensibilità a penicillina, streptomycin, tetraciclina, cloromicetina, eritromicina e



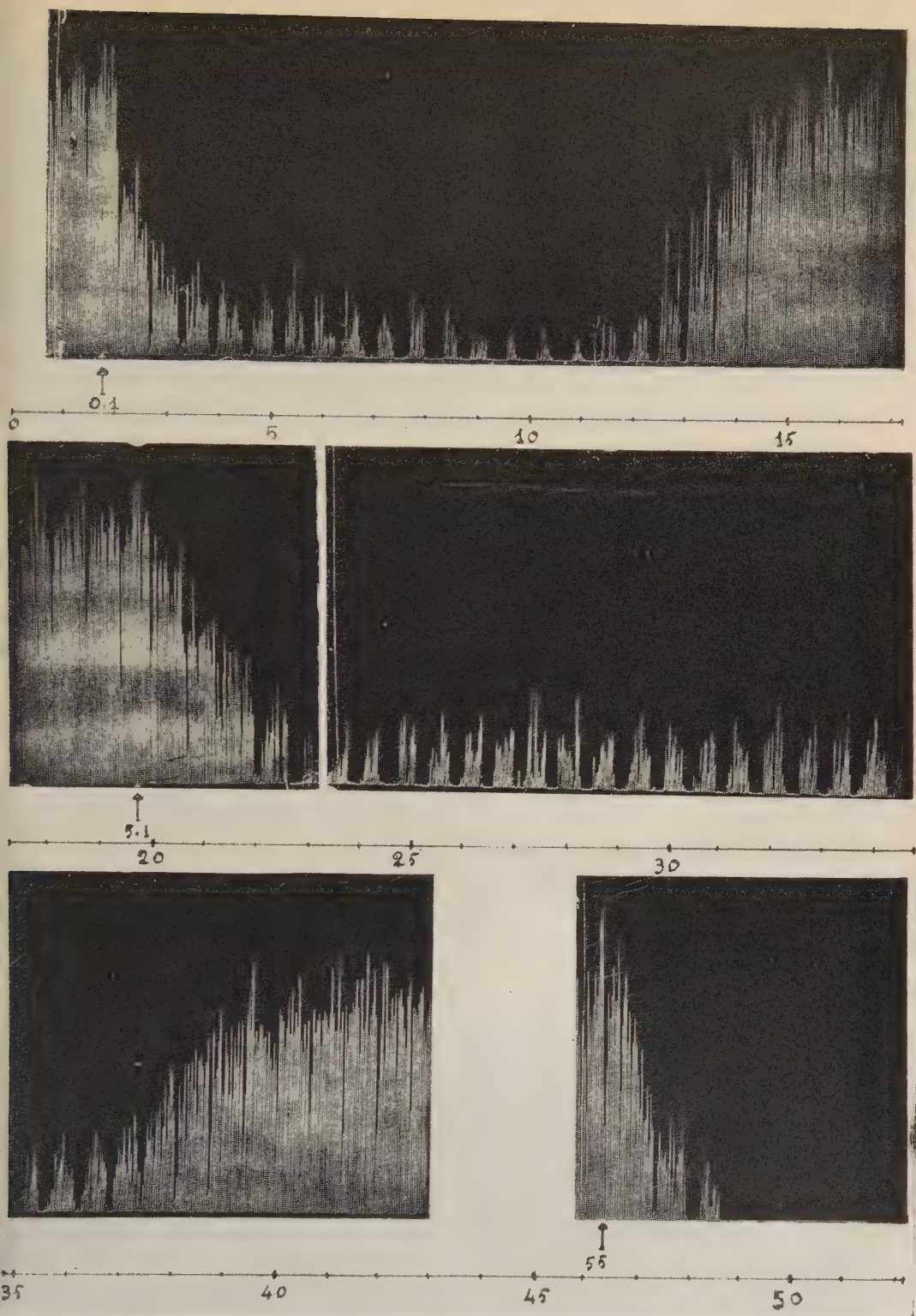


Fig. 1. - Tracciato di un esperimento condotto col turbidostato su *M. pyogenes*: in ascissa il tempo, in ordinata il numero di gocce che cade dal fermentatore. Le frecce indicano il momento della aggiunta di novobiocina alla bottiglia di riserva del terreno di coltura sterile. Il cilindro ruota alla velocità di 0,5 mm/min.; la penna ricade ogni 2 minuti.



sensibilità ai 23 batteriofagi di tipizzazione usati nel nostro Istituto per la fagotipia degli stafilococchi. Essi, invece, differivano soltanto per la sensibilità alla novobiocina e per la velocità di moltiplicazione, che si dimostrava tanto più bassa, anche nelle subcolture in assenza dell'antibiotico, quanto più i ceppi erano resistenti.

Abbiamo poi constatato che la resistenza alla novobiocina delle diverse varianti isolate si conservava stabile anche dopo numerose subcolture in assenza dell'antibiotico. Le c.m.i. andavano da 5  $\gamma$ /cc a 35  $\gamma$ /cc (variante isolata al terzo gradino di adattamento in un esperimento di lunga durata).

Nei nostri esperimenti è possibile sottoporre a verifica l'ipotesi che l'adattamento osservato sia provocato dalla selezione di cellule mutanti (o discendenti da cellule mutanti) insorte nella coltura in piccolo numero ed indipendentemente dal contatto con l'antibiotico. Esaminando ad esempio il primo gradino dell'adattamento osservabile nel tracciato della fig. 1 possiamo calcolare il numero delle cellule resistenti che debbono essere presenti al momento dell'aggiunta dell'antibiotico per giustificare l'andamento sperimentalmente osservato; la velocità di moltiplicazione di questi presunti mutanti può essere calcolata con misure eseguite sul tracciato nel momento in cui la coltura ha riacquisito una velocità costante di moltiplicazione ed in cui quindi, se il fenomeno è di natura selettiva, le cellule sensibili sono state completamente sostituite da quelle resistenti.

Infatti:

$$(II) \quad m_t = m_0 \cdot e^{-k'g} \cdot e^{kt}$$

in cui

$m_t$  = numero dei mutanti al tempo  $t$  (quando la sostituzione è completa  $m_t$  è eguale al numero di cellule complessivamente presenti nel fermentatore),

$m_0$  = numero dei mutanti al tempo 0 (momento dell'aggiunta dell'antibiotico),

$k$  = costante di moltiplicazione dei mutanti,

$k'$  = costante di diluizione della coltura (come nella (I)),

$g$  = numero di gocce fuoriuscite dal fermentatore al tempo  $t$ ,

$t$  = tempo (viene scelto un valore di  $t$  corrispondente ad un momento in cui la coltura ha riacquisito una velocità di moltiplicazione elevata e stabile).

È possibile adottare una formulazione così semplice in quanto l'effetto della frequenza di mutazione verso la novobiocina-resistenza e di retromutazione è trascurabile; tali frequenze si presumono molto basse mentre il coefficiente di selezione dei mutanti resistenti è elevatissimo essendo la loro velocità di moltiplicazione, in presenza dell'antibiotico da 10 a 50 volte più elevata di quella delle cellule sensibili.

Nel caso considerato si calcola che al tempo 0 dovevano essere presenti circa 3 cellule resistenti per cc; in piastre eseguite al tempo 0 su terreno solido contenente 1  $\gamma$ /cc di novobiocina (sufficiente ad inibire tutte le cellule sensibili ed incapace di inibire lo sviluppo degli eventuali mutanti la cui c.m.i. si è detto essere di 5  $\gamma$ /cc), insemensate ognuna con 1 cc di coltura fuoriuscita dal fermentatore, e mantenute a 2°C fino al momento della semina (circa 30'), sono state ritrovate in media 1,8 colonie resistenti; questo valore non si discosta significativamente dal valore atteso 3 tenendo conto che nella (II)  $m$ ,  $k$  e  $k'$  sono affetti da un sia pur piccolo errore sperimentale.

Si osserva così un buon accordo tra l'andamento sperimentalmente osservato e l'attesa teorica, accordo che è stato ripetutamente verificato in diversi esperimenti indipendenti. Tale accordo milita a favore della ipotesi che *M. pyogenes*, nelle nostre condizioni sperimentali, si adatta alla novobiocina con un meccanismo sostanzialmente selettivo; in questo caso, anzi, l'ipotesi suddetta interpreta con eleganza e semplicità i dati sperimentali. Il primo mutante che si seleziona mostra una resistenza 50 volte più alta del ceppo di partenza, mentre i mutanti successivi mostrano incrementi di resistenza via via più piccoli. La stabilità della resistenza alla novobiocina osservata nelle subcolture in assenza di antibiotico è in accordo con l'interpretazione data prima.

Nella fig. 2 è riportato il grafico costruito mediante misure effettuate sul tracciato ottenuto coltivando in turbidostato *P. vulgaris* (un ceppo della nostra collezione) in concentrazioni progressivamente crescenti di novobiocina. Si notano immediatamente differenze importanti rispetto ai dati ottenuti su *M. pyogenes*:

a) l'adattamento alla dose iniziale (2  $\gamma$ /cc) comporta un aumento molto modesto della resistenza ed il fatto si ripete nei gradini successivi dell'adattamento;

b) i tempi necessari all'adattamento sono assai più brevi, anche tenuto conto della bassa velocità di moltiplicazione del ceppo di *P. vulgaris* da noi studiato.

Inoltre applicando la (II) il numero dei supposti mutanti che dovrebbero essere presenti prima di ogni nuova aggiunta di antibiotico per giustificare l'andamento osservato risulta straordinariamente elevato, oscillando da  $10^5$  a  $10^7$  cellule per cc (tra 0,3 e 30% dei batteri trattati).

Da questi risultati si può dedurre che l'adattamento di *P. vulgaris* alla novobiocina non è interpretabile, nelle nostre condizioni sperimentali, secondo l'ipotesi della selezione di rari mutanti resistenti presenti nella coltura fin dall'inizio. Si tratta forse di un fenomeno di adattamento fisiologico per cui una buona parte della coltura si modifica in presenza dell'antibiotico; questo fenomeno potrebbe mascherare, sovrapponendosi, un eventuale meccanismo selettivo di mutanti. Potrebbe anche trattarsi della selezione di un carattere quantitativo controllato da un poligene particolarmente

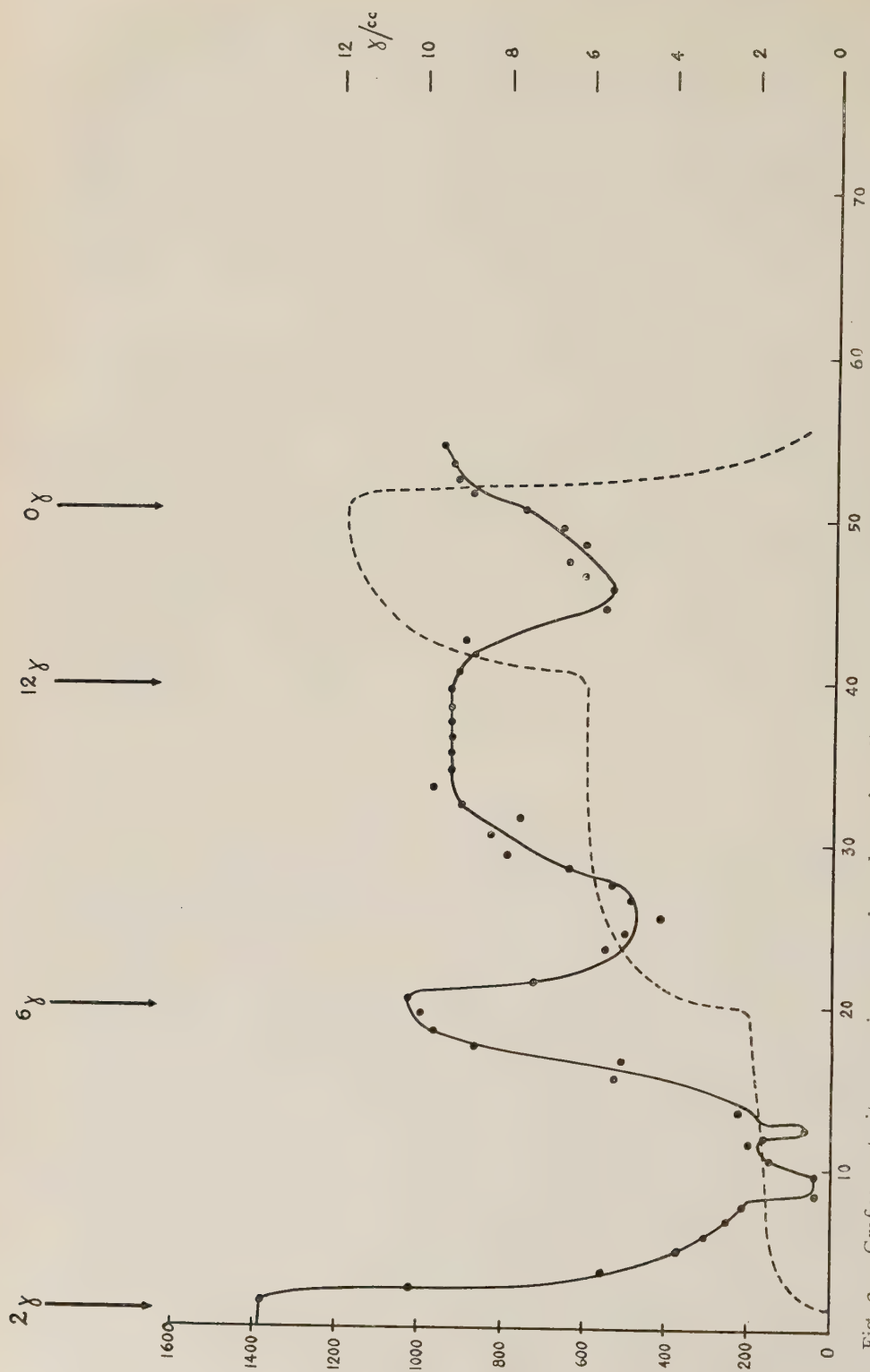


Fig. 2. - Grafico costruito con misure eseguite sul tracciato di un esperimento in turbidostato su *P. vulgaris*: in ascissa il tempo (in ore), in ordinata i valori di  $k$  (vedi la (II) nel testo)  $\times 10^5$ , e le concentrazioni di antibiotico nel fermentatore calcolate mediante la (I). Le frecce indicano i momenti delle aggiunte di antibiotico alla bottiglia di riserva del terreno di coltura sterile.

grande: in ogni caso si tratta di un fenomeno difficilmente analizzabile ed interpretabile con i dati per ora in nostro possesso.

In così breve spazio non è possibile analizzare compiutamente tutti i risultati da noi ottenuti; ci basta, con gli esempi riferiti, di avere illustrato le possibilità e le prospettive di metodi fondati sulla coltura continua per l'analisi quantitativa della dinamica delle popolazioni microbiche e di avere fornito qualche dato nuovo sulle proprietà di un antibiotico ancora poco conosciuto.

**Biologia (Microbiologia).** — *Ricerche sulla titolazione di tossine e antitossine per mezzo delle colture di tessuti «in vitro» (\*)*. Nota preliminare di GIUSEPPE PENSO e GIUSEPPE VICARI, presentata (\*\*) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Abbiamo saggiato l'azione di tossine batteriche ed animali su colture di tessuti *in vitro* ed abbiamo constatato che:

1° la tossina difterica esercita un'azione citopatogena sulle cellule dei tessuti coltivati *in vitro*;

2° la tossina tetanica non esercita alcuna azione sulle cellule dei tessuti coltivati *in vitro*, almeno sulle cellule da noi sino ad ora impiegate;

3° il veleno dei serpenti esercita azione citopatogena sulle cellule dei tessuti coltivati *in vitro*;

4° la tossina difterica può essere dosata sfruttando le sue capacità citopatogene *in vitro*: tale dosaggio è molto più preciso di quello ottenibile usando gli animali; la dose citoletale minima corrisponde a circa la metà della dose minima letale per la cavia;

5° il veleno dei serpenti può essere dosato sfruttando le sue capacità citopatogene *in vitro*;

6° il siero antidifterico può essere dosato saggiando il suo potere neutralizzante la tossina ed inoculando il miscuglio nelle colture dei tessuti; si possono così stabilire con estrema esattezza le unità immunizzanti di un siero e il limite zero ( $L^0$ ) e il limite morte ( $L^+$ ) di una tossina; tali dosaggi sono molto più precisi di quelli ottenibili con gli animali;

7° il siero antiofidico può essere dosato saggiando il suo potere neutralizzante il veleno ed inoculando il miscuglio nelle colture dei tessuti.

In una serie di Note in via di elaborazione illustreremo ampiamente quanto abbiamo più sopra elencato.

Parallelamente stiamo conducendo ricerche con altre tossine batteriche oltre le già ricordate, mentre abbiamo in corso tentativi di vaccinazione anatossica delle cellule coltivate *in vitro* e conseguente eventuale possibilità di controllare con questo nuovo metodo le anatossine impiegate.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.



**Biologia.** — *Il contributo dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma alla conoscenza dell'ospite intermedio e del ciclo di vita degli schistosomi dei mammiferi* (*Schistosoma haematobium* e *Schistosoma bovis*) *in Somalia*. — *Rilievi alla Nota di Enzo Sobrero su Bulinus abyssinicus*. Nota di ETTORE BIOCCA (\*), presentata (\*\*) dal Socio V. PUNTONI.

L'esistenza della schistosomiasi umana vescicale (*S. haematobium*) e della schistosomiasi animale (*S. bovis*) in Somalia è nota da tempo.

Ignorati ancora erano fino al 1950 gli ospiti intermedi dei parassiti.

Per questo motivo dal 1951 ad oggi sono continuate le ricerche dei collaboratori dell'Istituto di Parassitologia di Roma (Lipparoni, Pellegrini e Sobrero) per identificare gli ospiti intermedi e definire il ciclo degli schistosomi dell'uomo e dei mammiferi in Somalia.

Nel 1952 Lipparoni <sup>(1)</sup> raccoglie i molluschi del Medio Uebi-Scebeli e ritrova per la prima volta una specie appartenente al genere *Bulinus*, che, inviata allo specialista danese Mandahl-Bart, viene identificata come *Bulinus* (*Physopsis*) *abyssinicus*.

Il lavoro segnala quindi fin dal 1952 per la prima volta in Somalia un mollusco appartenente a un genere che comprende specie note come ospiti intermedi di *S. haematobium* e *bovis* e indica *Bulinus abyssinicus* quale probabile vettore della schistosomiasi nella zona esaminata.

Nel 1953 Pellegrini <sup>(2)</sup> estende le ricerche al Giuba e pubblica la prima documentazione che lo stesso mollusco (nuovamente identificato da Mandahl-Bart, come *B. abyssinicus*) è presente anche in questo fiume e quindi, quasi certamente, deve ritenersi ospite intermedio per la schistosomiasi umana e animale in Somalia.

Le osservazioni del Pellegrini sono state recentemente ampliate e confermate per il Medio e Basso Giuba dallo Zavattari <sup>(3)</sup> il quale ritiene, in base allo studio del malacologo Piersanti, che la identificazione del mollusco sospetto, fatta da Mandahl-Bart, non sia esatta, ma che si debba parlare di *Physopsis globosa* di cui *Bulinus* (*Physopsis*) *abyssinicus*, dovrebbe

(\*) Ettore Biocca Direttore dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) E. LIPPARONI, *Presenza del Bulinus abyssinicus* (v. Martens) *nella zona del Medio Uebi-Scebeli e rilievi sul suo habitat locale*, « Riv. di Parassitologia », 13, 309-314 (1952).

(2) D. PELLEGRINI, *Alcune osservazioni sulla schistosomiasi bovina in Somalia e segnalazione del Bulinus abyssinicus nella regione del Basso Giuba*, « Riv. di Parassitologia », 14, 15-17 (1953).

(3) E. ZAVATTARI, *Malacofauna e schistosomiasi nel Medio e Basso Giuba*, « Riv. di Parassitologia » 17, 193-202 (1956).

esser considerato sinonimo o varietà. Crediamo che la questione di nomenclatura rivesta in questo caso limitato interesse e lo studio definitivo di questo problema sarà oggetto di prossime comunicazioni da parte del nostro Istituto.

Negli anni scorsi sono stati inviati al nostro Istituto dalla Somalia, *Bulinus abyssinicus* raccolti da Sobrero nel Giuba, ancora vivi, nella speranza di ottenere furcocercarie di schistosomi e così chiudere le nostre conoscenze sul ciclo vitale di questi parassiti in Somalia. Le ricerche sono però state negative. Nel dicembre 1956 e nel gennaio 1957 finalmente Sobrero ottiene ripetutamente in Somalia furcocercarie da *Bulinus abyssinicus* e infesta con esse sperimentalmente animali di laboratorio, ottenendo *Schistosoma haematobium* adulti <sup>(4)</sup>. In tal modo viene definitivamente ricostruito il ciclo di vita di questo parassita in Somalia e risolto un oscuro problema sulla epidemiologia della schistosomiasi in questo paese.

#### COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che assistono alla seduta i proff. B. Eckmann, del Politecnico di Zurigo, e O. Zariski, della Harvard University, e rivolge ai due illustri ospiti il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Il Presidente dà quindi notizia del programma del Seminario Internazionale della Harvard University che avrà luogo, su argomenti di attualità, dal 1° luglio al 21 agosto c. a. e che costituisce una benemerita iniziativa permanente di quella Università.

#### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la dolorosa notizia della morte dei Soci Stranieri John von Neuman, della Categoria I, e Henry Norris Russel, della II, scomparsi rispettivamente il 9 e il 18 febbraio c. a. e invia un reverente pensiero alla memoria dei due illustri scienziati.

Il Presidente comunica poi che il Collega Quagliariello, mentre era in procinto di venire in Accademia per partecipare alla seduta, è stato colto da un leggero malore, per cui si è reso necessario il suo ricovero in una clinica. Le condizioni dell'illustre Collega sono però già grandemente migliorate e il Presidente, rendendosi interprete dei sentimenti unanimi della Classe, formula il più sincero ed affettuoso voto che il Socio Quagliariello possa subito ristabilirsi completamente e ritornare al più presto in Accademia.

La Classe si associa ad unanimità.

(4) R. SOBRERO, *Bulinus (Physopsis) abyssinicus*, ospite intermedio di *Schistosoma haematobium* in Somalia. Ricostruzione del ciclo di vita del parassita, « Rendic. Acc. Naz. Lincei », vol. XXII, (1957).

Il prof. Giordani invita la Classe a designare un Socio per la commemorazione del compianto Collega Albenga e la Classe, ad unanimità, designa il Socio Krall.

Per quanto riguarda la commemorazione del compianto Socio Menozzi, il Presidente, dopo aver premesso che tra i Colleghi dell'Accademia non vi sono attualmente studiosi che si occupino particolarmente della disciplina coltivata dal predetto Socio, la chimica agraria, riterrebbe opportuno che la commemorazione fosse affidata ad un botanico.

Poichè il Socio Tonzig è assente, il prof. Giordani prega il Collega Cambi di voler cortesemente interpellarlo in proposito.

### CONGRESSI

Il Presidente invita il Collega Califano a riferire sui lavori preparatori del Convegno sulle « Ossidazioni biologiche ».

Il Socio Califano, dopo aver messo in evidenza che non tutti gli studiosi designati a suo tempo dalla Classe hanno predisposto le relazioni di loro competenza, propone che, per la ragione sopra esposta, il Convegno sia rinviato al prossimo anno accademico.

Il Presidente Giordani ringrazia il Collega Califano e conviene nell'opportunità del rinvio da lui prospettato, anche perché quest'anno avrà luogo, in autunno, un importante Convegno Internazionale e cioè il Simposio sui giacimenti gassiferi d'Europa, organizzato dall'Accademia d'intesa con l'Ente Nazionale Idrocarburi. La preparazione del Simposio è già in fase avanzata e molte sono le adesioni pervenute.

### PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta i seguenti plichi suggellati:

a) tre plichi del sig. Tommaso Martini, consegnati alla Cancelleria il 16 febbraio 1957, rispettivamente dal titolo « Un nuovo disinfettante », « Usi di un nuovo disinfettante » e « Metodo di preparazione di una nuova sostanza »;

b) Plico suggellato del prof. Sacha F. Guiglia, M. D., consegnato alla Cancelleria il 6 marzo 1957, contenente i seguenti due scritti:

N. 1. - Il  $K^{40}$  nel sangue e nei tessuti umani;

N. 2. - Nuclei calcificati trovati da Melnick nelle cellule cancerose irradiate. Ipotesi di trasmutazione del  $K^{40}$ - $Ca^{40}$  indotta dalla irradiazione.

La Classe, dopo aver constatato l'integrità dei suggelli, delibera che i plichi di cui trattasi siano trasmessi all'archivio accademico, ove saranno conservati a disposizione degli interessati.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Benedicenti, nel presentare la seconda edizione riveduta della sua opera, in due volumi, dal titolo «Malati, Medici e Farmacisti», nella quale è illustrata la storia dei rimedi attraverso i secoli e delle teorie che ne spiegano l'azione sull'organismo; svolge una breve comunicazione su argomenti accennati nell'opera, che riguardano la Medicina del popolo e il folklore medico.

Il Presidente Giordani ringrazia il Collega Benedicenti per l'interessante illustrazione delle antiche pratiche mediche e per il gradito omaggio della importante opera che, premiata dalla Accademia di Francia, sta per vedere, dopo numerosissime ristampe, la sua terza edizione.

Il Presidente presenta il II volume degli Atti del Convegno di Venezia su «I modelli nella tecnica», già uscito nel mese di febbraio, che completa l'opera, e constata con viva soddisfazione che si tratta veramente di un lavoro insigne, del quale va data ampia lode alla Cancelleria e all'Ufficio Redazione Atti che si sono occupati dell'organizzazione del Convegno, della raccolta del materiale e della pubblicazione dei volumi in modo veramente encomiabile.

Il Socio Califano presenta il manuale del prof. Girolamo Lo Cascio dal titolo «Elementi di diottrica oculare», nel quale sono presentati ai cultori di oftalmologia gli argomenti più importanti della diottrica oculare che più largo sviluppo hanno avuto negli ultimi cinquant'anni.

Riferendosi alla presentazione del volume del prof. Lo Cascio, il Socio Carrelli desidera mettere in evidenza l'importanza di tale opera, nella quale è riunita una importante messe di risultati scientifici e ricorda, in particolar modo, il capitolo dedicato alla accomodazione.

Il Presidente si associa pienamente e ringrazia i Colleghi Califano e Carrelli.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci G. Levi, Caglioti, Cotronei, Puntoni, Quilico, Signorini, Chiarugi, Picone, Segre, Silva e Armellini.

Circa la Nota del dott. Antonio Barasa, presentata dal Socio G. Levi, dal titolo «Grandezza dei neuroni piramidali della corteccia cerebrale in alcune specie di mammiferi di differente mole somatica», prende la parola il Socio Pensa.

Egli ritiene molto importante quanto ha esposto il Collega Levi nella Nota da lui presentata riguardo alla parte che hanno i dendriti a integrazione del pericario delle cellule nevrali ai fini della valutazione del rapporto di interrelazione fra neuroni, territorio di distribuzione dei loro neuriti e mole dell'animale, in quanto che i dendriti devono essere considerati



come parte aggiuntiva del corpo cellulare. Rileva quindi la necessità che, per la determinazione di tale rapporto, vengano usate tecniche tali da consentire una dimostrazione quanto più è possibile completa dell'apparato dendritico, come appunto ha fatto l'autore della Nota. È da ritenersi poi che il legame esistente fra pericario del neurone e sua chioma dendritica è in correlazione col fatto funzionale inerente alla connessione che le fibre nervose afferenti hanno con il neurone stesso. Notasi infatti, in alcuni casi, che fibre nervose aventi rapporti sinaptici con neuroblasti all'inizio dello sviluppo, estendono i loro rapporti ai dendriti quando questi si formano, col procedere dello sviluppo. Caratteristico, ad esempio, è il caso dei rapporti, nel cervelletto, delle fibre nervose afferenti, così dette rampicanti, nei mammiferi a deambulazione tardiva. Tali fibre, negli stadi postnatali precoci, formano sinapsi limitatamente perisomatiche con le cellule del Purkinje; ma quando col procedere lo sviluppo e col perfezionarsi della facoltà di deambulazione i dendriti di queste cellule assumono sempre maggiore estensione, l'espansione terminale delle fibre stesse abbandona il corpo cellulare o pericario per assumere rapporti sinaptici peridendritici sempre più accentuati.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancellaria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BIOCCA E. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp., parassita del cuore e dei vasi polmonari del gatto selvatico (*Felis silvestris*) (pres. dal Socio V. PUNTONI).

DEL RE G. - Sulla struttura elettronica dell'ossido di benzonitrile (pres. dal Socio A. QUILICO).

GHIZZETTI A. - Sugli integrali doppi di espressioni lineari a derivate parziali. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

GIANNUZZI M. A. - La moderna colorimetria delle stelle binarie ed il nuovo fotometro colorimetrico dell'Osservatorio di Monte Mario (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

SCROCCO M. e NICOLAUS R. - Ricerche spettrofotometriche I.R. ed U. V. in una serie di esteri pirrolici (pres. dal Corrisp. V. CAGLIOTI).

SOBRERO E. - *Bulinus* (Physopsis) abyssinicus, ospite intermedio di *Schistosoma haematobium* in Somalia. Ricostruzione del ciclo di vita del parassita (pres. dal Socio V. PUNTONI).

Il Socio Caglioti presenta una memoria dei dottori Ferrari e Cocchi dal titolo: «Relazioni di simmetria all'interfaccia per epitassia».

Il Socio Perucca conviene nell'importanza del citato lavoro, anche per l'interesse che questo presenta in relazione ai processi di condensazione di vapori metallici su supporti.

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione, composta dallo stesso Socio Caglioti e dai Colleghi Cambi e Natta.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 9 marzo 1957*

- BEČVÁŘ Antonín. — *Atlas coeli 1950*. o. Praha, Československá Akademie Věd, 1956. Pp. 2, 16 tavv., in-4° obl.
- BELLONI Luigi, VERGNANO Letizia e ZAMBIANCHI Attilio. — *Studi su A. Bassi*. A cura di Luigi Cremascoli. Lodi, Archivio Storico Lodigiano, 1956. Pp. 109, in-8°, con figg. e tavv.
- BENEDICENTI Alberico. — *Malati, medici e farmacisti*. Storie dei rimedi attraverso i secoli e delle teorie che ne spiegano l'azione sull'organismo. 2ª ed. riveduta. Milano, Hoepli, 1947-51. Voll. 2, in-8°, con figg.
- A century of progress in the Natural Sciences 1853-1953*. Published in celebration of the Centennial of the California Academy of Sciences. San Francisco, California Academy of Sciences, 1955. Pp. X-807, in-8°, con tavv.
- COLBY Charles C. — Vedi: *The Kansas Basin*.
- FERRER DE LEMOS A. — *Sur l'emploi de nivellements géométriques de précision dans l'observation d'ouvrages*. Communication présentée au Symposium sur l'Observation des Ouvrages réalisé au « Laboratório Nacional de Engenharia Civil ». Lisboa-Portugal en Octobre 1955. Lisboa, 1955. Pp. 10, in-8°, con figg.
- GONZALES Domínguez A. y SCARFIELLO R. — *Nota sobre la formula* v. p.  $\frac{1}{x} \cdot \delta = - \frac{1}{2} \delta'$   
Estr. da « Revista de la Unión Matemática Argentina », vol. XVII, 1956.  
*The Kansas Basin. Pilot Study of a Watershed*. Introduction to the Kansas Basin Project Charles C. Colby, director. Lawrence, University of Kansas Press., 1956. Pp. 103, in-8° obl., con figg. ed una carta.
- L'ivre jubilaire publié à l'occasion du XXV<sup>e</sup> anniversaire Académique du Professeur Paul Van Gehuchten à Louvain*. Bruxelles, Imprimerie des Sciences, 1955. Pp. 331, in-8°, con figg.
- LO CASCIO Girolamo. — *Elementi di diottrica oculare*. Napoli, Istituto Editoriale del Mezzogiorno, 1955. Pp. 363, in-8°, con figg. e tavv.
- MIGEOTTE M., NEVEN L. et SWENSSON J. — *Le spectre solaire de 2,8 à 23,7 microns*. Première partie: *Atlas photométrique*. Estr. da « Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège », vol. hors série, 1956, n. 1.
- NEVEN L. — Vedi: MIGEOTTE M., NEVEN L. et SWENSSON J.
- RINNER K. — *Zur analytischen Behandlung photogrammetrischer Aufgaben*. Estr. da « Bildmessung und Luftbildwesen », 1956, n. 1-2.
- SCARFIELLO R. — Vedi: GONZÁLES DOMÍNGUEZ A. y SCARFIELLO R.
- SWENSSON J. — Vedi: MIGEOTTE M., NEVEN L. et SWENSSON J.
- VIEIRA RODRIGUEZ O. — *Mesure des déplacements absolus des grands barrages portugais*. Communication présentée au Symposium sur l'Observation des Ouvrages réalisé au « Laboratório Nacional de Engenharia Civil ». Lisboa-Portugal en Octobre 1955. Lisboa, 1955. Pp. 27, in-8°, con figg.

## ERRATA CORRIGE

*Questi* « Rendiconti », XXI, 2° sem., 1956.

*Pag. 373 al capoverso 3:* Nitrito  $\text{Co}^{\text{III}}$  fenantrolinico, al simbolo  $\text{Co}^{\text{III}}$  deve sostituirsi  $\text{Co}^{\text{II}}$ ;

*Pag. 374, nella tabella II Serie, composto 8)* deve leggersi Co in luogo di Ca.

Pag. 412, riga 1.

*Errata:* sezione dello spazio-tempo con l'ipersuperficie  $x^0 = \text{cost.}$ ,     *Corrige:* euclideo,

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 13 aprile 1957*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Fibrazioni differenziabili di un' $r$ -sfera mediante  $k$ -sfere equatoriali.* Nota (\*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

INTRODUZIONE. — Una mia precedente Nota lincea [7], dedicata al trasporto della teoria delle dilatazioni dal campo algebrico a quello differenziale, mostra fra l'altro (nel n. 6) l'importanza a questo fine del problema di determinare le fibrazioni differenziabili di un' $r$ -sfera mediante  $k$ -sfere equatoriali. Su tale questione non molto era noto finora, sebbene di essa si fossero già incidentalmente occupati Hopf [4], Labourer [3], Hirsch [2], Steenrod e Whitehead [12].

Il problema suddetto, manifestamente equivalente a quello di fibrare un  $S_r$  proiettivo reale mediante spazi subordinati  $S_k$  ( $0 < k < r$ ), comprende il problema locale che consiste nel fibrare mediante  $S_k$  una conveniente porzione  $r$ -dimensionale dell' $S_r$ ; già per la risolubilità di quest'ultimo,  $r$  e  $k$  non possono venire presi ad arbitrio, in quanto all'uopo — come qui viene dimostrato nel n. 1 —

*Detto  $p$  il più piccolo, intero tale che  $2^p$  superi  $k$ , occorre risulti*

(1) 
$$r \equiv k \pmod{2^p}.$$

Per la risolubilità del problema globale, è necessario inoltre (ved. Steenrod e Whitehead [12], cor. 1.7) che sia precisamente

(2) 
$$k = 2^p - 1.$$

(\*) Presentata nella seduta del 13 aprile 1957.



Basta ora combinare la (2) con la (1), per dedurne che a quel fine dev'essere

$$(3) \quad r + 1 \equiv 0 \pmod{k + 1}:$$

e questo risultato - in virtù di B. Segre [7] - equivale ad un altro ottenuto recentemente, ed in modo del tutto diverso, dal Guggenheimer [1, teor. 1].

Esempi abbastanza generali di fibrazioni sia locali che globali vengono qui ricavati nel n. 2, coll'estendere un'argomentazione algebrica dovuta a Hopf [4, nn. 11, 12]; poggiando poi sulla (1), ciò permette di riottenere con un tratto di penna (n. 3) un notevole teorema di Hopf-Stiefel sulle algebre reali, sul quale conto di tornare presto in questi Rendiconti. Altri esempi degni di attenzione vengono infine conseguiti nei nn. 4-6, con metodi geometrici capaci di ulteriore impiego.

**1. UNA CONDIZIONE NECESSARIA PER LA RISOLUBILITÀ DEL PROBLEMA LOCALE.** - Sia  $\Omega$  un sistema  $\infty^k$  differenziabile (definito localmente) di spazi  $S_k$  subordinati di uno spazio proiettivo reale,  $S_r$ ; e supponiamo che per'ogni punto di una data regione di  $S_r$  passi uno ed un solo  $S_k$  di  $\Omega$ , con la condizione che ogni siffatto  $S_k$  giaccia per intero in quella regione. Ciò esige intanto che sia:

$$(4) \quad h + k = r;$$

inoltre, poiché due distinti  $S_k$  di  $\Omega$  non possono incontrarsi, dev'essere  $2k + 1 \leq r$  e quindi

$$(5) \quad k < h.$$

Onde stabilire la (1), incominciamo col dimostrare che:

*Nelle ipotesi ammesse, il generico punto di un generico  $S_k$  di  $\Omega$  non risulta certamente fuoco di  $\Omega$  (per la nozione generale di fuoco di un sistema di spazi, cfr. C. Segre [10]).*

A tal uopo, introduciamo in  $S_r$  coordinate proiettive omogenee  $\mathfrak{x} = (x^0, x^1, \dots, x^r)$ , e definiamo gli  $S_k$  di  $\Omega$  - com'è certamente possibile - a partire da una loro  $(k + 1)$ -pla di punti indipendenti,  $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k$ , a coordinate funzioni di classe  $C^1$  di  $h$  parametri  $t_1, t_2, \dots, t_h$ . Il generico punto

$$(6) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + u_1 \mathfrak{x}_1 + u_2 \mathfrak{x}_2 + \dots + u_k \mathfrak{x}_k$$

di un siffatto  $S_k$ , al variare di  $S_k$  in  $\Omega$ , viene così a dipendere dagli  $r = h + k$  parametri  $t$  ed  $u$ ; esso è un fuoco di  $\Omega$  relativo a quell' $S_k$  se, e soltanto se, in corrispondenza ad opportuni incrementi di tali parametri, e a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo, risulta

$$(1 + \varepsilon) \mathfrak{x} = (\mathfrak{x}_0 + d\mathfrak{x}_0) + (u_1 + du_1)(\mathfrak{x}_1 + d\mathfrak{x}_1) + \dots + (u_k + du_k)(\mathfrak{x}_k + d\mathfrak{x}_k)$$

(con  $\varepsilon$  infinitesimo), sicché - avuto riguardo alla (6) - il punto

$$d\mathfrak{x}_0 + u_1 d\mathfrak{x}_1 + u_2 d\mathfrak{x}_2 + \dots + u_k d\mathfrak{x}_k$$

dipende linearmente dai punti  $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k$ . Dunque, in tale ipotesi, il generico punto  $\mathfrak{g}$  espresso dalla (6) viene ad ammettere una matrice jacobiana rispetto agli  $r$  parametri  $t$  ed  $u$  di rango inferiore ad  $r$ , e pertanto detto punto non può invadere una porzione  $r$ -dimensionale di  $S_r$ . Questa contraddizione con quanto supposto per  $\Omega$  dimostra l'asserto.

Tenuto anche conto della (4), ne consegue che sul generico  $S_k$  di  $\Omega$  il sistema  $\Omega$  ammette una varietà focale, la quale risulta algebrica e di dimensione inferiore a  $k$ . Rileviamo che:

*Attualmente, tale varietà focale dev'essere completamente priva di punti reali.*

Invero, se  $S_k$  contenesse un fuoco  $\mathfrak{r}$  reale, per il generico punto di  $S_r$  situato nell'intorno di  $\mathfrak{r}$  uscirebbero due o nessun  $S_k$  di  $\Omega$  (come agevolmente segue dalla rappresentazione del sistema  $\Omega$  sulla grassmanniana degli  $S_k$  di  $S_r$ ), e ciò contraddirebbe una delle ipotesi fatte su  $\Omega$ .

La suddetta varietà focale, o una sua sezione con un conveniente spazio di  $S_k$ , può ottenersi come trasformata razionale nel campo reale della totalità definita — entro l'insieme lineare  $\infty^{k-1}$  degli spazi di  $\Omega$  infinitamente vicini al dato  $S_k$  — coll'imporre a tali spazi la condizione algebrica di appoggiarsi ad  $S_k$ . Pertanto anche questa totalità dev'essere priva di elementi reali. È chiaro d'altronde che i differenziali  $(dt_1, dt_2, \dots, dt_k)$  sono coordinate omogenee entro quell'insieme lineare, e che la totalità testé considerata si rappresenta ivi con le equazioni che si ottengono annullando tutti i minori d'ordine massimo  $(2k+2)$  della matrice:

$$\| \mathfrak{x}_0 \mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_k d\mathfrak{x}_0 d\mathfrak{x}_1 \dots d\mathfrak{x}_k \|.$$

Orbene, tenuto conto delle (4), (5), queste equazioni — in un  $S_{k-1}$  proiettivo ove  $(dt_1, dt_2, \dots, dt_k)$  siano coordinate omogenee di punto — definiscono una varietà algebrica generalmente pura, di dimensione  $k-1$  ed ordine  $\binom{h}{k}$  (cfr. ad esempio C. Segre [11], p. 929); dunque nel caso generale *quest'ordine dev'essere un numero pari*, poiché altrimenti quella varietà conterrebbe necessariamente punti reali. La medesima conclusione vale però in ogni caso, avuto riguardo a ciò che, *se una varietà algebrica definita nel campo reale e dipendente algebricamente da uno o più parametri contiene qualche punto reale per valori generici dei parametri, la stessa proprietà ha luogo comunque si specializzino i parametri* (come subito si vede mediante una semplice considerazione di limite).

Rileviamo ora che, segnando gli  $S_k$  di  $\Omega$  con un  $S_{r-i}$  genericamente fissato in  $S_r$  ( $i=0, 1, \dots, k-1$ ), si ottengono  $\infty^h S_{k-i}$  costituenti un nuovo sistema differenziabile e tali che di essi ne passa uno ed uno solo per ogni punto di una certa regione di  $S_{r-i}$ . Applicando a ciascuno dei sistemi così ottenuti il risultato stabilito nel precedente capoverso relativamente ad  $\Omega$ , ne discende che:

*Le ipotesi ammesse per  $\Omega$  implicano che ciascuno degli interi*

$$\binom{h}{1}, \binom{h}{2}, \dots, \binom{h}{k}$$

*debba essere pari.*

Ora si ha che il numero  $\binom{h}{l}$  (ove  $k, l$  siano interi tali che  $0 < l < h$ ) risulta dispari se, e soltanto se, scritti  $h$  ed  $l$  in base 2, ogni cifra 0 di

$h$  abbia a ritrovarsi inalterata ed allo stesso posto nello sviluppo di  $l$  (ciò si vede subito valendosi della proprietà di cui alla nota 3), p. 296, di B. Segre [6]). Dunque, per la validità delle condizioni espresse nel precedente capoverso, occorre e basta che  $h$  abbia tutti o in corrispondenza a ciascuna delle  $p$  cifre dello sviluppo di  $k$  in base 2, ossia - in virtù della (4) - deve valere la (1).

I risultati precedenti possono venire applicati, fra l'altro, alla teoria delle dilatazioni d'indice superiore (ved. B. Segre [7], n. 6). Così per esempio, avuto riguardo alla (1) del lavoro testé citato, la limitazione  $2k + 1 \leq r$  rilevata in principio del presente numero porge la  $k + 1 \leq (d - c)/2$ ; pertanto:

*L'indice di una qualunque dilatazione non può mai superare la semi-differenza fra la dimensione della varietà su cui opera la dilatazione e quella della base della dilatazione medesima.*

**2. ESEMPI DI FIBRAZIONI LOCALI O GLOBALI.** - Consideriamo un'algebra  $\mathfrak{A}$  d'ordine  $n$  ( $\geq 2$ ) sul campo reale, che supporremo primitiva (ossia priva di divisori dello zero), ma non necessariamente commutativa od associativa. Rispetto ad una base fissata  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  di  $\mathfrak{A}$ , ogni elemento  $x$  di  $\mathfrak{A}$  avrà una  $n$ -pla di componenti (reali, tutte nulle soltanto se  $x = 0$ ),  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , tali che:

$$x = x^1 u_1 + x^2 u_2 + \dots + x^n u_n.$$

Inoltre, presi due elementi  $x, t$  di  $\mathfrak{A}$ , con  $t \neq 0$ , l'equazione

$$(7) \quad x = at$$

ammette sempre una ed una sola soluzione  $a$  in  $\mathfrak{A}$ .

Fissato un intero  $m \geq 2$ , ad ogni  $m$ -pla ordinata di elementi  $x, y, \dots, z, t$  di  $\mathfrak{A}$  resta associato il punto  $P$  di coordinate omogenee

$$(x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^n, \dots, z^1, z^2, \dots, z^n, t^1, t^2, \dots, t^n),$$

in un  $S_r$  proiettivo reale di dimensione

$$(8) \quad r = mn - 1.$$

Un tale punto  $P$ , se non sta nell' $S_{r-n}$   $t = 0$  (ossia di equazioni  $t^1 = t^2 = \dots = t^n = 0$ ), determina univocamente la  $(m-1)$ -pla costituita dagli elementi  $a, b, \dots, c$  di  $\mathfrak{A}$  tali che:

$$(9) \quad x = at, \quad y = bt, \quad \dots, \quad z = ct.$$

Viceversa, assegnati comunque  $m-1$  elementi  $a, b, \dots, c$  di  $\mathfrak{A}$ , ossia scelte arbitrariamente le componenti  $a$  a questi relative, in numero complessivo di  $h = (m-1)n$ , le (9) si traducono in  $(m-1)n$  equazioni lineari omogenee fra loro indipendenti nelle coordinate di  $P$ , e rappresentano quindi un  $S_k$  subordinato di  $S_r$ , di dimensione

$$(10) \quad k = r - (m-1)n = n - 1.$$

Al variare di  $a, b, \dots, c$ , si ottiene così una *fibrazione locale differenziabile* dell' $S_r$  mediante  $\infty^h$  spazi subordinati  $S_k$ , la regione da questi riempita essendo

quella che si ottiene da  $S_r$  sopprimendo i punti dell' $S_{r-n}$  suddetto, di equazione  $t = 0$ .

Vi sono due casi in cui questo  $S_{r-n}$  può venir fibrato (globalmente) mediante sottospazi  $S_k$ , in guisa da dar luogo – con la precedente – ad una *fibrazione globale differenziabile* dell'intero  $S_r$ .

Il primo caso si ha (qualunque sia  $\mathfrak{A}$ ) per  $m=2$ : allora – in base alle (8), (10) – risulta

$$r - n = k,$$

sicché la fibrazione richiesta dell' $S_{r-n}$  è data ovviamente da un unico  $S_k$ , identico ad  $S_{r-n}$ .

L'altro caso, si ha (per  $m > 2$  qualsiasi) nell'ipotesi che l'algebra primitiva  $\mathfrak{A}$  risulti associativa (il che, in base ad un classico risultato di Frobenius, esige ch'essa sia isomorfa all'algebra degli ordinari numeri complessi od a quella dei quaternioni reali); la fibrazione voluta dell' $S_{r-n}$  è allora infatti data – al variare degli elementi  $a, b, \dots, c$  non tutti nulli di  $\mathfrak{A}$  – dagli  $S_k$  di equazioni:

$$t = 0, \quad x : y : \dots : z = a : b : \dots : c,$$

l'ultima delle quali esprime in forma compatta  $(m-1)(m-2)$  condizioni del tipo

$$x = ac^{-1}z \quad (\text{ove si supponga } c \neq 0),$$

le quali però riduconsi a sole  $m-2$  condizioni distinte in virtù dell'associatività di  $\mathfrak{A}$ .

**3. UN'APPLICAZIONE ALLA TEORIA DELLE ALGEBRE REALI.** – Data una qualunque algebra primitiva reale  $\mathfrak{A}$ , d'ordine  $n$ , fissiamo ad arbitrio l'intero  $m \geq 2$  e consideriamo la fibrazione locale di  $S_r$  mediante  $S_k$  di cui al n. 2. In virtù del n. 1 dovrà per essa valere la (1), la quale – tenuto conto delle (8), (10) – diventa:

$$(11) \quad (m-1)n \equiv 0 \pmod{2^p},$$

dove  $p$  denoti il minimo intero tale che

$$(12) \quad 2^p > k = n - 1.$$

Poiché  $m$  è arbitrario, dalla (11) discende la

$$n \equiv 0 \pmod{2^p};$$

non può quindi che aversi

$$n = 2^p,$$

in base alla (12). Abbiamo così il seguente teorema, già altrimenti ottenuto da Hopf [5, n. 3] come conseguenza di riposti risultati topologici di Stiefel:

*L'ordine di un'algebra primitiva reale (non necessariamente associativa) risulta sempre una potenza del 2.*

Per la suddetta fibrazione locale si ha pertanto:

$$r = m2^p - 1, \quad k = 2^p - 1;$$

ed è questo il modo più generale di soddisfare simultaneamente alle condizioni (1) e (2) della Introduzione, necessarie – come ivi è detto – per l'esistenza di una *fibrazione globale*. Resta tuttavia da investigare per quali valori di  $m$  e di  $p$  una siffatta fibrazione



globale di fatto esista, come pure quali siano i valori di  $p$  per i quali vi sia qualche algebra primitiva reale d'ordine  $2p$ . Ritourneremo prossimamente in questi « Rendiconti » sull'ultima questione.

4. ESEMPI CON  $k = 1$ . - Se  $k = 1$ , con le notazioni del terzo capoverso dell'Introduzione risulta  $p = 1$ , onde la (1) si traduce in ciò che  $r$  sia dispari, diciamo  $r = 2s + 1$ : e questa - come ora vedremo - è la sola condizione per l'esistenza di fibrazioni (locali o globali) di un  $S_r$  mediante rette. Invero, dato un  $S_{2s+1}$  reale, lo si estenda al campo complesso, e vi si considerino quindi due spazi  $S'_s, S''_s$  fra loro sghembi e complesso-coniugati. Le  $\infty^{2s}$  rette (reali) che congiungono ciascun punto di  $S'_s$  col proprio complesso-coniugato (giacente in  $S''_s$ ) danno manifestamente una *fibrazione globale dell' $S_{2s+1}$  reale mediante rette (reali)*.

È subito visto che tale fibrazione non è proiettivamente distinta da quella a cui si giunge in particolare dall'ultimo capoverso del n. 2, quando vi si assuma come algebra  $\mathfrak{A}$  quella degli ordinari numeri complessi (sicché  $n = 2$ ), ponendo poi  $m = s + 1$ . Sarebbe interessante il ricercare se vi siano o meno altri modi di fibrare globalmente un  $S_{2s+1}$  reale mediante rette; in questo numero darò però soltanto un paio di esempi di fibrazioni locali proiettivamente distinte dalla precedente.

Un complesso lineare generale  $K$  di piani di  $S_{2s+1}$  ( $s \geq 2$ ) ammette  $\infty^{2s}$  rette singolari, tali cioè che ogni piano di  $S_{2s+1}$  per ciascuna di esse appartenga a  $K$ . Queste rette costituiscono un sistema algebrico  $\Omega$  d'indice 1, ossia un punto generico di  $S_{2s+1}$  giace su una ed una sola di esse: fanno eccezione precisamente i punti di una  $V_{2s-2}^v$ , di ordine  $v = (s+1)(2s^2 - 5s + 6)/6$ , alla quale le rette di  $\Omega$  risultano  $s$ -secanti (cfr. Veneroni [13], p. 397). Il sistema  $\Omega$  ammette su ciascuna sua retta  $l$  nel campo complesso  $2s$  fuochi (ved. C. Segre [8]), attualmente dati dagli  $s$  punti d'appoggio di  $l$  con  $V_{2s-2}^v$  contati ciascuno doppiamente. Se  $s$  è pari, sarà possibile scegliere  $K$  ed  $l$  in guisa che tali punti risultino a coppie complesso-coniugati: allora le rette di  $\Omega$  sufficientemente prossime ad  $l$  costituiranno manifestamente una *fibrazione locale dell' $S_{2s+1}$* . Nel caso  $s = 2$ , ed in esso soltanto, la fibrazione non differisce da quella (globale) considerata nel primo capoverso del presente numero, in quanto allora risulta  $v = 2$  e  $V_{2s-2}^v$  si spezza in due piani di  $S_{2s+1} = S_5$  sghembi fra loro (ved. Veneroni, *loc. cit.*). Anche per  $s > 2$  si otterrebbe nel modo anzidetto una *fibrazione globale dell' $S_{2s+1}$  mediante rette*, distinta però dalla suddetta, qualora fosse possibile scegliere  $K$  in guisa che  $V_{2s-2}^v$  risultasse priva di punti reali: ciò importa la parità di  $v$  e quindi che sia  $s \equiv 2 \pmod{4}$ , e resterebbe da vedere se questa condizione è sufficiente per il fine indicato.

Consideriamo in secondo luogo due coniche  $C, C'$  irriducibili l'un l'altra complesso-coniugate, situate in piani fra loro sghembi (e complesso-coniugati) di un  $S_5$  reale. Presa un'anticollineazione involutoria che muti  $C$  in sé e che sia priva di punti fissi, la si moltiplichi per il coniugio; si ottiene così un'omografia trasformante  $C$  in  $C'$ : ed il luogo delle rette congiungenti coppie di punti

omologhi in essa risulta una superficie  $R$  rigata del 4° ordine, razionale normale in  $S_5$ , priva di punti reali. La  $R$  contiene  $\infty^1$  coniche, i cui piani generano una  $V_3^3$  reale di C. Segre, necessariamente dotata di falda reale (in quanto d'ordine dispari). Ebbene, la varietà aperta che si ottiene tagliando l' $S_5$  lungo tale falda risulta fibrata dalle  $\infty^4$  rette reali congiungenti fra loro le varie coppie di punti complesso-coniugati di  $R$ , come facilmente si vede tenendo conto del fatto ben noto che  $R$  è dotata di un solo punto doppio apparente.

**5. UN ESEMPIO CON  $k = 2$ .** — Se si suppone  $k = 2$ ,  $r = 6$ , con le notazioni dell'Introduzione risulta  $p = 2$ , sicchè vale la (1) ma non la (2). Dunque non è possibile di fibrare globalmente un  $S_6$  proiettivo (reale) mediante piani; in accordo col n. 1, vedremo che è invece possibile di fibrare  $S_6$  in tal guisa localmente, e più precisamente che:

*La varietà aperta che si ottiene tagliando un  $S_6$  reale lungo un  $S_3$  subordinato può venire fibrata mediante piani.*

Osserviamo anzitutto che l'immagine proiettiva del sistema lineare  $\infty^6$  delle quadriche di un  $S_3^*$  passanti per una data retta  $l^*$  di  $S_3^*$  è una  $V_3^4$  di  $S_6$ ; questa è luogo di  $\infty^1$  piani, i quali corrispondono agli  $\infty^1$  piani di  $S_3^*$  passanti per  $l^*$ . Passando da  $S_3^*$  a  $V_3^4$ , la linea  $l^*$  viene dilatata in una  $V_2^2$  non degenera: le rette generatrici di  $V_2^2$  di un sistema corrispondono ai singoli punti di  $l^*$ , ed i piani di  $V_3^4$  risultano appoggiati all' $S_3$  di appartenenza di  $V_2^2$  secondo le rette dell'altro sistema. Tutto ciò si ha subito — geometricamente — con facili considerazioni in  $S_3^*$ ; od anche — analiticamente — dopo aver notato che, prese in  $S_3^*$  coordinate omogenee  $(u, v, w, t)$  tali che  $l^*$  abbia le equazioni  $u = v = 0$ , si possono scegliere in  $S_6$  coordinate omogenee  $(x_1, x_2, \dots, x_7)$  siffatte che  $V_3^4$  abbia le equazioni parametriche:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 = u^2 : uv : v^2 : uw : ut : vw : vt;$$

allora le equazioni di  $V_3^4$  si ottengono annullando i minori del 2° ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_3 & x_6 & x_7 \end{vmatrix}_1,$$

$S_3$  è lo spazio di equazioni  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , ecc.

La  $V_3^4$  dianzi definita contiene  $\infty^4$  coniche non giacenti nei suoi piani generatori (ed anzi unisecate da questi): esse hanno precisamente per immagini in  $S_3^*$  le rette di questo spazio, alle  $\infty^3$  rette di  $S_3^*$  infinitamente vicine ad  $l^*$  corrispondendo le sezioni piane di  $V_2^2$ . I piani di dette coniche costituiscono in  $S_6$  un sistema algebrico  $\infty^4$  d'indice 1: invero, si vede agevolmente che due di tali piani possono risultare incidenti nei casi soltanto in cui le rette che ad essi corrispondono in  $S_3^*$  siano fra loro incidenti, oppure qualora una di queste rette si appoggi alla  $l^*$ .

Riferiamoci ora al trasformato omografico di  $V_3^4$  rappresentato uguagliando a zero i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 + ix_3 & x_2 & x_4 + ix_7 & x_5 + ix_6 \\ x_2 & -x_1 + ix_3 & -x_5 + ix_6 & x_4 - ix_7 \end{vmatrix}.$$

Tale  $V_3^4$  risulta reale, in quanto la matrice coniugata della suddetta può da essa ottenersi successivamente moltiplicando per  $-1$  gli elementi della 1<sup>a</sup> riga e della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> colonna, e poi scambiando fra loro le righe 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> e le colonne 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>. Quella  $V_3^4$  è però priva di punti reali, in quanto fra le sue equazioni figurano le  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ ,  $x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 0$ ; giusta quanto precede, essa contiene  $\infty^4$  coniche reali (prive di punti reali): ed i piani di quelle fra esse che non stanno sulla  $V_2^2$  immagine di  $l^*$  fibrano la regione ottenuta sopprimendo da  $S_6$  l' $S_3$  di appartenenza di detta  $V_2^2$  (ossia l' $S_3$  di equazioni  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ). Il sistema dei piani considerati ammette come curva focale (n. 1), su ciascuno di questi, la relativa conica d'appoggio con  $V_3^4$  contata doppiamente.

6. ESEMPI CON  $k=3$ . - Nell'ipotesi  $k=3$  si ha  $p=2$ ; sicché, denotando con  $m \geq 2$  un intero qualsiasi, ed assunto

$$r = 4m - 1,$$

restano soddisfatte sia la (1) che la (2). Mostriamo che:

*È possibile di fibrare globalmente un  $S_{4m-1}$  proiettivo reale ( $m \geq 2$ ) - mediante  $S_3$  - in (almeno) due modi proiettivamente distinti.*

Un primo modo segue subito dal capoverso finale del n. 2, quando vi si assuma per  $\mathfrak{A}$  l'algebra dei quaternioni reali. Al risultato si può dare veste geometrica suggestiva, osservando che, nell'anello dei quaternioni complessi, l'equazione (7) ammette una ed una sola soluzione a se  $\mathfrak{x}$  e  $\mathfrak{t}$  sono due dati quaternioni, il secondo dei quali non sia un divisore dello zero; se però  $\mathfrak{t}$  è divisore (non nullo) dello zero, affinché la (7) abbia qualche soluzione  $\mathfrak{a}$  occorre e basta che anche  $\mathfrak{x}$  sia un divisore dello zero. Poggiando sul n. 2 e sul fatto che i quaternioni divisori dello zero sono quelli di norma zero, ne discende agevolmente il seguente teorema.

*Dati  $m$  spazi  $S_3^{(1)}, S_3^{(2)}, \dots, S_3^{(m)}$  a tre dimensioni di un  $S_{4m-1}$  fra loro indipendenti (ossia congiunti da quest'ultimo spazio), si scelga comunque in ciascun  $S_3^{(h)}$  una quadrica  $Q^{(h)}$  non singolare ( $h = 1, 2, \dots, m$ ), e si consideri il cono ipersuperficie quadrica che proietta  $Q^{(h)}$  dall' $S_{4m-5}$  congiungente i rimanenti  $m-1$  spazi  $S_3$ . La varietà,  $W$ , intersezione degli  $m$ -coni così ottenuti ha la dimensione  $3m-1$ , l'ordine  $2^m$ , e risulta luogo di  $\infty^{2m}$  spazi  $S_{m-1}$  appoggiati in un punto a ciascun  $S_3^{(h)}$ . Essa inoltre contiene un sistema algebrico  $\infty^{4m-4}$  di quadriche  $V_2^2$  (non situate in quegli  $S_{m-1}$ ), e gli spazi  $S_3$  di appartenenza di queste ultime costituiscono in  $S_{4m-1}$  un sistema algebrico d'indice 1, avente come varietà focale su ciascun  $S_3$  la relativa  $V_2^2$  contata  $2m-2$  volte.*

*È chiaro che, nell'ipotesi che tutti gli elementi dianzi considerati si suppongano reali e si assuma ciascuna  $Q^{(h)}$  priva di punti reali, anche  $W$  risulta priva di punti reali. Allora gli  $S_3$  di appartenenza delle  $V_2^2$  reali di  $W$  costituiscono una fibrazione globale dell' $S_{4m-1}$ .*

Un secondo modo di procedere è il seguente. Ricordiamo anzitutto come, a modello del prodotto  $S_{n-1} \times S_1''$  possa - con C. Segre [9] - venir assunta una

varietà reale  $V_n$  d'ordine  $n$  di  $S_{2n-1}$ : questa possiede necessariamente una falda reale se  $n$  è dispari (in quanto  $n$  è l'ordine di  $V_n$ ), mentre essa invece può venir supposta priva di punti reali se  $n$  è pari (come si vede con semplici sviluppi analitici, analoghi a quelli dell'ultimo capoverso del n. 5). Assunto  $n = 2m$  (con  $m > 1$ ), sia dunque  $V_{2m}^{2m}$  un siffatto modello privo di punti reali del prodotto  $S'_{2m-1} \times S'_1$ . Gli  $\infty^{4m-1}$  iperpiani reali dell' $S_{4m-1}$  di appartenenza di  $V_{2m}^{2m}$  segano  $V_{2m}^{2m}$  secondo varietà immagini di corrispondenze bilineari fra  $S'_{2m-1}$  ed  $S'_1$ . Nelle ipotesi attuali, una tale corrispondenza non può mai risultare degenera. Infatti, in caso contrario, la sezione dell'iperpiano con  $V_{2m}^{2m}$  si spezzerebbe in una  $V_{2m-1}^{2m-1}$  del tipo  $S'_{2m-2} \times S'_1$  (con  $S'_{2m-2} \subset S'_{2m-1}$ ) ed in uno  $S_{2m-1}$  del tipo  $S'_{2m-1} \times S'_0$  (con  $S'_0 \subset S'_1$ ). Ciascuna di queste componenti dovrebbe avere una falda reale, poiché tali componenti hanno ordine dispari e non possono risultare fra loro coniugate, in quanto sono di ordini disuguali; questa contraddizione con l'ipotesi che  $V_{2m}^{2m}$  risulti priva di punti reali dimostra l'asserto.

Una corrispondenza bilineare fra  $S'_{2m-1}$  ed  $S'_1$  che rappresenti la sezione di  $V_{2m}^{2m}$  con un iperpiano  $S_{4m-2}$  reale di  $S_{4m-1}$  associa quindi ai singoli punti di  $S'_1$  gli iperpiani di un fascio entro  $S'_{2m-1}$ ; detto  $S'_{2m-3}$  l'asse di questo fascio, si vede così come a quell' $S_{4m-2}$  resti univocamente coordinata la  $V_{2m-2}^{2m-2}$  (reale)  $S'_{2m-3} \times S'_1$ , e quindi pure l' $S_{4m-5}$  reale a cui questa appartiene: ed è chiaro che questo  $S_{4m-5}$  giace nell' $S_{4m-2}$  inizialmente considerato. Ove si estenda l'argomentazione al campo complesso, l' $S_{4m-5}$  dianzi definito non appare univocamente determinato (avendo anzi precisamente  $\infty^{2m-2}$  posizioni diverse) per le sezioni iperpiane di  $V_{2m}^{2m}$  immagini di corrispondenze degeneri, e per esse soltanto. Gli iperpiani a queste relative risultano riferiti birazionalmente senza eccezioni alle coppie  $S'_{2m-2}, S'_0$  di cui al precedente capoverso, e costituiscono — com'è — subito visto — un ente duale a  $V_{2m}^{2m}$ . La dualità in  $S_{4m-1}$  fornisce così che:

*Un  $S_{4m-1}$  reale può venir fibrato globalmente mediante spazi  $S_3$  (duali dei suddetti  $S_{4m-5}$ ), in modo che il luogo riempito dalle varietà focali relative ai singoli  $S_3$  sia una  $V_{2m}^{2m}$  di C. Segre priva di punti reali, prodotto di un  $S_{2m-1}$  per un  $S_1$  (distinta quindi dalla  $W_{3m-1}^{2m}$  considerata nell'enunciato precedente).*

## BIBLIOGRAFIA.

- [1] H. GUGGENHEIMER, *Modifications of a manifold in one point*, «Math. Japonicae», 4, 5-11 (1956).
- [2] G. HIRSCH, *La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés*, Coll. Internat. de Topol. Algèbr. (Paris 1937), 35-42.
- [3] J. LABOUREUR, *Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme*, «Bull. Soc. Math. France», 70, 181-185 (1942).
- [4] H. HOPF, *Ueber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension*, «Fund. Math.», 25, 427-440 (1935).
- [5] H. HOPF, *Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra*, «Rend. Sem. Mat. Torino», II, 75-91 (1951-52).



- [6] B. SEGRE, *Sui sistemi di forme quadratiche nel campo reale*, «Comm. Math. Helv.», 28, 288-300 (1954).
- [7] B. SEGRE, *Dilatazioni di varietà differenziabili*, «Rend. Acc. Lincei», 22, fasc. 3, 249-257 (1957).
- [8] C. SEGRE, *Un'osservazione sui sistemi di rette negli spazi superiori*, «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 2, 148-149 (1888).
- [9] C. SEGRE, *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 5, 192-204 (1891).
- [10] C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 30, 87-121 (1910).
- [11] C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, «Encykl. d. Math. Wiss.», III 2, 769-972.
- [12] N. E. STEENROD e J. H. C. WHITEHEAD, *Vector fields on the  $n$ -sphere*, «Proc. Nat. Ac. of Sc.», 37, 58-63 (1951).
- [13] E. VENERONI, *Sui connessi bilineari fra punti e rette negli iperspazi*, «Rend. Circ. Mat. di Palermo», 26, 387-399 (1908).

**Fisica.** — *Sull'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale*. Nota (\*)  
del Socio QUIRINO MAJORANA.

Le mie ricerche sperimentali, tendenti a controllare l'attendibilità delle teorie relativistiche, compiute molti anni addietro <sup>(1)</sup>, mi indussero a realizzarne delle altre, concernenti le caratteristiche della forza gravitazionale. A ciò fui spinto, anche in considerazione della asserita *generalizzazione* della prima teoria *speciale*, del 1905, fatta da Einstein, in quell'epoca. Oggi, dopo circa 40 anni, i primi miei dubbi sulla detta attendibilità, hanno per me acquistato carattere di completa certezza, talché i motivi che mi indussero a intraprendere le nuove ricerche mi appaiono maggiormente giustificati.

Come io sia pervenuto a tale sicuro giudizio sull'opera di Einstein, può rilevarsi dalle numerose Note inserite in questi «Rendiconti», nel lungo periodo di tempo decorso, e particolarmente dall'ultima <sup>(2)</sup> di esse. Per chi non avesse seguito le critiche da me esposte in tali Note, è opportuno richiamare due semplici considerazioni, riferentisi l'una alla teoria speciale e l'altra alla generale, che molto chiaramente mettono in evidenza la completa infondatezza della relatività di Einstein.

**LE TEORIE RELATIVISTICHE.** — Per la teoria speciale, si considerino due sistemi piani sottilissimi, scivolanti l'uno sull'altro, in reciproco moto uniforme di traslazione. Osservatori numerosi sono distribuiti sui due sistemi, talché avverranno, fra coppie di essi, coincidenze spazio-temporali istantanee. Per ciascun sistema, vale la considerazione di un tempo unico concorde, scorrente in modo uniforme, secondo le ammissioni classiche. Ciò è vero, anche nella relatività di Einstein. Si può ora supporre che tutti i numerosi osservatori del

(\*) Presentata nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) Questi «Rendiconti», Serie V, vol. XXVI, p. 118; vol. XXVII, p. 462, a. 1917-18.

(2) Questi «Rendiconti», Serie VIII, vol. XXI, p. 14, a. 1956.

primo di tali sistemi, in un certo istante, per loro identico, ed unico, arrestino, in qualche modo meccanico, il moto del secondo sistema (osservatori compresi), agendo ciascuno sui punti di questo con loro istantaneamente coincidenti. Così facendo, in base alla relatività speciale (e più propriamente applicando la cosiddetta trasformazione di Lorentz), mentre talune coincidenze spazio-temporali, fra osservatori, sono avvenute per il primo sistema, ciò non avviene per il secondo; per il quale qualcuna non avverrà mai più! Tale conclusione è del tutto assurda, poiché la coincidenza spaziale fra due osservatori ovviamente deve essere riconosciuta da entrambi.

Per la relatività generale, basta ricordare la strana asserzione che Einstein premette nell'esporsi, e secondo cui lo schiacciamento della Terra ai poli sarebbe dovuto ad un'azione, non meglio definita, dei mondi lontani, o delle stelle dette fisse. Con tale asserzione, che Einstein faceva risalire a Mach, egli voleva fissare un sistema determinato di riferimento, senza esservi indotto da un necessario criterio di carattere fisico. Si sa, del resto, come la legge di inerzia classica dia una semplice e chiara spiegazione del detto schiacciamento; e che anche la rotazione meccanica ha carattere assoluto. Ciò si constata ancora in certi fatti elettromagnetici, come quello della induzione unipolare.

LE RICERCHE SPERIMENTALI DELL'ASSORBIMENTO GRAVITAZIONALE. — La ricordata inconsistenza delle teorie relativistiche che apparivano connesse alle teorie unitarie e che, in conseguenza, nessuna luce gettavano sulla natura del fenomeno gravitazionale, mi indussero a ricercare se questa potesse subire qualche affievolimento, nel traversare dei mezzi materiali. La ricerca era già stata tentata da altri, in precedenza, con dispositivi assai meno sensibili di quelli da me realizzati; ma con esito del tutto negativo. Le mie esperienze corrisposero ad un lungo periodo, fra il 1917 ed il 1923, da Torino a Bologna <sup>(3)</sup>.

Con esse, volli esaminare se una sfera di piombo del peso di circa 1300 gr venisse a perdere una parte di questo, perché circondata simmetricamente da 114 kg di mercurio, oppure da 9800 kg di piombo. Tali ricerche mi permisero di stabilire che il coefficiente  $h$  di smorzamento della gravitazione, per unità di densità del mezzo interposto e per unità di lunghezza di questo, risultava dell'ordine di  $10^{-12}$ , per quanto un po' più piccolo, nel caso dello schermo, molto grande, di piombo. Tale ordine di grandezza mi risultò ancora confermato, ponendo il blocco cubico di piombo di 9800 kg (di circa 1 m. di lato) ora sotto, ora sopra la sfera di 1300 gr. Il valore della attrazione newtoniana (alla Cavendish) del cubo sulla sfera veniva così una volta ad aggiungersi ed una volta a sottrarsi da quello del peso della sfera. Ma, per differenza, poteva dedursi quello dell'assorbimento parziale dell'attrazione terrestre (ossia del peso) sulla sfera di piombo. E tale assorbimento si aveva soltanto

(3) Questi « Rendiconti », Serie V, vol. XXVIII, pp. 165, 221, 313, 416, 480, a. 1919; vol. XXIX, pp. 23, 90, 163, 235, a. 1920; vol. XXX, pp. 75, 289, 350, 442, a. 1921; vol. XXXI, pagine 41, 81, 141, 221, 343, a. 1922.

quando il cubo era situato al disotto della sfera. Veniva così confermato l'ordine di grandezza dell'assorbimento unitario, in  $10^{-12}$ .

Per chiarire come io sia stato indotto a prevedere il fenomeno dell'assorbimento gravitazionale, dirò che tale ipotesi appare necessaria, non volendo supporre (come nessuno ha mai proposto) che l'attrazione fra due masse materiali sia dovuta all'esistenza di un ipotetico mezzo interposto. Del resto, per quanto l'ipotesi eterea debba oggi considerarsi caduta, essa non aveva mai servito a formulare una teoria esplicativa del campo di forza gravitazionale. Per cui, l'unica ipotesi plausibile (scartata quella delle misteriose particelle ultra-mondane di Lesage), per formulare una teoria della gravitazione, è quella dell'emissione, da parte di qualunque tipo di materia, di particelle *sui generis* che ho chiamato *gravitoni*. La generazione della forza attrattiva fra due corpi sarebbe così dovuta al reciproco arrivo di gravitoni, da essi emessi. Seguendo tale intuizione, ho formulato uno schema nuovo di teoria della gravitazione <sup>(4)</sup>.

In qualunque modo si svolga il processo di generazione della forza attrattiva, per l'arrivo dei supposti gravitoni, è logicamente necessario che una parte di essi venga assorbita dalla materia attirata. Se così non fosse, si avrebbe un effetto (l'attrazione) senza causa alcuna. Le mie esperienze confermerebbero ciò. Ma purtroppo, malgrado il rigore logico su cui esse sono basate, ed a parte i commenti interessanti che qualche scienziato autorevole ne fece a suo tempo, esse sono oggi quasi dimenticate, e nessuno ha mai pensato, in seguito, di ripeterle e controllarle.

CONSEGUENZE TERMICHE DELL'ASSORBIMENTO GRAVITAZIONALE. - L'assorbimento gravitazionale, concepito quale un fatto dinamico, continuo che si verifica in un qualunque ammasso materiale, anche se questo ci appare in perfetta quiete, deve procurare nell'ammasso un corrispondente effetto. Ancora un'ipotesi va fatta a tal riguardo: la più semplice e probabile corrisponde a sviluppo di calore. Avevo già formulato tale ipotesi al tempo delle mie ricerche sperimentali, citate. Anzi cercai di verificare in laboratorio tale fatto: il risultato fu però del tutto negativo. Recentemente ho ripreso in esame una simile ipotesi, che mi è apparsa sempre più attendibile e l'ho sviluppata in una Nota, che qui ho già citata. Tale studio mi ha permesso di rendermi conto dell'ora ricordato risultato sperimentale negativo. Infatti, partendo dall'equilibrio od uguaglianza tra l'ipotetico calore sviluppato e quello irradiato verso gli spazi cosmici (nel caso del Sole), ho potuto stabilire che il tempo idealmente necessario per l'aumento di  $1^{\circ}\text{C}$  nella massa terrestre, qualora il calore sviluppatosi non si disperdesse, è dell'ordine di  $10^{30}$  anni. In conseguenza, la superficie terrestre assume la temperatura di  $-167^{\circ}\text{C}$ , che naturalmente è più o meno superata, per l'arrivo del calore solare. Per il Sole, basta un tempo di 7-8 mesi per generare la stessa sovrarelevazione termica di  $1^{\circ}\text{C}$ .

(4) Questi « Rendiconti », Serie VIII, vol. XIX, p. 95, a. 1955; ved. anche vol. XVII, p. 150, a. 1954.



Ma avvenendo ciò in tutta la sua enorme massa, la sua superficie assume la nota temperatura dell'ordine di 6000 °C.

COME, DA ALTRI, FURONO GIUDICATI I MIEI RISULTATI SPERIMENTALI. — A parte gli sviluppi che ho dato, in questi ultimi anni, all'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale, da me controllato con tre dispositivi sperimentali, di cui l'ultimo veramente grandioso (uso di circa 10 tonnellate di piombo, poste in moto alternato); tale ipotesi destò dapprima notevole interesse, particolarmente da parte di tre vere illustrazioni della scienza fisica ed astronomica: A. Michelson, G. Lippmann ed H. N. Russell. Michelson, dopo la pubblicazione dei primi miei risultati sperimentali, che ho ora ricordati, mi scrisse, nel 1921, una lettera <sup>(5)</sup>, chiedendomi, molto cortesemente, il consenso di ripetere e controllare le mie esperienze sull'assorbimento gravitazionale. Naturalmente risposi dichiarandomi assai lieto della richiesta, perché l'opera di Michelson avrebbe dato molto credito alla mia, favorendone l'ulteriore sviluppo. Ma non seppi mai se Michelson, negli ulteriori suoi dieci anni di vita, avesse incominciato a tradurre in atto il suo proposito.

Nello stesso anno 1921, G. Lippmann mi obiettò privatamente, che il risultato delle mie esperienze poteva apparire in contrasto con la 3<sup>a</sup> legge di Keplero. Infatti, sembrerebbe che se la massa di un pianeta apparisse inferiore al vero, in conseguenza del suo assorbimento interno della forza attrattiva, non così si potrebbe dire per la sua inerzia, da cui la detta legge trae anche origine. Risposi a Lippmann che avevo usato ogni cura per evitare cause di errori; e che comunque le mie esperienze andavano controllate. In ogni modo lo stretto e ben noto legame tra inerzia e peso, fondamentale in fisica, si sarebbe potuto estendere anche all'assorbimento: nel senso che entrambi tali fatti possano affievolirsi negli ammassi materiali.

Nel settembre 1921, comparve un lungo articolo dell'astronomo Russell <sup>(6)</sup>, che, dopo aver riassunto le mie ricerche teoriche e sperimentali, aveva calcolato, in base alle mie formule, le *masse vere* dei pianeti (io mi ero limitato a fare ciò per il Sole). Dalla tabella preparata da Russell, si vede che per il piccolo pianeta Eros, l'assorbimento gravitazionale non darebbe effetto alcuno. In complesso, Russell, in tale lavoro, arriva alla stessa obiezione di Lippmann. Ma non conclude che perciò vi siano vere ragioni per ritenere i miei risultati assurdi. Avanza invece delle nuove ipotesi per cercare di darne una plausibile spiegazione. Così, egli opina che potrebbe il valore di una massa apparire alquanto diminuito, per la vicinanza di altra massa. Nel caso delle mie esperienze, la sfera di piombo verrebbe influenzata in tale senso, dal mercurio che la circonda. Mette in rilievo però, a quali problemi condurrebbe una simile nuova ipotesi. E conforta la possibilità di tale spiegazione col dubbio che la presenza di masse materiali possa mutare la curvatura dello spazio. Per quanto

(5) Per il testo di tale lettera, vedi «Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze» Congresso di Trieste, 1921.

(6) H. N. RUSSELL, *On Majorana's Theory of Gravitation*. «*Astrophysical Journal*», vol. 54, pp. 334-346, a. 1921.



io sia stato assai grato a Russell per il suo vivo interessamento alle mie ricerche, non so seguirlo in simile argomentazione.

Io ritengo, in vista del lungo periodo di tempo impiegato nelle mie ricerche, della varietà di metodi usati, e dello scrupolo per evitare possibili errori sistematici, che i miei risultati debbano condurre ad ammettere una variazione della inerzia della materia, parallelamente a quella del peso, corrispondente all'assorbimento. Ciò equivale a quanto ho già detto di aver comunicato a Lippmann.

L'argomento appare tanto importante, malgrado il disinteresse che fisici ed astronomi dimostrano per la mia opera negli ultimi 36 anni, da indurmi ancora ad invocare dai volenterosi ricercatori la ripetizione dei miei esperimenti <sup>(7)</sup>.

Va anche citata una Nota più recente del prof. G. Armellini <sup>(8)</sup>, secondo il quale, l'assorbimento gravitazionale, se realmente esiste, potrebbe solo corrispondere ad un coefficiente  $h$ , mille volte più piccolo di quello da me trovato. Aggiunge anzi, da relativista convinto (non tenendo conto dei motivi di inconsistenza di tale teoria, che da tempo espongo) che per la spiegazione relativistica del moto del perielio di Mercurio, il detto coefficiente  $h$  non potrebbe raggiungere al più che un milionesimo del mio valore. In merito ai ragionamenti di Armellini che lo portano a tali conclusioni (senza ricordare e discutere le mie lunghe e delicate esperienze), è però da osservare quanto segue. La semplificazione da lui introdotta, col supporre Mercurio puntiforme lo porta a trascurare del tutto la obiezione di Lippmann e di Russell, che è ben più importante della sua, il cui complesso calcolo è difficile seguire. Secondo un criterio intuitivo, sembrerebbe invece, che l'assorbimento gravitazionale che si può immaginare esista nel Sole, lascia immutate le posizioni dei due centri (del Sole e di Mercurio) fra cui agisce la forza attrattiva. Vale perciò per le due masse la 1<sup>a</sup> legge di Keplero; l'orbita del pianeta non può perciò che essere ellittica, e non spiraliforme. Non si ha perciò alcun moto del perielio. Soltanto il periodo di rotazione resta accresciuto. Se non vi fosse l'assorbimento, tutta la massa del Sole agirebbe in pieno, e tutti i pianeti orbiterebbero più rapidamente.

(7) A conferma dell'opportunità di simili conclusioni, mi piace riportare il seguente passo del lavoro di RUSSELL (loc. cit., p. 343) «... Further speculations on such matters seem, however, to be premature, when it is considered that the whole structure would rest upon the observation of a change in weight amounting to one part in 1200 millions. Discussion of the possibility that some undetected systematic error has crept into the results, in spite of the great care taken to eliminate such errors, or to correct them, must be left to those better versed in experimental technique than the present writer; but it is to be hoped that the further experiments which Professor Majorana contemplates will provide the data regarding the quality, magnitude, and laws of variation of the suspected influence which are now evidently desirable ».

Ed in seguito, RUSSELL aggiunge: «... Further evidence regarding the reality of the experimental effect appears to be urgently called for ».

(8) G. ARMELLINI, *Il moto del perielio di Mercurio nell'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale*, questi « Rendiconti », vol. V, p. 288, a. 1948.

CONCLUSIONE. — Chiudendo questa Nota, rilevo che mentre non vi può essere alcun dubbio sulla inconsistenza delle teorie relativistiche, la crisi della fisica moderna, così delineatasi, si avvia ad una suggestiva risoluzione mediante l'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale. Occorre però urgentemente, come diceva Russell, la ripetizione, il controllo ed il completamento delle mie esperienze eseguite 40 anni addietro.

A parte tali riserve, in una Nota seguente esporrò alcune conseguenze di carattere astronomico a cui la detta ipotesi darebbe luogo.

**Fisica.** — *Ipotetiche conseguenze dell'assorbimento gravitazionale.*  
Nota (\*) del Socio QUIRINO MAJORANA.

Verso la fine del secolo scorso, qualche astronomo si domandava se negli spazi cosmici potessero vagare degli astri spenti od oscuri, perchè prossimi alla fine della loro prevedibile naturale evoluzione. Infatti, se così fosse, non sarebbe stato possibile, od estremamente poco probabile, controllare. Inoltre, noti tentativi erano stati fatti per cercar di comprendere qual potesse essere l'età della Terra e del sistema solare, e non so se anche dell'universo tutto. In simili speculazioni si dimenticava forse quanto fosse vano per l'uomo, che non conosce bene (malgrado l'enorme progresso scientifico moderno) i fatti presenti e la loro essenza, indagare sul remoto passato od, ancora più difficilmente, sul lontano futuro. A riprova di tali asserzioni, si può ricordare che mentre H. Poincaré si accontentava di stabilire in una cinquantina di milioni di anni l'età della Terra, oggi si è portati a ritenere che tale tempo possa corrispondere a qualche miliardo di anni. Questa maggiorazione di un centinaio di volte è dovuta, come è noto, alle nuove conquiste della fisica nel campo delle trasformazioni atomiche o nucleari. Ma, d'altra parte, è facile comprendere ancora, tutta l'incertezza di valutazioni del genere, perchè oltre a non conoscere, nel caso degli astri, la precisa loro struttura interna, non si hanno elementi per stabilire le fasi ed i tempi necessari allo svolgersi dei vari fenomeni.

L'IPOTESI DELL'ASSORBIMENTO GRAVITAZIONALE. — Sulle difficoltà suesposte, ritengo che tutti possano convenire. E se si accettasse definitivamente, perchè opportunamente controllata, la nuova ipotesi da tempo da me proposta, tali difficoltà si verrebbero a modificare di molto. Infatti, tale ipotesi appoggiandosi al concetto che la materia emette continuamente delle particelle, delle quali per ora è impossibile precisare massa (*sui generis*) e loro velocità, lascia del tutto indeterminato il tempo necessario all'evoluzione dei fatti. Per noi, a causa della nostra ignoranza della vera, intima essenza della materia, i fatti osservabili dell'universo potrebbero avere (salvo la pe-

(\*) Presentata nella seduta del 13 aprile 1957.

riodicità di alcuni dei essi), carattere quasi stazionario. Ed il più grandioso spettacolo della natura, quello del cielo stellato, si deve imporre a noi, senza che possiamo comprendere in quali località dell'universo sia ancora possibile la vita simile alla nostra, o più modestamente, qual sia il tempo necessario all'evoluzione degli astri, siano essi stelle nane o giganti o supergiganti, od ammassi stellari o nebulose.

In conseguenza, è opportuno non preoccuparsi di quale possa essere l'avvenire dell'universo, e considerare come stabili i fatti che l'astronomia ci rivela, concernenti i vari astri o le popolazioni stellari. In tale indagine, può esser permesso, in linea puramente ipotetica e provvisoria, supporre che realmente l'assorbimento gravitazionale si verifichi nei grandi ammassi materiali, col conseguente sviluppo di calore.

Fra le numerose leggi che regolano i fatti qui richiamati, escludendo per ora quelle concernenti le stelle variabili o periodiche o le *novae*, è interessante ricordare quelle che stabiliscono relazione lineare fra il logaritmo della massa stellare e la sua grandezza luminosa assoluta; oppure tra la massa e la classe spettrale della luce emessa; od ancora la distribuzione degradante verso il rosso, data da Russell, delle stelle nane di grandezza assoluta decrescente; per le stelle giganti, tale degradazione manca. Tutte queste caratteristiche sembrano lasciar sospettare un assetto stabile fra la dimensione di ciascun astro e la radiazione da esso emessa. Assai difficilmente potrebbe conciliarsi la distribuzione stellare dell'universo governata dalle leggi ora ricordate, sia con una sua origine temporale unica, sia ancora con un'età diversa e casuale dei vari astri, dei loro ammassi, od anche delle varie galassie, distanti fra loro per centinaia di migliaia di anni-luce. Molto più semplice è accontentarsi di ipotesi coerenti solo con i fatti osservabili.

Quanto precede ci fa comprendere la opportunità di accettare l'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale, che corrisponde ad una continua generazione di calore nei grandi ammassi materiali. Certamente un tal fatto non può portare alla conservazione indefinita della materia. Ma a noi deve bastare l'accettazione di tale ipotesi, insieme all'incapacità nostra di sondare i tempi di una corrispondente evoluzione.

L'assorbimento gravitazionale, per le dette ragioni sarebbe la causa prima del calore stellare; non si hanno sicuri e probatorii argomenti per far concordemente risalire tale fatto alla trasformazione atomica. Simile asserzione vale in particolare per il nostro Sole i cui fenomeni superficiali (emissione di idrogeno, di elio, di elettroni, facole, protuberanze, macchie solari e loro periodicità, ecc.) non ci possono dare con sicurezza i particolari di quanto avviene nel suo interno. Tali fenomeni, solo con opportune convenzioni, che possono apparire gratuite, mettono in relazione quantitativa la energia irradiata con le trasformazioni atomiche presumibili o constatabili.

Oltre che alla considerazione sugli astri luminosi, la ipotesi dell'assorbimento gravitazionale trova, a mio avviso conferma dalla considerazione di astri non luminosi di luce propria, e cioè di due pianeti del sistema solare: la Terra e Giove. In Note precedenti, ho mostrato come, partendo dall'equilibrio



radioattivo fra energia solare emessa e quella generata secondo l'ipotesi del detto assorbimento, si possa stabilire quale debba essere l'energia termica creata nei pianeti e la corrispondente temperatura superficiale, necessaria per permettere l'irradiazione di tale energia. Nel caso della Terra, tale temperatura risulta di  $-176^{\circ}\text{C}$ , che naturalmente è variamente superata nelle sue diverse latitudini, dal riscaldamento solare. Ora, i geologi, pur in disaccordo quantitativo, ammettono che al centro della Terra la temperatura debba essere compresa fra 2000 e 10.000  $^{\circ}\text{C}$ . Mentre, prima della mia ipotesi, ammettere che questa temperatura comunque alta, fosse dovuta ad un residuo termico della origine terrestre, era accettato, appare ora molto più plausibile attribuirlo ad una continua generazione di calore, dovuta all'assorbimento gravitazionale. Per il pianeta Giove, che ha massa 318 volte maggiore della Terra, la mia teoria ha portato a stabilire che la sua temperatura superficiale sia dell'ordine di 300  $^{\circ}\text{C}$ , invece di  $-120^{\circ}\text{C}$ , secondo l'avviso di taluni astrofisici. Ma, come ho fatto vedere in una Nota precedente, le radio-onde emesse da Giove, recentemente scoperte da due radio-astronomi americani, confermano l'ipotesi di una temperatura superficiale del pianeta Giove, più prossima a quella da me indicata.

I fatti astronomici ora ricordati confermano dunque l'attendibilità dell'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale. Fra essi, ve ne è ancora uno, molto importante per lo sviluppo dell'astronomia in questo secolo, a cui accennerò nel seguente paragrafo.

LE STELLE CEFEBIDI. — Come è noto le Cefeidi sono stelle giganti isolate molto luminose, in valore assoluto: da 100 a 10.000 volte la luminosità solare<sup>(1)</sup>; esse hanno una bassissima densità media (Eddington ammette che al centro sia prossima a 0,1) ed un diametro che si valuta a milioni, decine e centinaia di milioni di km. La loro classe spettrale è diversa da caso a caso, potendo variare tra la B e la M, cioè tra le stelle bianche e le rosse. Ma, oltre l'immensità della loro estensione, la caratteristica più interessante è data dalla loro variabilità, o meglio dalla loro periodicità. Questo fatto si riferisce sia alle dimensioni, o raggio dell'astro, sia alla sua luminosità e temperatura superficiale. Tali ammissioni escludono perciò che le Cefeidi possano consistere in stelle doppie ad eclisse. Inoltre, la periodicità delle Cefeidi obbedisce alla legge di Leavitt-Shapley, secondo cui, per periodi non troppo piccoli, nè troppo grandi, il loro logaritmo è proporzionale alla grandezza assoluta di ciascun astro. È questa l'importante legge che ha permesso di meglio comprendere le distanze stellari.

Eddington ha cercato di formulare una teoria che potesse spiegare la pulsazione delle Cefeidi<sup>(2)</sup>. Tale trattazione, non più recente, si può dire faccia testo ancor oggi. L'A. dopo aver richiamato un lavoro di Schwarz-

(1) G. ABETTI, *Le stelle ed i pianeti*, Ed. Einaudi, a. 1956.

(2) A. S. EDDINGTON, *On the Radiative Equilibrium of the Stars*, vol. 77, p. 16, «Monthly Notices of the R.A.S.» a. 1916; *On the pulsation of the Cepheid Variables*, Part I, p. 2, id., vol. 79; e Part II, p. 177, vol. 79, a. 1918-19.



schild che si occupa di un caso di simmetria piana, prende in esame la supposta simmetria sferica della massa gassosa che costituisce la Cefeide, con temperatura crescente dall'esterno verso il centro. Ciò, secondo i criteri classici, deve corrispondere all'esistenza, nell'interno della Cefeide, di una conveniente provvista di energia, che l'astro va disperdendo per irradiazione verso l'esterno. Data l'altissima temperatura che tale massa gassosa deve possedere nei suoi strati interni, e specialmente nei centrali, Eddington ammette che vi debba essere una sorta di equilibrio tra la forza gravitazionale e la pressione di radiazione che nelle grandi profondità dell'astro deve essere costituita da raggi X. Eddington pensa che in tali condizioni possano verificarsi le pulsazioni che le Cefeidi ci mostrano. È ovvio rilevare che un fatto del genere non si osserva mai in scala ridottissima, come verrebbe fatto di tentare, realizzandolo nei nostri laboratori. Forse nel pensiero dell'A. tale impossibilità corrisponde all'altra di generare in una piccola massa gassosa, temperature e pressioni elevatissime come nell'interno degli astri: il fatto della pulsazione sarebbe perciò caratteristico delle enormi masse delle Cefeidi.

Comunque, Eddington, partendo dal fatto osservato dagli astronomi in numerosissime stelle giganti, ne cerca di affrontare la trattazione teorica. Riconosce però subito le gravi difficoltà analitiche del problema. Esso lo porterebbe a stabilire un'equazione differenziale del 4° ordine che può solo essere trattata con quadrature. Inoltre, si hanno quattro condizioni ai limiti: due al centro e due alla superficie esterna della massa gassosa. Per di più, la quadratura verso tale secondo limite risulta indeterminata, per l'evanescenza della pressione e della densità. Per tali motivi, Eddington si accontenta di trattare il problema, supponendo che esso si riferisca ad una trasformazione adiabatica. Per quanto una simile ammissione possa sembrare lecita nel caso di altissime temperature (a cui corrisponde una elevata ionizzazione e conseguentemente un più grande cammino medio delle molecole od atomi del gas), essa non appare del tutto lecita, anche in considerazione del necessario flusso termico, proveniente dall'interno, a cui energeticamente si deve il mantenimento della pulsazione.

A parte una simile obiezione, Eddington applica la sua teoria al caso di 14 Cefeidi, i cui dati corrispondono ad osservazioni astronomiche che vanno da *RR Lyrae* a *Y Ophiuchi*. I raggi di tali Cefeidi sono rispettivamente di 3,7 e 42,3 milioni di km; ed i periodi di pulsazione di 13 ore e 17 giorni, circa. Eddington deduce dalla sua teoria altri dati riguardanti tali astri, ammettendo che tutta la massa di questi prenda parte alla pulsazione della loro superficie che dalla osservazioni astronomiche corrisponde in media per le 14 Cefeidi suddette, al 0,077 del loro raggio.

È ora da considerare che il fenomeno della pulsazione delle Cefeidi ha, in certo modo, un carattere superficiale dell'astro. Esso è necessariamente legato al flusso di energia termica che provenendo dal suo interno, viene irradiato verso gli spazi celesti. La periodicità di tale irradiazione corrisponde, a sua volta, a quella della temperatura superficiale; che, dedotta dalle osservazioni bolometriche o spettroscopiche ha un massimo quasi coincidente con

quello della velocità di avvicinamento della superficie dell'astro alla Terra (si deduce ciò dall'effetto Doppler). Ma tutto questo processo ciclico interessa soltanto uno strato esterno dell'astro dell'ordine del decimo del suo raggio, come ci è rivelato dalla pulsazione di questo. Appare così, assai più plausibile ammettere che tale pulsazione avvenga, come ho già detto, soltanto nello strato esterno od ultimo. In esso le variazioni termiche a cui corrispondono forti accrescimenti nella irradiazione (secondo la 4° potenza della temperatura), provocano alternativamente rialzi od abbassamenti di questa, mantenendo attiva la pulsazione. La teoria di Eddington diverrebbe assai più complessa se avesse dovuto tener conto di tali previsioni.

È comunque da ammettere che il flusso interno di energia termica che mantiene le oscillazioni della Cefeide, sia continuo e costante nel suo interno, per diventare periodico in vicinanza della superficie irradiante (in modo periodico, anch'essa). È inoltre da dire che mal si comprende come il progressivo esaurimento di una provvista di energia termica nell'interno della Cefeide (che avrebbe anche bassa densità al centro) possa lasciare tutti tali astri nelle stesse condizioni, perchè per essi vale sempre la legge di Leavitt-Shapley.

Le precedenti considerazioni mostrano l'opportunità di estendere anche alle Cefeidi il principio dell'assorbimento gravitazionale. Con ciò si verrebbe ad ammettere la continua generazione di calore, capace di mantenere la enorme irradiazione esterna (da 100 a 10.000 volte quella del Sole). Grazie alla dilatabilità della massa gassosa ed alla legge di Stefan, il flusso di calore così previsto manterrebbe le pulsazioni delle Cefeidi quali realmente si osservano.

Termino questa Nota, ricordando ancora il processo logico che mi ha condotto all'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale. Ritengo accertata, senza possibilità di dubbio alcuno, la inconsistenza delle teorie relativistiche, che volevano in certo modo riparare il necessario abbandono della teoria dell'etere. Poichè un tentativo del genere si è dimostrato inutile, sono stato portato ad ammettere che l'azione a distanza fra masse materiali non potesse esser dovuta che ad un fenomeno emissivo della materia. Come ho già spiegato, da tal fatto deriva necessariamente uno sviluppo di calore nei grandi ammassi materiali, come la natura ci mostra negli immensi spazi dell'universo.

L'ordine di idee ora richiamato porta ancora ad un'importante conseguenza. Anche le azioni elettriche e magnetiche e quelle elettromagnetiche rappresentano azioni a distanza (cioè attraverso lo spazio detto vuoto). Ed esse non possono più venire interpretate mediante la teoria eterea, che se si vuole, era nata per gli analoghi fenomeni ottici. Tanto meno i detti fenomeni possono venire interpretati dalle fallaci teorie relativistiche. Non resta che congegnare anche per tali fenomeni una teoria emissiva, che per ora appare del tutto misteriosa. Quando ciò sarà avvenuto, si potrà intravedere una risoluzione della vasta crisi in cui, malgrado le grandi scoperte ed applicazioni dell'ultimo cinquantennio, la fisica moderna si dibatte.

Per quanto io ritenga che il quadro di ipotesi avanzate e di deduzioni logiche esposte, sia del tutto attendibile, è necessaria una nuova conferma sperimentale di quanto io avevo osservato circa 40 anni addietro. Tale conferma, che io ritengo non potrà mancare, almeno qualitativamente, dovrà anche stabilire il legame tra assorbimento gravitazionale ed inerzia della materia. Verrebbero così sciolte le riserve di Russell, che del resto egli non aveva formulato in modo assoluto. Tutto ciò rappresenta un grande e laborioso piano di lavoro, che purtroppo io non ho più la possibilità di svolgere. Vorrei augurarmi che il contenuto di questa Nota e della precedente possa indurre volentieri sperimentatori ad eseguire ricerche del genere. Solo dopo il felice esito di questo piano di lavoro potranno essere forniti all'astronomo ed al matematico sicuri elementi per l'ulteriore sviluppo e per la formulazione di precise teorie dell'argomento trattato, che, come si è visto ha estrema importanza per la più acuta e profonda comprensione di qualcuno dei grandiosi fenomeni naturali, che finora è mancata.

Ringrazio vivamente i Colleghi Giorgio Abetti e Guido Horn D'Arturo, che hanno voluto cortesemente fornirmi varie notizie di carattere astronomico concernenti l'argomento trattato in questa e nella precedente Nota.

**Chimica fisica.** — *Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del cuprotetracianuro di potassio in soluzione acquosa ed allo stato cristallino* (\*). Nota di GIOVANNI BATTISTA BONINO e di GIANFRANCO FABBRI, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

A seguito di precedenti ricerche sugli spettri Raman ed ultrarossi in complessi inorganici abbiamo intrapreso uno studio sul cuprotetracianuro di potassio ( $K_3[Cu(CN)_4]$ ).

Allo ione cuprotetracianuro si deve attribuire una configurazione tetraedrica con l'atomo di rame al centro del tetraedro ed i 4 CN disposti regolarmente sulle 4 direzioni tetraedriche che vanno dal centro ai vertici del tetraedro stesso [1].

In questa Nota ci occupiamo soltanto delle oscillazioni di valenza che impegnano particolarmente i gruppi CN. Su questo gruppo di oscillazioni caratteristiche si è dato qualche chiarimento generale in un precedente lavoro [2].

Accenneremo anche alle oscillazioni che impegnano i legami Cu—C. Si vede immediatamente che ambo i tipi di queste oscillazioni  $C\equiv N$  e Cu—C avvengono lungo gli assi ternari di simmetria del tetraedro e lasciano perciò invariati tali assi durante l'oscillazione. È facile allora calcolare i numeri,

(\*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi di Chimica-Fisica ed Idrologica del C.N.R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

i tipi e le regole di selezione di oscillazioni di valenza  $C\equiv N$  e  $Cu-C$  per lo ione cuprotetracianuro considerato allo stato isolato (per esempio in soluzione diluita).

Nella Tabella I sono dati appunto gli elementi di simmetria del gruppo tetraedrico  $T_d$  e le varie rappresentazioni irriducibili ( $A_1, A_2, E, F_1, F_2$ ) (le rappresentazioni triplamente degeneri si indicano in alcune pubblicazioni anche col simbolo T anziché F come qui abbiamo fatto) i caratteri relativi e le regole di selezione in Raman e in u.r. delle oscillazioni conformi alle varie rappresentazioni.

TABELLA I.

$[Cu(CN)_4]^{-3}$  a simmetria tetraedrica.

*Tabella degli elementi di simmetria, rappresentazioni irriducibili, caratteri delle stesse, regole di selezione in Raman e ultrarosso.*

$T_d$	E	$8 C_3$	$3 C_2$	$6 S_4$	$6 \sigma_d$	Attività
$A_1$	I	I	I	I	I	Ra.
$A_2$	I	I	I	— I	— I	—
E	2	— I	2	0	0	Ra.
$F_1$	3	0	— I	I	— I	—
$F_2$	3	0	— I	— I	I	Ra. e u.r.
G	4	I	0	0	2	Oscillazioni di valenza $C\equiv N$ e $Cu-C$

Ra = attività in Raman

u.r. = " " ultrarosso

Nell'ultima riga della Tabella sono riportati i caratteri G delle rappresentazioni riducibili corrispondenti sia alle oscillazioni di valenza CN sia a quelle Cu—C.



Si ricava immediatamente (ved. precedente lavoro di Bonino e Salvetti [2]) che:

per le oscillazioni  $C\equiv N$  si ha:  $1 A_1 + 1 F_2$

$Cu-C$  si ha:  $1 A_1 + 1 F_2$ .

Cioè sia per le oscillazioni  $CN$  che per quelle  $Cu-C$  si avrebbe rispettivamente una oscillazione semplice di tipo  $A_1$  attiva in Raman ed inattiva in u.r. ed una oscillazione triplamente degenera  $F_2$  attiva sia in Raman che in ultrarosso.

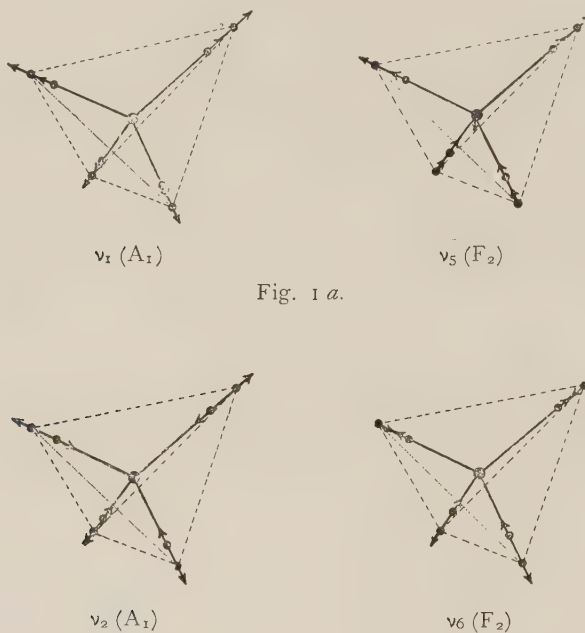


Fig. 1 a.

Fig. 1 b.

Nelle Fig. 1 a e 1 b sono riprodotti gli schemi di tali oscillazioni. Indichiamo con  $\nu_2$  e  $\nu_6$  rispettivamente le oscillazioni di valenza  $C\equiv N$  e con  $\nu_1$  e  $\nu_5$  quelle riferibili a  $Cu-C$ .

Per il cuprotetracianuro di potassio in soluzione nella zona delle oscillazioni  $C\equiv N$  si dovrebbero dunque riscontrare due righe Raman, di cui una polarizzata ( $A_1$ ) e una depolarizzata ( $F_2$ ). Viceversa in u.r. si dovrebbe registrare una sola riga  $C\equiv N$  triplamente degenera di tipo  $F_2$ .

Analoghi risultati si dovrebbero avere per le oscillazioni  $Cu-C$  che, come ben si intende, cadono a frequenze del tutto differenti dalle prime.

Le nostre misure eseguite per le oscillazioni  $C\equiv N$  sullo spettro u.r. di soluzione acquosa del complesso registrate nella parte sperimentale di questa Nota, confermano pienamente le previsioni. Si trova infatti una banda semplice  $CN$  a  $2078 \text{ cm}^{-1}$  ( $4,821 \mu$ ) che praticamente coincide con il valore trovato per la stessa soluzione da Penneman e Jones [3].

Non è stato possibile fare il controllo per l'oscillazione Cu—C, che cade a frequenza troppo bassa per essere rilevata in soluzione acquosa con i nostri apparecchi.

Lo spettro Raman di soluzione acquosa di cuprotetracianuro di potassio è stato ottenuto recentemente da Chiorboli e Testa [4], ed ha messo in evidenza appunto nella zona CN (attorno ai  $2050\text{--}2100\text{ cm}^{-1}$ ) due intense righe Raman, una polarizzata (tipo  $A_1$ ) a  $2096\text{ cm}^{-1}$  e l'altra depolarizzata (tipo  $F_2$ ) a  $2074\text{ cm}^{-1}$ .

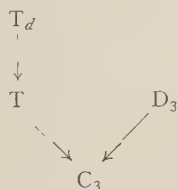
Passando allo studio degli spettri dello stesso complesso allo stato cristallino bisogna ricordare che dalle misure di Cox, Wardlaw e Webster [1] risulta che i cristalli del cuprotetracianuro di potassio, incolori, romboedrici, hanno una cella elementare di dimensioni  $a = 8,00\text{ \AA}$ ;  $\alpha = 77^\circ, 32'$  con due molecole di complesso per cella. Le misure röntgenografiche possono attribuire alla detta cella il gruppo spaziale  $D_3^7$ . A ciascuna molecola del complesso compete nel cristallo un asse ternario.

La configurazione più probabile dei gruppi CN è sempre secondo le direzioni che vanno dal centro ai vertici di un tetraedro al cui centro sta l'atomo di Cu. Gli Autori inglesi citati prospettano anche una disposizione trigonale con 3 gruppi CN oscillanti su tre direzioni complanari a  $120^\circ$  e il quarto gruppo CN oscillante su una direzione perpendicolare al detto piano. Però gli stessi Autori inglesi considerano questa disposizione dei gruppi CN come « very improbable distribution » (citazione [1], p. 780).

Mantenendoci allora all'ipotesi della configurazione molecolare tetraedrica, anche nel cristallo, occorre studiare con i metodi già schematizzati in una precedente Nota da Bonino e Salvetti [2] come venga perturbato l'insieme delle oscillazioni tetraedriche del complesso dalla simmetria cristallina.

Applicando un criterio già precedentemente illustrato nel citato lavoro si può prevedere che le oscillazioni del complesso tetraedrico (gruppo  $T_d$ ) nella cella cristallina conforme al gruppo di simmetria  $D_3$  siano conformi ad un gruppo di simmetria che possa essere contemporaneamente un sottogruppo del gruppo di punti  $T_d$ , che compete alla molecola del complesso isolata e al gruppo  $D_3$  che compete al cristallo.

Dalle Tabelle dei gruppi di simmetria ternari pubblicata dal noto libro di J. J. Burckhardt [5] si può ricavare lo schema seguente relativamente ai sottogruppi di  $T_d$  e di  $D_3$ :



Dunque il gruppo  $C_3$  risulta essere il sottogruppo a più elevata simmetria sia del gruppo tetraedrico che compete alla molecola isolata del complesso, sia del gruppo  $D_3$  cristallino.

Si possono allora calcolare i numeri e i tipi di oscillazioni  $C\equiv N$  dello ione  $[Cu(CN)_4]^{3-}$  supposto isolato nel cristallo e secondo il gruppo di simmetria  $C_3$ . Nella Tabella II, sono riportati per questo gruppo gli elementi di simmetria, le rappresentazioni irriducibili i caratteri e le regole di selezione in Raman ed in ultrarosso.

TABELLA II.

Gruppo $C_3$	E	$C_3$	$C_3^2$	
A	I	I	I	Ra. u. r.
E	I	$\epsilon^*$	$\epsilon$	Ra., u. r.
	I	$\epsilon$	$\epsilon^*$	
G	4	I	I	Oscillazioni di Valenza $C\equiv N$

Ra=attiva in Raman

u. r. = » » ultrarosso

$\epsilon = e^{2\pi i/3}$   
 $\epsilon^* = \text{complesso coniugato}$

Nell'ultima riga della Tabella sono dati i caratteri G delle rappresentazioni riducibili che corrispondono alle oscillazioni di valenza  $C\equiv N$  e  $Cu-C$ .

Se ne ricava subito che per queste oscillazioni si avranno i numeri e i tipi seguenti:

$$2A + 1E$$

cioè si avranno per lo ione  $[Cu(CN)_4]^{3-}$ , considerato isolato ma sotto l'azione del campo cristallino, due oscillazioni  $C\equiv N$  semplici di tipo A e una oscillazione doppiamente degenera  $C\equiv N$  di tipo E.

Per interpretare meglio questi risultati è bene osservare la Tabella III delle « corrispondenze » (vedi p. 3634 del citato lavoro [2] di Bonino e Salvetti) tra le oscillazioni « tetraedriche » del complesso isolato e quelle dello stesso perturbato secondo il gruppo di simmetria  $C_3$ .

Cioè nel cristallo si dovrebbero osservare 3 righe Raman delle quali una  $A(C_3)$  deriva dalla  $A_1(T_d)$ . Una seconda  $A(C_3)$  deriva dallo sdoppiamento della oscillazione triplamente degenerare tetraedrica  $F_2$  in una oscillazione di tipo A ed in una doppiamente degenerare di tipo E sotto la simmetria  $C_3$ . La terza riga Raman da osservare sarebbe quest'ultima di tipo  $E(C_3)$  proveniente da  $F_2(T_d)$ .

TABELLA III.

*Correllazioni*  $T_d—C_3$ 

$T_d$	$C_3$
$A_1$	A
$A_2$	A
E	E
$F_1$	A + E
$F_2$	A + E

Le due righe di tipo A (totalsimmetriche nella simmetria  $C_3$ ) dovrebbero essere di una intensità superiore alla riga di tipo E.

Difatti nello spettro Raman del cuprotetracianuro di potassio allo stato cristallino al posto delle due righe CN registrate per la soluzione acquosa se ne trovano tre delle quali una coincidente come frequenza con la  $A_1(T_d)$  e le altre due (una intensa ed una meno intensa) in posizione vicina alla  $F_2(T_d)$  osservata nello spettro Raman della soluzione.

Se però si considera che nella cella elementare del cristallo vi sono due molecole di complesso, resterebbero da considerare i possibili accoppiamenti delle oscillazioni di queste due molecole di complesso contenute nella cella elementare la cui simmetria è conforme al gruppo  $D_3$ .

Si potrebbe per questo fare un conto analogo ai precedenti tenendo conto di due molecole oscillanti secondo la simmetria  $D_3$ . Ma più semplicemente si può dedurre il risultato dalle Tabelle delle corrispondenze fra le oscillazioni secondo  $C_3$  e secondo  $D_3$  (terza colonna della Tabella IV).

Se ne dedurrebbe che le due oscillazioni  $A(C_3)$  si scindono ciascuna per accoppiamento rispettivamente in  $A_1$  e  $A_2$  della simmetria  $D_3$  mentre la oscillazione doppiamente degenerare  $E(C_3)$  non si scinde.



TABELLA IV.

OSCILLAZIONI  $C\equiv N$ 

Una molecola libera. $T_d$	di complesso supposta isolata nel cristallo. $C_3$	Due molecole accoppiate nella cella cristallina. $D_3$
$A_1$	$A$	$A_1$ (Ra) $A_2$ (u.r.)
$F_2$	$A$ $E$	$A_1$ (Ra) $A_2$ (u.r.) $E$ (Ra, u.r.)

Ra = attiva in Raman

u.r. = » » ultrarosso

Allora lo spettro Raman dovrebbe registrare le seguenti righe per la cella cristallina con due molecole ad oscillazioni accoppiate:

$$(D_3) : 2 A_1 + E$$

mentre lo spettro ultrarosso dovrebbe registrare le seguenti oscillazioni:  
 $(D_3) : 2 A_2 + E$ .

Si dovrebbero avere cioè tre righe Raman (che effettivamente si registrano sperimentalmente) e 3 massimi di assorbimento ultrarossi (si intende sempre per le oscillazioni  $C\equiv N$ ).

Lo spettro ultrarosso del cristallo di cuprotetracianuro mostra nella zona CN due serie di tre bande tra 2034 e 2090  $\text{cm}^{-1}$  anzichè una sola serie di tre come si registra nello spettro Raman nello stesso cristallo, e come farebbe prevedere in prima approssimazione la schematica indagine teorica svolta in questa Nota. In più si ha una debole banda a 2122  $\text{cm}^{-1}$  (fig. 2).

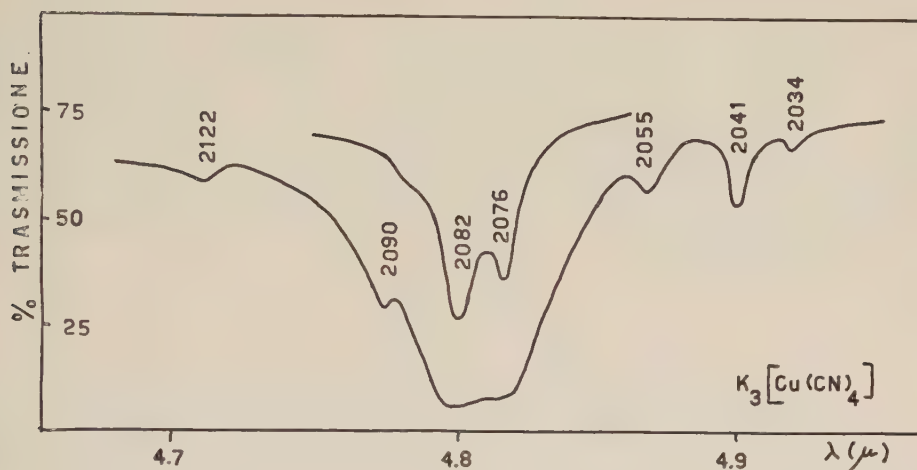


Fig. 2.

TABELLA V.

*Bande di assorbimento ultrarosse registrate per il complesso  $\text{K}_3[\text{Cu}(\text{CN})_4]$  allo stato cristallino alla temperatura ordinaria.*

$\nu$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\lambda$ ( $\mu$ )	Intensità
4164	2,402	<i>dd</i> (armoniche CN)
2443	4,093	<i>dd</i>
2399	4,168	<i>dd</i>
2122	4,712	<i>d</i>
2090	4,778	<i>f</i>
2082	4,802	<i>ff</i>
2076	4,816	<i>ff</i> } (zona CN)
2055	4,868	<i>d</i>
2041	4,899	<i>d</i>
2034	4,917	<i>d</i>
641	15,61	<i>dd</i>

Si deve notare che una delle serie di tre bande u.r. registrate nel nostro spettro e cioè quella a  $2076\text{--}2090\text{ cm}^{-1}$  coincide con la serie di tre righe Raman. L'altra serie di tre bande registrata nello spettro u.r. è spostata regolarmente di circa  $40\text{ cm}^{-1}$  per ciascun massimo. Anche la debole banda a  $2122\text{ cm}^{-1}$  risulta spostata (questa volta verso maggiori frequenze) di circa  $40\text{ cm}^{-1}$  rispetto alla componente più intensa del sistema di tre bande tra  $2076$  e  $2090\text{ cm}^{-1}$ .

La coincidenza tra la previsione teorica ed i risultati dell'effetto Raman farebbe pensare che sia da attribuire il gruppo di tre bande u.r. tra  $2090$  e  $2076\text{ cm}^{-1}$  alle tre oscillazioni previste dalla teoria e che le altre deboli bande CN rilevate nello spettro ultrarosso siano da attribuire a oscillazioni di combinazione delle prime con oscillazioni reticolari. Ulteriori indagini sono dunque da compiere per chiarire questo punto. Contiamo perciò di poter ritornare sull'argomento.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Il complesso  $\text{K}_3[\text{Cu}(\text{CN})_4]$  è stato preparato secondo le istruzioni date da Bassett e Corbet [6]. Ringraziamo il dott. Enos Tedeschi per la collaborazione che ci ha prestato nella preparazione, purificazione e cristallizzazione di questo sale.

Lo spettro ultrarosso è stato eseguito mediante lo spettrometro Beckman già descritto in precedenti lavori. Si è eseguito uno spettro sulla soluzione acquosa concentrata con le tecniche già usate da noi nel caso dello studio di altri complessi [7].

L'esecuzione degli spettri del composto cristallino è stata fatta sul complesso macinato con mulino a vibrazione, impastato sia con olio di vaselina, sia con Tripen a seconda delle zone spettrali.

La zona spettrale che corrispondeva durante la registrazione alla larghezza delle fessure spettrometriche era la seguente:

Ottica di LiF a  $3:3\text{ cm}^{-1}$

Ottica di LiF a  $5:1\text{ cm}^{-1}$

Ottica di NaCl a  $5:8\text{ cm}^{-1}$

Ottica di NaCl a  $15:2\text{ cm}^{-1}$

Ottica di KBr a  $20:3\text{ cm}^{-1}$

Ottica di KBr a  $25:4\text{ cm}^{-1}$

La soluzione acquosa nella zona attorno ai  $2000\text{ cm}^{-1}$  (zona delle oscillazioni di valenza  $\text{C}\equiv\text{N}$ ) ha mostrato una banda semplice a  $2078\text{ cm}^{-1}$  ( $4,821\text{ }\mu$ ). Questa banda corrisponde praticamente a quella ottenuta da Panneman e Jones [3].

Il gruppo di bande osservato tra  $2034$  e  $2122\text{ cm}^{-1}$  per il complesso allo stato cristallino corrisponde alle oscillazioni di valenza  $\text{C}\equiv\text{N}$  già discusse.

La banda a  $641\text{ cm}^{-1}$  è da attribuirsi alla oscillazione  $\text{Cu}-\text{C}$  e dovrebbe derivare quindi dalla oscillazione originaria  $\nu_5(\text{F}_2)$  (vedi fig. 1).

Nello spettro Raman della soluzione di  $\text{K}_3[\text{Cu}(\text{CN})_4]$  compare invece una riga a  $502\text{ cm}^{-1}$  che si potrebbe attribuire alla oscillazione totalsimmetrica di valenza  $\nu_1(\text{A}_g)$  (vedi fig. 1) riferibile essenzialmente alla coordinata di valenza  $\text{Cu}-\text{C}$ .

È da notare come questa oscillazione riferibile alla  $\nu_5(\text{F}_2)$  per il composto cristallino si presenti come debole banda unica non risolta dalla simmetria cristallina a differenza di quanto invece accade per le bande riferibili alle oscillazioni di valenza  $\text{CN}$  attive in ultrarosso.

Osservazioni analoghe abbiamo già fatto per le oscillazioni di tipo  $\text{Me}-\text{C}$  in altri casi di spettri ultrarossi di complessi allo stato cristallino come per esempio per il ferrocianuro e per il cobaltocianuro di potassio.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] Vedi per esempio E. G. COX, W. WARDLAW e K. C. WEBSTER, « Journ. Am. Chem. Soc. », 1936, p. 780.
- [2] G. B. BONINO e O. SALVETTI, « Ricerca Scientifica », 26, 3627 (1956).
- [3] R. A. PENNEMAN e L. H. JONES, « Journ. Chem. Phys. », 24, 293 (1956).
- [4] Nota in corso di pubblicazione.
- [5] J. J. BURCKHARDT, *Die Bewegungs Gruppen der Kristallographie*, Edit. Birkhauser, Basel 1947, p. 72.
- [6] H. BASSET, S. CORBET, « Journ. Chem. Soc. », 125, 1660 (1924).
- [7] G. B. BONINO, G. FABBRI, « Rend. Accad. Lincei » (VIII) 19, 386 (1955); G. B. BONINO, G. FABBRI, « Rend. Accad. Lincei », (VIII) 20, 414 (1956); G. B. BONINO, G. FABBRI, « Rend. Accad. Lincei » (VIII) 20, 566 (1956); G. B. BONINO, G. FABBRI, « Rend. Accad. Lincei », (VIII) 21, 246 (1956).

**Chimica organica.** — *Sulla struttura dell'echinulina*<sup>(\*)</sup>. Nota di ADOLFO QUILICO, CESARE CARDANI e FRANCO PIOZZI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio A. QUILICO.

Le ricerche sulle quali è stato altre volte riferito<sup>(1)</sup>, hanno portato alla conclusione che l'*echinulina*,  $\text{C}_{28}\text{H}_{37}\text{O}_2\text{N}_3$ , contiene un sistema indolico 2, 5, 7- trisostituito al quale è collegato un anello dichetopiperazinico di cui fa parte una molecola di L (+)-alanina. A parte il modo di unione ancora incerto delle porzioni indolica e dichetopiperazinica della molecola, e la distribuzione degli atomi di carbonio in due delle tre catene laterali, le strutture dell'echi-

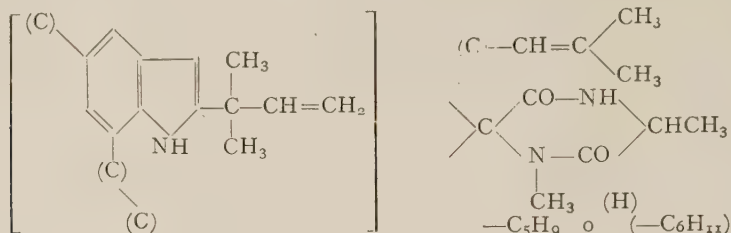
(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

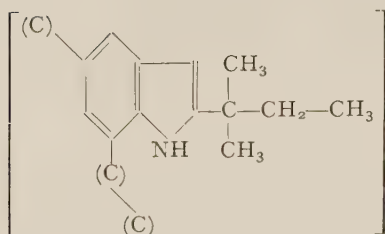
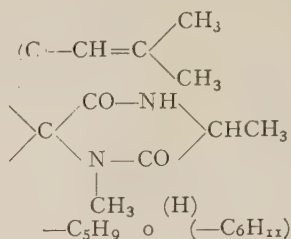
(1) A. QUILICO, C. CARDANI e F. PIOZZI, « Rend. Acc. Lincei », VIII, 17, 315 (1955); « Gazz. Chim. It. », 86, 211 (1956).



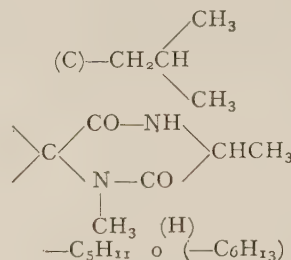
nulina e del suo *esaidroderivato*  $C_{28}H_{43}O_2N_3$ , possono essere schematizzate come in (I) e in (II):



I.



II.

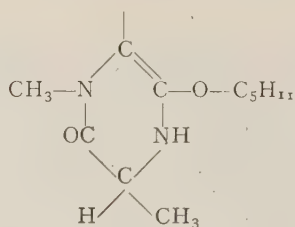


L'attribuzione provvisoria di un  $-\text{CH}_3$  ad uno degli azoti dell'anello dichetopiperazinico riposa unicamente sull'ottenimento di metilammina accanto ad etilammina nella pirolisi del sale di K dei dipeptidi che si formano dall'echinulina e dal suo idroderivato per saponificazione con KOH alcoolica <sup>(2)</sup>.

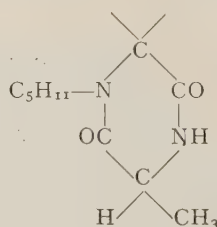
Di difficile interpretazione appariva l'agevole distacco di un gruppo  $-\text{C}_5\text{H}_{11}$  sotto forma di bromuro d'amile terziario dall'idroeichinulina per breve ebollizione con HBr acquoso concentrato. Le due ipotesi che si presentavano più plausibili erano:

a) Che il gruppo  $-\text{C}_5\text{H}_{11}$  fosse legato attraverso l'ossigeno come gruppo etero  $\text{C}_5\text{H}_{11}-\text{O}-(\text{C})$ , derivato dalla forma enolica della dichetopiperazina (III).

b) Che esso fosse unito ad uno degli atomi di azoto dello stesso sistema come gruppo  $\text{C}_5\text{H}_{11}-\text{N}<$ , come indica lo schema (IV):



III.



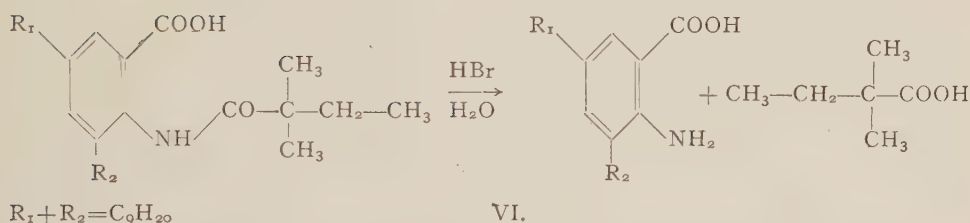
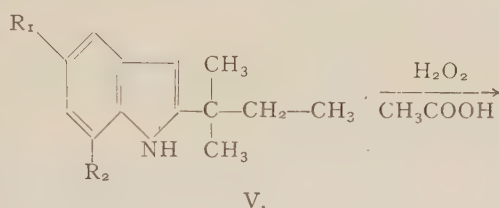
IV.

Tutte e due le ipotesi urtano però contro varie difficoltà, la più grave di tutte quella di non spiegare l'ottenimento di indoli omologhi 2, 5, 7-trisosti-

(2) A. QUILICO, C. CARDANI e F. PIOZZI, «Gazz. Chim. It.», 85, 3 (1955).

tutti  $C_{21}-C_{22}$ , che si formano in buone rese nella pirolisi in condizioni blande dei sali di K delle forme idratate dell'echinulina e dell'idroecheinulina.

Nel riprendere questo studio, ci siamo anzitutto proposti di stabilire con sicurezza la formula dell'indolo (V) derivato dall'idroecheinulina, formula che era rimasta incerta tra le due  $C_{21}H_{33}N$  e  $C_{22}H_{35}N$ . Per ossidazione con acido peracetico a temperatura ambiente della base (V) abbiamo ottenuto in buone rese, in accordo con quanto è noto per gli indoli 2-sostituiti <sup>(3)</sup>, un *acido N-acilantranilico* di formula  $C_{22}H_{35}O_3N$ . La costituzione (VI) di tale acido è dimostrata, oltre che dall'esame dello spettro I.R. del suo estere metilico di confronto con quello di modelli di struttura nota, dall'ottenimento di *acido  $\alpha, \alpha$ -dimetilbutirrico* all'idrolisi con HBr concentrato:

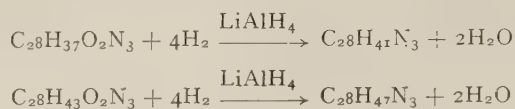


L'indolo da pirolisi dell'idroecheinulina ha quindi la formula  $C_{22}H_{35}N$ , con  $R_1 + R_2 = C_9H_{20}$  ( $R_1$  o  $R_2 = -C_4H_9$ ,  $R_2$  o  $R_1 = C_5H_{11}$ ) <sup>(4)</sup>. A meno di non ammettere una trasposizione, tutt'altro che probabile, del gruppo  $-C_5H_{11}$  dall'ossigeno (o dall'azoto) al carbonio durante la pirolisi, strutture come la (III) e la (IV) debbono essere per ciò escluse. L'impossibilità di una formula del tipo (III) per la metà dichetopiperazinica dell'echinulina e dell'idroecheinulina, è stata poi dimostrata dallo studio dei prodotti di riduzione di queste sostanze con idruro di litio e alluminio.

(3) B. WITKOP, « Ann. », 558, 98 (1947); B. WITKOP e J. B. PATRICK, « J. Am. Chem. Soc. », 73, 2196 (1951); C. MENTZER e Y. BERGUER, « Compt. Rend. », 234, 627 (1952); J. TEUBER e G. STAIGER, « Ber. », 88, 1071 (1955); C. CARDANI e F. PIOZZI, « Gazz. Chim. It. », 86, 854 (1956).

(4) Che una delle catene  $R_1$  e  $R_2$  debba avere almeno quattro atomi di carbonio è indicato dal fatto che l'indolo ottenuto per pirolisi del sale di K dell'echinulina dà acetone all'ossidazione permanganica a freddo, come fa l'echinulina stessa: vedi A. QUILICO, C. CARDANI e F. PIOZZI, « Gazz. Chim. It. », 85, 25 (1955). Ciò indica anche che in una delle catene laterali deve essere presente l'aggruppamento  $(CH_3)_2C = C <$ . D'altra parte nell'ossidazione permanganica dell'idroecheinulina è stato ottenuto *acido isovalerianico* (accanto all'*acido  $\alpha, \alpha$ -dimetilbutirrico* proveniente dalla catena in 2, mentre non si sono isolati acidi grassi a numero di atomi di carbonio più elevato.

La riduzione procede facilmente in soluzione eterca secondo lo schema:

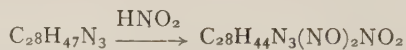


e si formano due basi prive di ossigeno contenenti l'originario numero di atomi di carbonio. La *desossiechinulina* e la *desossiidroechinulina* sono liquidi vischiosi, distillabili senza decomposizione nel vuoto spinto, aventi proprietà basiche assai deboli. Come le basi indoliche  $\text{C}_{22}$  da pirolisi altre volte descritte, danno in soluzione alcoolica colorazione rosso sangue con 1, 3, 5-trinitrobenzene, e colore verde sporco cupo con cloranile. Al pari dell'echinulina e dell'idroechinulina da cui provengono, non presentano invece la reazione di Ehrlich con la dimetilamminobenzaldeide e non colorano il fuscello d'abete <sup>(5)</sup>. L'idrogenazione con  $\text{PtO}_2$  in acido acetico della desossiechinulina porta, per assorbimento di  $3\text{H}_2$ , ad un prodotto risultato identico alla desossiidroechinulina. Gli *spettri I.R.* di queste sostanze mostrano chiaramente la banda dell'NH indolico intorno a  $2,9 \mu$  e una banda  $3,04 \mu$  assegnabile all'NH amminico, mentre è sparita la banda intorno a  $6 \mu$  del CO dichetopiperazinico. Nello spettro della desossiechinulina è inoltre presente la banda del gruppo vinilico a  $10,95 \mu$ . Gli *spettri U. V.* sono assai simili a quelli dell'echinulina, dell'idroechinulina e delle basi indoliche da pirolisi.

Un fatto importante da rilevare è che la desossiidroechinulina, bollita con HBr acquoso d. 1, 48, fornisce ancora *bromuro d'amile terziario*, che si ricupera in quantità di circa il 50 % del teorico richiesto per una mol. di bromuro da una di base <sup>(6)</sup>.

Ciò conferma che il gruppo  $-\text{C}_5\text{H}_{11}$  eliminato non poteva essere presente nella idroechinulina in forma di  $-\text{OC}_5\text{H}_{11}$ , mentre lascia l'alternativa tra un legame  $\text{>C}-\text{C}_5\text{H}_{11}$  e  $\text{>N}-\text{C}_5\text{H}_{11}$ .

Ulteriori notizie sulla costituzione di queste *desossibasi* si sono ricavate dallo studio dei loro prodotti di reazione con acido nitroso. Facendo agire a freddo il nitrito sodico sulla soluzione in acido acetico glaciale della desossiidroechinulina, si ottiene un prodotto giallo cristallino p. f.  $205^\circ$ . L'analisi dà valori che portano ad attribuirgli la formula  $\text{C}_{28}\text{H}_{44}\text{O}_4\text{N}_6$  di *dinitroso-mononitroderivato* della base  $\text{C}_{28}\text{H}_{47}\text{N}_3$ :



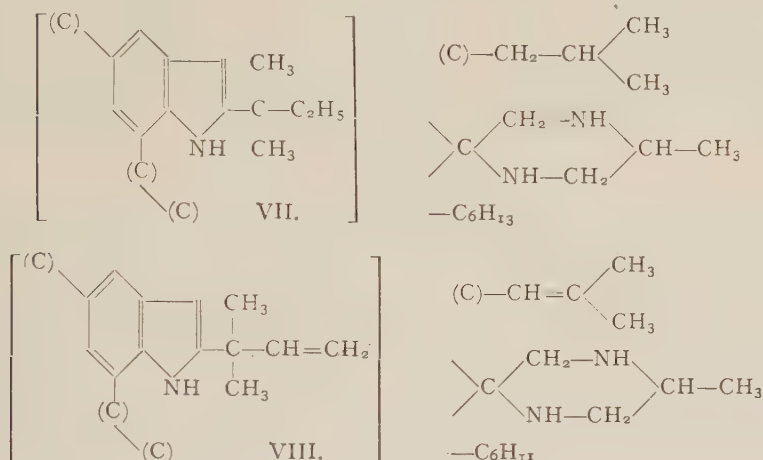
Conformemente a questa formula, la sostanza dà molto intensa la reazione di Liebermann e viene facilmente denitrosata dall'HCl secco in ambiente eterico con sviluppo di NOCl. Per riduzione con Zn ed acido acetico si forma una base incolore, che trattata ancora con acido nitroso dà una intensa colo-

(5) Tanto l'echinulina e l'idroechinulina quanto le corrispondenti desossibasi danno tuttavia netta reazione quando, in luogo della soluzione cloridrico-alcoolica di dimetilamminobenzaldeide, si impiega una soluzione di questo reattivo in acido solforico concentrato.

(6) Il rendimento è praticamente identico a quello che l'idroechinulina fornisce per eguale trattamento.

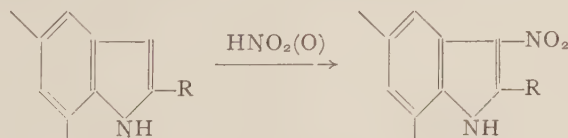
razione violetta che vira immediatamente al rosso. Lo spettro I.R. del nitro-dinitrosoderivato mostra una banda assai netta intorno a  $2,98 \mu$  assegnabile all'NH indolico ed una assai intensa intorno a  $6,60 \mu$  attribuibile al gruppo  $-\text{NO}_2$ , mentre è sparita la banda dell'NH amminico intorno a  $3,04 \mu$ .

L'interpretazione più naturale che si può per ora dare di questi fatti è che la *desossiidroechinulina* abbia la struttura (VII) di piperazina sostituita con i due NH liberi:



Ciò porterebbe non solo a scartare la possibilità di una struttura (IV) per la metà dichetopiperazinica della idroechinulina e dell'echinulina, ma escluderebbe anche la presenza nella sostanze in istudio di un gruppo  $-\text{CH}_3$  all'azoto (7). La *desossiechinulina* avrebbe analogamente la costituzione (VIII), in cui le tre catene laterali sono insature.

La presenza di un nitrogruppo nel prodotto di azione dell'acido nitroso sulla desossiidroechinulina non presenta difficoltà d'interpretazione, e offre anzi una conferma della esistenza di un sistema indolico a posizione 3 libera. È stato infatti frequentemente osservato per i pirroli e gli indoli sostituiti a posizione 3 libera l'introduzione di un nitrogruppo in 3, per azione dell' $\text{HNO}_2$  in condizioni analoghe a quelle in cui si è operato (8):



(7) Non si potrebbe a rigore del tutto escludere che, come è stato qualche volta osservato per le ammine terziarie, l'azione dell'acido nitroso non abbia portato all'eliminazione del metile all'azoto. Tuttavia, a parte il fatto che l'analisi del dinitroso-nitroderivato è in molto migliore accordo con una formula  $\text{C}_{28}\text{H}_{44}\text{O}_4\text{N}_6$  che non con quella  $\text{C}_{27}\text{H}_{42}\text{O}_4\text{N}_6$ , esperienze da noi eseguite sulla sarcosilglicina in condizioni analoghe dimostrano che questa si nitrosa normalmente nell'unico NH libero, senza rimozione del  $-\text{CH}_3$  dal gruppo  $\text{CH}_3-\text{N}<$ .

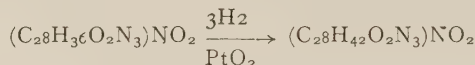
(8) Vedi ad esempio: T. AJELLO e G. SIGILLÒ, «Gazz. Chim. It.», 69, 315 (1939); T. AJELLO, *ibid.*, 69, 646 (1939); E. B. WOMACK, N. CAMPBELL e G. B. DODDS, «J. Chem. Soc.», 1938, 1402.



In appoggio a questo modo di vedere sta il fatto che caratteristici *mononitroderivati* sono stati da noi ottenuti per azione dell'acido nitroso a temperatura ordinaria sull'echinulina e sull'idroechinulina in soluzione acetica glaciale.

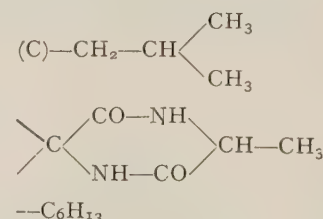
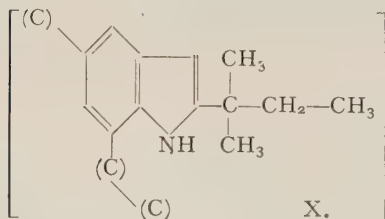
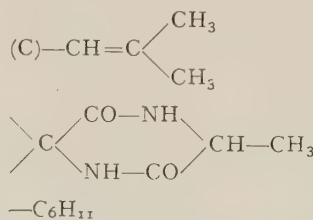
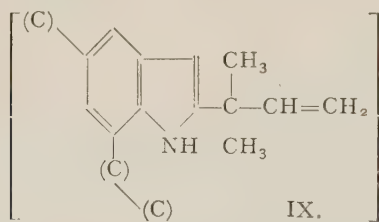
La *nitroechinulina*,  $(C_{28}H_{36}O_2N_3)NO_2$ , forma cristallini giallo chiari a p. f.  $226^\circ-228^\circ$ , che non danno la reazione di Liebermann. Il suo *spettro I. R.* mostra chiaramente la banda dell'NH indolico a  $2,91 \mu$ , le due bande a  $3,16$  e  $3,30 \mu$  assegnabili all'NH dichetopiperazinico, e la intensa banda intorno a  $6 \mu$  del CO lattamico; inoltre è presente a  $6,67 \mu$  la banda del gruppo  $NO_2$ .

In modo analogo è stata ottenuta una *nitroidroechinulina*  $(C_{28}H_{42}O_2N_3)NO_2$ , che può essere preparata anche per idrogenazione catalitica con  $PtO_2$ , a pressione e temperatura ordinarie, della nitroechinulina in soluzione acetica:

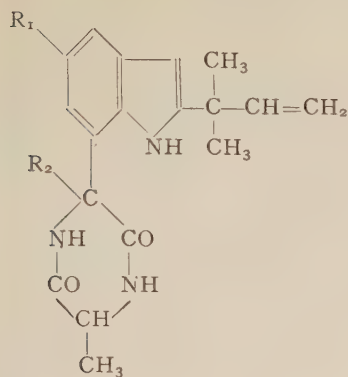


ciò che dimostra che l'azione dell'acido nitroso non ha interessato i doppi legami delle catene laterali <sup>(9)</sup>.

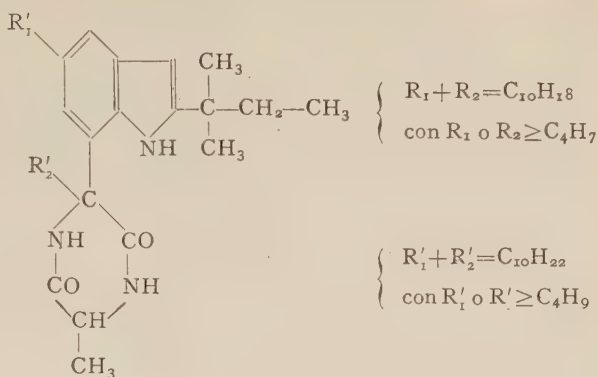
Dal complesso dei nuovi dati sperimentali ora riportati risulta confermata la struttura indolica-dichetopiperazinica dell'echinulina e del suo esaidroderivato già da noi precedentemente proposta. L'ottenimento di un dinitroso-mononitroderivato della desossiidroechinulina senza eliminazione di catene carboniche, porterebbe a concludere che le sostanze in istudio non contengono un  $CH_3-$  all'azoto, come la formazione di  $CH_3NH_2$  alla pirolisi sembrava indicare. Le formule (IX) e (X), sviluppabili nelle altre (XI) e (XII), sono quelle che meglio interpretano le attuali nostre conoscenze sull'echinulina e sui suoi derivati:



(9) La nitroidroechinulina esiste in due modificazioni nettamente distinguibili all'aspetto e alla forma cristallina, trasformabili l'una nell'altra per cristallizzazione o per fusione. La *forma α* cristallizza in tavolette o prismi limpidi gialli che a  $225^\circ$  si trasformano bruscamente in un aggregato di cristalli aghiformi della *forma β*, che fonde poi a  $261^\circ-262^\circ$ . Per cristallizzazione da solventi, a seconda delle condizioni, si ottiene l'una o l'altra delle due forme, che rappresentano con ogni probabilità due modificazioni polimorfe della stessa sostanza. Gli *Spettri I.R.* delle due modificazioni allo stato solido mostrano importanti differenze nella regione intorno ai  $3 \mu$ , mentre gli *spettri U.V.* in soluzione etanolica sono praticamente identici.

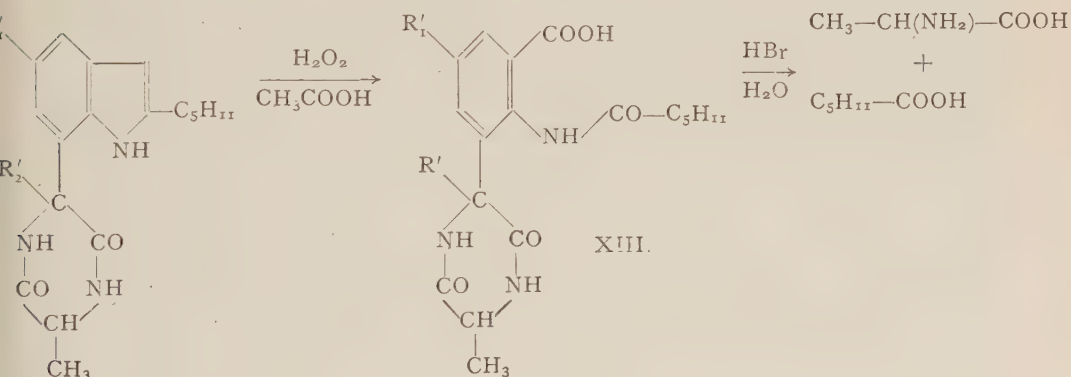


XI.



XII.

Mentre è escluso che il gruppo  $\text{—C}_5\text{H}_{11}$  che si elimina in forma di bromuro d'amile terziario nel trattamento con HBr dell'idroeichinulina sia presente in essa come  $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{—O—(C)}$  o  $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{—N<}$ , permane la difficoltà di dare una spiegazione della facile rottura di un legame  $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{—C<}$  ad opera dell'HBr. A questo proposito, non siamo ancora in grado di precisare se quello eliminato sia il gruppo terziario  $\text{C}_5\text{H}_{11}\text{—}$  unito in posizione 2 all'anello indolico, o se esso provenga da uno dei residui  $\text{R}'_1$  e  $\text{R}'_2$ . A favore della prima ipotesi starebbe il fatto che per ossidazione con acido peracetico dell'idroeichinulina si forma una sostanza  $\text{C}_{26}\text{H}_{43}\text{O}_5\text{N}_3$  che è con tutta probabilità l'acido *N-acilantranilico* (XIII) formatosi per apertura dell'anello indolico:

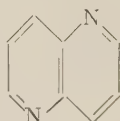


Ora questa sostanza, che dovrebbe contenere inalterata la rimanente parte della struttura dell'idroeichinulina, fornisce all'idrolisi con HBr L(+)-alanina e acido  $\alpha, \alpha$ -dimetilbutirrico, senza che sia possibile di mettere in evidenza la contemporanea formazione di bromuro d'amile terziario che era lecito attendersi se questo avesse preso origine da uno dei gruppi  $\text{R}'_1$  e  $\text{R}'_2$ .

Le ricerche attualmente in corso permetteranno di chiarire questi punti ancora oscuri.

**Chimica.** — *Struttura cristallina dell'1-5-naftiridina* (\*). Nota di GIORDANO GIACOMELLO, ALFONSO M. LIQUORI e ALBERTO RIPAMONTI, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. GIACOMELLO.

L'1-5-naftiridina



è un isostere della naftalina in cui i due gruppi C—H in posizione 1 e 5 sono sostituiti da due atomi di azoto.

Come continuazione di un programma di ricerche sulle relazioni fra struttura molecolare ed elettronica di eterocicli azotati abbiamo ritenuto interessante intraprendere lo studio della struttura cristallina di questo composto, mediante diffrazione dei raggi X.

In questa Nota vengono riportati alcuni risultati preliminari, che formano la base di ulteriori ricerche dirette a stabilire accuratamente angoli e distanze di legame in questa molecola.

L'1-5-naftiridina è stata preparata secondo il metodo descritto da Bobranski e Sucharda (1). Si presenta in forma di cristalli prismatici monoclini, che sublimano facilmente e fondono a 75°.

Sono stati eseguiti fotogrammi con radiazione  $K\alpha$  del rame mediante camera Weissenberg e camera a precessione, di un cristallo ottenuto per lenta sublimazione e chiuso in un capillare di vetro a pareti sottili.

La distribuzione dei riflessi sul piano  $a^* - c^*$  del reticolo reciproco indica la presenza di una compenetrazione di due reticoli reciproci con gli assi  $a^*$  e  $b^*$  coincidenti ma diretti in senso opposto. Questo effetto è ovviamente dovuto ad una geminazione secondo la faccia (001).

Le dimensioni della cella elementare sono risultate:

$$\begin{aligned} a &= 7,40 \text{ \AA} \\ b &= 3,90 \text{ \AA} \\ c &= 14,72 \text{ \AA} \end{aligned} \qquad \beta = 101^\circ, 36'$$

Il gruppo spaziale è  $C_{2h}^5 - P_{21}/c$ .

(\*) Lavoro eseguito nel Centro di Strutturistica Chimica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Istituto di Chimica Farmaceutica dell'Università di Roma. Istituto di Chimica Generale dell'Università di Bari.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) B. BOBRANSKI e E. SUCHARDA, « Ber. », 60, I, 1081 (1927).

Nella cella elementare sono contenute due molecole e poiché il gruppo spaziale ammette quattro posizioni generali, queste debbono essere centrosimmetriche in accordo con la formula chimica e con la configurazione perfettamente planare prevedibile per questa molecola. I centri debbono inoltre essere situati a  $(000)$  e  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

La lunghezza dell'asse  $b$  della cella elementare lascia infine prevedere che le molecole sono quasi parallele al piano  $(010)$ , e che la loro proiezione su questo piano deve essere completamente risolta.

Considerazioni basate sull'isosteria con la naftalina e l'esame dei dati cristallografici hanno suggerito l'impiego del metodo della trasformata molecolare di Fourier, già applicato con successo in altri casi analoghi nel nostro laboratorio <sup>(2,3,4)</sup>, per la determinazione dell'orientamento delle molecole nella cella elementare e delle costanti di fase dei fattori di struttura  $F(hol)$ .

Le intensità dei riflessi  $(hol)$ , registrate su fotogrammi Weissenberg multipli sono state lette per confronto visuale con una scala campione e corrette per il fattore di Lorenz e di polarizzazione.

A causa del suddetto effetto di geminazione la lettura delle intensità è risultata piuttosto imprecisa per la sovrapposizione di riflessi appartenenti ai due reticoli reciproci compenetrati. In ogni caso riteniamo che l'approssimazione sia sufficientemente buona per la determinazione dell'orientamento molecolare.

L'orientamento e l'inclinazione della trasformata molecolare della naftalina <sup>(5)</sup> rispetto agli assi cristallografici sono stati trovati con l'aiuto del dispositivo descritto da uno di noi <sup>(6)</sup> impiegando una sezione equatoriale  $(010)$  del reticolo reciproco ai cui nodi sono stati riportati i valori dei fattori di struttura sperimentali normalizzati rispetto ad un fattore atomico medio dato da

$$\bar{f} = \frac{4f_C + f_N}{5}.$$

Nella fig. 1 è riportato schematicamente l'orientamento di una molecola rispetto agli assi cristallografici. Il piano molecolare è soltanto leggermente inclinato rispetto al piano  $a-c$  della cella elementare. Gli assi molecolari X e Y formano infatti rispettivamente angoli di circa  $5^\circ$  e  $20^\circ$  con tale piano.

Per interpolazione della trasformata molecolare ai nodi del reticolo reciproco sono stati inoltre ottenuti i segni dei fattori di struttura ed è stato possibile calcolare una prima proiezione Fourier che ha completamente confermato l'orientamento riportato in fig. 1.

(2) F. BERTINOTTI, G. GIACOMELLO e A. M. LIQUORI, « Acta Cryst. », 8, 513 (1955).

(3) F. BERTINOTTI, A. M. LIQUORI e R. PIRISI, « Gazz. Chim. It. », 86, 893 (1956).

(4) G. GIACOMELLO, A. M. LIQUORI e A. RIPAMONTI, « Nature », 177, 944 (1956).

(5) G. KNOTT, « Proc. Phys. Soc. Lond. », 52, 229 (1940).

(6) A. M. LIQUORI, « Acta Cryst. », 9, 535 (1956).



Questi risultati formano il presupposto per una precisa determinazione degli angoli e delle distanze di legame mediante affinamento con il metodo Fourier. Per questo scopo ci ripromettiamo di registrare le intensità dei riflessi a bassa temperatura e di cercare di eliminare o di correggere opportunamente gli effetti dovuti alla geminazione.

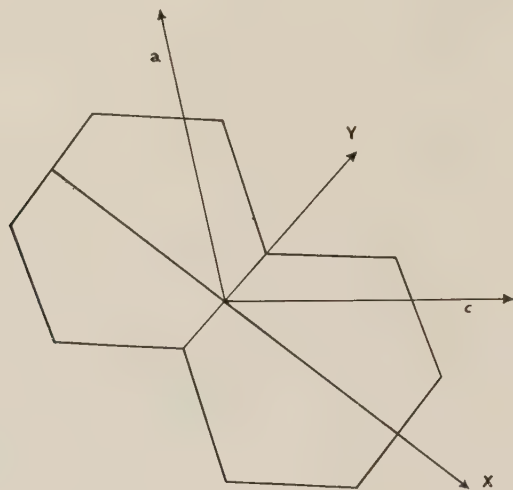


Fig. I.

Gli autori ringraziano la dottoressa Floriana Bertinotti per l'efficace collaborazione e la Fondazione Rockefeller per il contributo concesso ad uno di noi (A.R.).

**Mineralogia.** — *Contributo alla geochimica dell'europio* (\*). Nota di MASSIMO FENOGLIO e di GERMANO RIGAULT, presentata (\*\*) dal Corrisp. M. FENOGLIO.

In un gruppo di nostri lavori [7, 28, 29], recentemente pubblicati, furono riportati i risultati riferentisi ad un complesso di ricerche di natura varia tendenti a completare le conoscenze o ad illustrare, per la prima volta, i giacimenti di scheelite delle Alpi piemontesi, con particolare riguardo ai costituenti minori della scheelite stessa, indagati sia dal punto di vista chimico-spettrografico, sia dal punto di vista cristallografico e geochimico. Fra questi presentarono particolare interesse gli elementi delle terre rare, di cui vennero documentate e spiegate abbondanza e diffusione.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia dell'Università di Torino e Centro di studio per la Mineralogia e la Petrografia delle Alpi Occidentali del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

I risultati dell'analisi quantitativa, per via spettrografica, consentirono di mettere in evidenza il caso singolare dell'europio che, presente in tracce nella scheelite di Traversella ed in quantità leggermente superiore in quella di Challant, raggiunge un tenore veramente eccezionale (0,08 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$ ) nella scheelite della Val Toppa [29], tenore tale da rappresentare oltre il 70 % della quantità totale delle terre rare contenute.

Così elevata percentuale in europio, che rarissimamente fu, sinora, riscontrata, ci ha indotto ad estendere le nostre ricerche spettrografiche non solo alla scheelite di altri giacimenti, ma altresì ad altri minerali che presumibilmente potevano contenere, quale costituente minore, l'elemento in questione. E ciò allo scopo di portare un contributo alla conoscenza relativa all'abbondanza e diffusione dell'europio, che sono forse le meno note fra quelle degli elementi del gruppo delle terre rare.

Come è ben noto, nel 1892 Lecoq de Boisbaudran, dall'esame degli spettri di scintilla e di fluorescenza del samario, congetturò la presenza di due elementi sconosciuti. Qualche anno dopo (1896) Demarçay poté separare dal samario, mediante cristallizzazione frazionata del nitrato doppio di magnesio e samario, una frazione a spettro caratteristico; egli attribuì tale spettro ad un elemento che dapprima indicò con  $\Sigma$  e successivamente (1901) chiamò europio. Egli inoltre dimostrò l'identità con l'europio non solo dei due supposti elementi sconosciuti testé accennati di Lecoq de Boisbaudran, ma altresì del nuovo elemento previsto fin dal 1885 da Crookes mediante l'esame dello spettro di fosforescenza. In seguito Urbain e Lacombe nel 1904 riuscirono, per la prima volta, a preparare un composto puro dell'europio.

Le prime notizie di interesse geochimico sull'abbondanza e diffusione di questo elemento spettano a Urbain e Lacombe [35], i quali determinarono nelle sabbie monazitiche un contenuto di  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  di circa 0,002 %. Successivamente Urbain [34] ne mise in evidenza la presenza nella pechblenda, nello xenotime e nella gadolinite.

Alcuni anni dopo De Rohden [5] rintracciò, mediante la fosforescenza catodica, l'europio nella scheelite di Marmolejo in Spagna. Più tardi Goldschmidt e Thomassen [12] pubblicarono una Memoria che può ben dirsi classica dal punto di vista geochimico, in quanto in essa viene trattato, per la prima volta, il problema dell'abbondanza degli elementi delle terre rare nei vari minerali. Per quanto concerne l'europio, pur avendolo ricercato per mezzo della spettrografia a raggi X nei minerali contenenti elementi delle terre rare (monazite, ortite, apatite, xenotime, ecc.), Goldschmidt e Thomassen non riuscirono però a metterlo in evidenza, in nessun caso, con certezza.

Un paio d'anni dopo Carobbi e collaboratori [1, 2, 3, 4] identificarono qualitativamente per via spettrografica l'europio in alcune piromorfite e in una wulfenite. Carobbi e Restaino [4] ne spiegarono la presenza «mettendola in relazione con un probabile più accentuato isomorfogenismo verso il Pb». A giustificazione di ciò essi ricordarono che Urbain e Bourion avevano «preparato il composto  $\text{EuCl}_2$  in cui l'europio funziona, come il Pb,

da bivalente. Tale composto non si conosce per gli altri elementi del suo gruppo ».

Nel 1929 Marsh [16] riconfermò l'osservazione di Urbain sulla presenza dell'europio nella uraninite.

Successivamente il Goldschmidt [11] in una Memoria sulla geochimica degli elementi riprese, fra l'altro, il problema dell'abbondanza e diffusione dell'europio, a ciò indotto dai risultati ottenuti da Minami [20], relativi alla abbondanza di questo elemento in alcuni scisti argillosi, dove l'europio fu riscontrato nel tenore medio di 0,000123 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$ .

Si presentò allora per il Goldschmidt il quesito di spiegare questa constatata abbondanza, che era in contrasto con le sue precedenti determinazioni negative, in quanto la presunta rarità dell'europio non veniva affatto confermata dai risultati delle analisi delle rocce sedimentarie argillose eseguite da Minami.

Il Goldschmidt spostò allora il campo di ricerca dell'europio verso minerali che non contenevano gli elementi delle terre rare come costituenti maggiori. E precisamente egli [10, 11] riuscì ad identificare l'europio per via spettrografica in alcune piromorfite, titaniti, stroncianiti e in feldspati potassici, determinando valori massimi di 0,1 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  in una piromorfite, di 0,04 % in una titanite e infine di 0,002 % nei feldspati potassici ricchi in stronzio. Goldschmidt [9, 11] spiegò questo arricchimento preferenziale mettendo in relazione il comportamento dell'europio bivalente con quello del piombo e dello stronzio.

In seguito la presenza dell'europio venne messa in evidenza spettrograficamente anche nella fluorite da Wild [37] e da Haberlandt [13]; Merkader [19] confermò poi questa osservazione con metodi analitici basati sulla luminescenza, eseguendo anche determinazioni quantitative.

La presenza dell'europio nei feldspati, già messa in evidenza da Sahama [30] e da Goldschmidt [11], venne confermata da Hoffmann e Matschak [15], nonché da Haberlandt e Köhler [14] mediante studi sulla luminescenza di questi minerali.

Servigne [32, 33] mediante la fotoluminescenza determinò semiquantitativamente l'europio in alcune scheeliti, ma taluni dei dati analitici da lui ottenuti vennero ripresi criticamente da Marsh [17].

Ricorderemo poi alcuni dei lavori più recenti, come, ad esempio, quelli di Sahama [31], che determinò il contenuto dell'europio in graniti e in gneiss granitoidi della Finlandia, rispettivamente nei tenori di 0,00009 % e di 0,00026 %; di Mukherjee [21], che rintracciò, grazie agli spettri di catodoluminescenza, l'europio nella calcite e nella dolomite; di Dixon e Wylie [6], che misero in evidenza l'europio nella davidite di Radium Hill; e di Waring e Mela [36], che stabilirono per via spettrografica in 0,001 % il tenore di  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  in una roccia fosfatica.

Non è infine privo di interesse segnalare la recentissima pubblicazione di Prizibram [27], in cui viene discussa a fondo l'importanza dell'europio quale responsabile, in certi casi, della luminescenza della fluorite.

## PARTE SPERIMENTALE.

La determinazione qualitativa spettrografica dell'europio venne eseguita mediante la ricerca di un certo numero di righe perfettamente conosciute ed opportunamente scelte fra le più sensibili dell'elemento in questione, per avere altrettanto sicure conferme del suo riconoscimento.

Le righe analitiche utilizzate a questo scopo, seguendo Gatterer e Junkes [8], sono quelle riportate nella seguente tabella:

3724,99 Å	4205,05 Å
3819,65 Å	4435,53 Å
3907,11 Å	4594,04 Å
3930,51 Å	4627,24 Å
3971,99 Å	4661,89 Å.
4129,73 Å	

Alcune di queste righe non poterono essere utilizzate a causa della loro scarsa sensibilità, come ad esempio le righe Eu 3819,65, Eu 4129,73 ed Eu 4205,05, cadendo esse entro le bande del cianogeno con testa rispettivamente a 3883,4 Å e a 4216,0 Å; altre, poiché presentavano, nei vari casi in esame, possibili coincidenze con righe di altri elementi. Indubbiamente la riga più sensibile nelle condizioni di eccitazione da noi adottate era Eu 4594,04, come era già stato messo in evidenza in particolar modo da Piccardi [23, 24, 25], il quale aveva stabilito, servendosi di un dispositivo di fiamma, che, in base alle tre righe Eu 4594,04, Eu 4627,24 ed Eu 4661,89, era possibile identificare l'europio sino alla concentrazione di 1 : 100.000.

Noi ricorremmo quindi a queste tre righe, avendo notato, anche nelle condizioni di eccitazione da noi adottate, una sensibilità relativa di riconoscimento assai prossima a quella indicata da Piccardi, specialmente per la riga Eu 4594,04. Nel caso però di quest'ultima riga sorgeva una notevole difficoltà, poiché vi era la possibilità di coincidenza con la riga V 4594,108 Å, coincidenza particolarmente sfavorevole, data la notevole diffusione geochimica presentata dal vanadio.

Nella eventualità della presenza di vanadio, si ricorreva allora per la soluzione del problema ad eventuali righe di controllo, ma indubbiamente operando in questo modo non si poteva più sperare in sensibilità di riconoscimento così buone come negli altri casi.

Comunque, per abbassare ulteriormente il limite di sensibilità del metodo spettrografico nella determinazione qualitativa e quantitativa dell'europio, si ricorse alla tecnica della distillazione frazionata. A tale scopo si utilizzò la bassa volatilità di questo elemento, comune del resto a tutti gli altri elementi del gruppo delle terre rare.



Fu infatti impiegato un preliminare arricchimento dell'europio, approfittando appunto della volatilizzazione selettiva. Secondo il metodo proposto da Piña de Rubies e Doetsch [26], venivano posti nell'elettrodo di carbone - di dimensioni opportune per facilitare la formazione di un residuo di sostanze meno volatili - circa 50 mgr del minerale da analizzare e si procedeva alla volatilizzazione della sostanza fin quasi ad esaurimento. Poi si aggiungeva altra sostanza e si effettuava una successiva volatilizzazione parziale; queste operazioni erano ripetute più volte fino ad ottenere un residuo che rappresentasse la parte meno volatile di circa 500 mgr del minerale da analizzare. Finalmente, dopo aver aumentato l'intensità di corrente nell'arco, si procedeva alla volatilizzazione completa del residuo, riprendendone soltanto in questa ultima parte lo spettro relativo. Con questo procedimento la sensibilità di riconoscimento veniva moltiplicata per un fattore molto notevole.

L'europio fu dosato quantitativamente utilizzando la riga analitica Eu 3907,11, poiché le altre righe sensibili di questo elemento incorrevano, nei casi in esame, in possibili coincidenze. Come standard interno si ricorse al lantanio, che veniva aggiunto in quantità costante dell'1 % circa, sotto forma di  $\text{La}(\text{NO}_3)_3$  di elevata purezza, ai differenti minerali da analizzare ed ai rispettivi « standards » a titolo noto in europio. Questi ultimi venivano preparati aggiungendo ad ogni specie minerale, in cui era stata preventivamente accertata l'assenza d'europio, delle quantità determinate di  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  spettrograficamente puro della Casa Johnson-Matthey.

Le altre miscele a titolo noto erano ottenute da quella all'1 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  per opportune diluizioni, secondo appropriati fattori, con il minerale base.

Righe di confronto La 3949,10 Å e La 3988,52 Å: tale scelta, e dell'elemento e delle righe, era giustificata da vari motivi. E segnatamente dal fatto che: il lantanio non è praticamente presente nei minerali in esame, esso ha inoltre una velocità di volatilizzazione confrontabile con quella dell'europio ed infine le righe Eu 3907,11 e La 3949,10 hanno valori assai prossimi nei potenziali di eccitazione, rispettivamente 3,36 volt e 3,53 volt. Come ulteriore controllo si ricorse alle righe Eu 4594,04, Eu 4627,24 ed Eu 4661,89 la cui elevata sensibilità è già stata poc'anzi messa in evidenza.

Furono oggetto del nostro studio minerali della classe dei tungstati e molibdati: scheelite e wulfenite; minerali del gruppo dell'apatite: piromorfite, mimetite e vanadinite; solfati: baritina e celestina; carbonati: stronzianite; silicati: feldspati potassici.

Quindi le nostre esperienze furono condotte su materiale tratto da ben 74 campioni, appartenenti in genere a giacimenti differenti, e facenti parte delle collezioni del Museo annesso a questo Istituto. Di questi 74 campioni <sup>(1)</sup> solo in 5 fu riscontrata per via spettrografica la presenza dell'europio, di cui venne in un secondo tempo determinato il tenore.

(1) Per la precisione i 74 campioni sono così suddivisi: 20 di scheelite, 14 di wulfenite, 14 di piromorfite, 4 di mimetite, 4 di vanadinite, 3 di baritina, 7 di celestina, 2 di stronzianite e 6 di feldspati potassici.

Nella tabella che segue sono riportate a scopo di confronto le percentuali in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  relative ai vari minerali, da noi sottoposti all'analisi, e alla scheelite della Val Toppa da noi precedentemente studiata [29].

Minerale	Località	$\text{Eu}_2\text{O}_3$ %
Scheelite . . . . .	Val Toppa, Ossola (Italia)	0,08
Scheelite . . . . .	Neudorf, Harz (Germania)	0,04
Scheelite . . . . .	Predazzo (Italia)	0,005
Piromorfite . . . . .	Marienberg, Sassonia (Germania)	0,010
Mimetite . . . . .	Caldbeck Fells, Cumberland (Gran Bretagna)	0,012
Mimetite . . . . .	Caldbeck Fells, Cumberland (Gran Bretagna)	0,008

I risultati dell'analisi spettrografica qualitativa ci autorizzano a ritenere presente l'europio con non eccessiva frequenza nella scheelite, poiché su una ventina di campioni esaminati – appartenenti generalmente a giacimenti di differenti località – detto elemento fu appena rintracciato in tre di essi.

Per quanto riguarda la mimetite, dei quattro campioni analizzati, due, appartenenti allo stesso giacimento, rivelarono la presenza dell'europio.

Nella piromorfite poi l'europio appare assai poco frequentemente, poiché su quattordici campioni esaminati – appartenenti in gran parte a giacimenti differenti – solo in uno fu riscontrato l'europio.

Nei limiti di sensibilità del metodo da noi seguito non fu infine notata la presenza dell'europio nella wulfenite, nella vanadinite, nella baritina, nella celestina, nella stronzianite e nei feldspati potassici (ortoclasio e microclino), nonostante il numero notevole di campioni esaminati.

I risultati negativi per la vanadinite e per i feldspati potassici potrebbero trovare spiegazione nel fatto che il vanadio interferisce nella ricerca dell'europio a causa della coincidenza di molte sue righe con quelle analitiche dell'europio. E il vanadio è evidentemente sempre presente in elevato tenore nella vanadinite ed è talora presente, come costituente minore, nei feldspati potassici.

L'esame dei tenori in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$ , riportati nella tabella, ci dà una idea dei limiti entro i quali può variare il contenuto in europio nei vari minerali da noi presi in esame.

E precisamente tali percentuali raggiungono un massimo di 0,08 % nella scheelite; negli altri minerali del gruppo dell'apatite (piromorfite e mimetite) i tenori determinati sono relativamente assai prossimi, variando essi da 0,008 % a 0,012 %.

## OSSERVAZIONI E CONCLUSIONI.

Dalla schematica rassegna cronologica delle ricerche geochimiche relative all'europio, premessa al nostro lavoro, non che dall'esame dell'elenco bibliografico in calce allo stesso riportato, emerge che dell'europio si parla in un discreto numero di pubblicazioni sia generali che particolari.

Le notizie però in esse riferite da studiosi, che in tempi diversi e con intendimenti e tecniche differenti si occuparono dello studio dell'europio, tranne pochi casi, hanno carattere quanto mai frammentario e non sempre sono concordanti. Chi tentasse di coordinare dette notizie non riuscirebbe facilmente a mettere insieme un complesso di dati geochimici atti a caratterizzare l'abbondanza e diffusione dell'elemento in parola. Ciò serve a spiegare la difficoltà e la lentezza con le quali si acquisirono le scarse cognizioni geochimiche su questo singolare elemento delle terre rare. Infatti, in ogni caso, le indagini relative si presentarono laboriose e sovente con risultati ritardati, non sempre efficacemente confrontabili a causa dei differenti metodi sperimentali seguiti dai vari studiosi.

I risultati delle nostre ricerche contribuiscono pertanto ad incrementare lo scarso patrimonio geochimico relativo all'europio, avendo noi esteso le indagini spettrografiche ad un numero veramente notevole di minerali differenti per natura e genesi, con unicità di metodo. Ed in particolare i dati relativi all'analisi quantitativa permettono di istituire interessanti confronti con quelli ottenuti da altri ricercatori.

Infatti per quanto riguarda il contenuto in europio determinato nei minerali, che furono oggetto delle nostre ricerche spettrografiche recenti [29] ed attuali, è opportuno far rilevare che il tenore 0,08 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$ , riscontrato nella scheelite della Val Toppa, rappresenta, per quanto ci consta, la più elevata percentuale attendibile di europio, sinora nota, per la specie minerale in questione. Vi è di più: il tenore 0,08 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$ , determinato nella scheelite della Val Toppa, è da annoverarsi tra quelli più alti, avvicinandosi esso sensibilmente alla percentuale massima di 0,1 % in  $\text{Eu}_2\text{O}_3$  riscontrata da Goldschmidt [11] nella piromorfite della miniera Friedrichsseggen presso Ems nel Nassau.

In base ai risultati sperimentali sopra esposti e a considerazioni di natura chimico-fisica e cristallografica, ci proponiamo di esaminare la possibilità di trarre delle deduzioni generali che abbiano carattere normativo relativamente all'abbondanza e diffusione dell'europio. Ci prefiggiamo inoltre di spiegare le cause determinanti il comportamento geochimico peculiare dell'europio rispetto agli altri lantanidi.

Gli elementi del gruppo delle terre rare si comportano dal punto di vista geochimico in modo notevolmente simile, in stretta relazione alle loro analoghe proprietà fisiche e chimiche.

Tuttavia sarà bene ricordare che per alcuni di questi elementi sono possibili differenti distribuzioni elettroniche e quindi ioni con altre valenze oltre a quella ordinaria + 3.

È questo il caso dell'europio che in ambiente riducente passa allo stato bivalente in relazione al valore del potenziale normale di ossido-riduzione  $\text{Eu}^{2+}/\text{Eu}^{3+}$  che a  $25^\circ\text{C}$  è uguale a  $-0,43$  volt [18], rispetto all'elettrodo ad idrogeno.

Per meglio chiarire il comportamento dell'europio in confronto a quello degli altri elementi delle terre rare, riteniamo di grande interesse geochimico riportare nella tabella che segue i potenziali di riduzione degli ioni trivalenti a bivalenti dei vari lantanidi. Questi valori, riferiti all'elettrodo a calomelano, sono stati determinati per via polarografica da Noddack e Brukl [22].

La . . .	$-1,935$	Tb . . .	$-1,830$
Ce . . .	$-1,905$	Dy . . .	$-1,800$
Pr . . .	$-1,875$	Ho . . .	$-1,790$
Nd . . .	$-1,870$	Er . . .	$-1,770$
Sm . . .	$-1,720$	Tu . . .	$-1,770$
Eu . . .	$-0,710$	Yb . . .	$-1,430$
Gd . . .	$-1,810$	Lu . . .	$-1,755$

Uno sguardo ai dati della tabella è più che sufficiente per rilevare immediatamente che il potenziale di riduzione  $-0,710$  volt dello ione  $\text{Eu}^{3+}$  è di gran lunga inferiore a quello degli ioni trivalenti degli altri lantanidi, che presentano invece valori assai prossimi fra di loro, varianti da  $-1,935$  volt a  $-1,430$  volt.

Da quanto precede emerge chiara la possibilità per l'europio di presentarsi in ambiente riducente allo stato di ione bivalente, mentre ciò per gli altri elementi delle terre rare si verifica con maggiore difficoltà.

Ma, avendo l'europio bivalente un raggio ionico troppo grande ( $1,24 \text{ \AA}$ ) per poter entrare come sostituyente isomorfogeno in reticoli cristallini formati durante le prime fasi della cristallizzazione magmatica, l'elemento si concentrerà nelle soluzioni residue. Esso quindi si concentrerà preferenzialmente in quei minerali di ultima formazione in cui sia possibile, dal punto di vista dell'energia reticolare, l'entrata di uno ione di tali dimensioni. Ora, poiché il raggio ionico dell' $\text{Eu}^{2+}$  ha un valore notevolmente prossimo a quelli dello  $\text{Sr}^{2+}$  ( $1,27 \text{ \AA}$ ) e del  $\text{Pb}^{2+}$  ( $1,32 \text{ \AA}$ ), è logico aspettarsi che durante le ultime fasi della cristallizzazione magmatica l'europio segua lo stronzio e il piombo, differenziandosi così dagli altri elementi delle terre rare i quali, essendo in stato di ossidazione superiore, hanno raggi ionici inferiori e quindi diverso comportamento. Riteniamo però che l'entrata dello ione  $\text{Eu}^{2+}$ , in quei minerali che sono teoricamente in grado di riceverlo, sia controllata da un fattore notevolmente limitante: dall'esistenza cioè di un ambiente con potere riducente tale da consentire la presenza di questo ione.

Soltanto quando l'europio viene a trovarsi in ambienti nei quali prevalgono condizioni riferibili ad un potenziale di ossidazione discretamente elevato, esso passa allo stato trivalente ed il suo comportamento geochimico diviene molto analogo a quello degli altri lantanidi. È quanto si verifica du-



rante i processi esogeni di demolizione delle rocce, di trasporto e di successiva sedimentazione. In questi casi l'europio seguirà la sorte degli altri elementi del gruppo delle terre rare, andandosi a concentrare insieme ad essi nei sedimenti argillosi: viene così ad essere spiegata l'osservazione di Minami [20] relativa all'abbondanza dell'europio in queste formazioni sedimentarie.

Risultano altresì giustificate le anomalie osservate nella distribuzione geochemica di questo elemento, e precisamente la quasi totale mancanza di esso nei minerali contenenti elementi delle terre rare, nonché la ritenuta contraddittoria presenza nelle argille, negli aeroliti e nelle atmosfere stellari, dove l'europio è invece presente con un'abbondanza quasi eguale a quella del terbio, elemento a numero atomico dispari successivo.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] CAROBBI G., *Ricerche chimiche e spettrografiche sulla piromorfite di Leadhills, Lanarkshire (Scozia) e sulla mimetosite di Santa Eulalia, Chihuahua*, « Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli », ser. III, 32, 54 (1926).
- [2] CAROBBI G., *Ricerche chimiche e spettrografiche sulla crocoite di Tasmania e sulla wulfenite di Bleiberg*, « Ann. Chim. Appl. », 18, 485 (1928).
- [3] CAROBBI G. e ALFANI M., *Ricerche sui costituenti minori della piromorfite giallo-verde di Gennammari (Sardegna)*, « Periodico di Mineralogia », 2, 275 (1931).
- [4] CAROBBI G. e RESTAINO S., *Ricerche chimiche e spettroscopiche sulla piromorfite di Braubach (Nassau)*, « Rend. R. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli », ser. III, 32, 17 (1926).
- [5] DE ROHDEN Ch., *Sur la présence constante des terres rares dans les scheelites, révélées par la phosphorescence cathodique*, « Comptes Rendus », 159, 318 (1914).
- [6] DIXON P. e WYLIE A. W., *An unusual Distribution of the Lanthanons*, « Nature », 167, 526 (1951).
- [7] FENOGLIO M. e RIGAUULT G., *Ricerche spettrografiche sulla scheelite di Traversella*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 18, 260 (1955).
- [8] GATTERER A. e JUNKES J., *Atlas der Restlinien*, vol. II, Specola Vaticana, Città del Vaticano, 1945.
- [9] GOLDSCHMIDT V. M., *Probleme und Methoden der Geochemie*, « Gerland's Beitr. Geophys. », 15, 38 (1926).
- [10] GOLDSCHMIDT V. M., *The Principles of Distribution of chemical Elements in Minerals and Rocks*, « Journ. Chem. Soc. », 655 (1937).
- [11] GOLDSCHMIDT V. M., *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente. - IX. Die Mengenverhältnisse der Elemente und der Atom-Arten*, « Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo », I. Mat.-Naturv. Kl. n. 4, 1937.
- [12] GOLDSCHMIDT V. M. e THOMASSEN L., *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente. - III. Röntgenspektrographische Untersuchungen über die Verteilung der seltenen Erdmetalle in Mineralen*, « Skr. Vidensk. I Kristiania », I. Mat.-Naturv. Kl. n. 5, 1924.
- [13] HABERLANDT H., *Spektralanalytische Untersuchungen und Lumineszenzbeobachtungen an Fluoriten und Apatiten*, « Sitz. Akad. Wiss. Wien », II A, 147, 137 (1938).
- [14] HABERLANDT H. e KÖHLER A., *Lumineszenzuntersuchungen an Feldspäten und anderen Mineralien mit Seltenen Erden*, « Chemie der Erde », 13, 363 (1940/41).
- [15] HOFFMANN J. e MATSCHAK G., *Über europiumführende Mineralien in granitischen Gesteinen des westlichen Sudetengaus*, « Zentr. für Min., Geol. und Pal. », Abt. A, 78 (1940).
- [16] MARSH J. K., *The Rare Earths associated with Uraninites*, « Phil. Mag. », ser. VII, 7, 1005 (1929).

- [17] MARSH J. K., *Rare Earths in Scheelite*, « Journ. Chem. Soc. », 577 (1943).
- [18] MCCOY H. N., *Contribution to the Chemistry of Europium*, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 58, 1577 (1936).
- [19] MERKADER S., *Quantitative Bestimmung von Europium und Samarium in Fluoriten*, « Sitz. Akad. Wiss. Wien », II A, 149, 349 (1940).
- [20] MINAMI E., *Gehalte an seltenen Erden in europäischen und japanischen Tonschiefern*, « Nachr. Ges. Wiss. Göttingen », Math.-Physik. Kl., IV, 1, 155 (1935).
- [21] MUKHERJEE B., *Cathodo-luminescence spectra of indian calcites, limestones, dolomites and aragonites*, « Indian Journal of Physics », 22, 305 (1948).
- [22] NODDACK W. e BRUKLA., *Die Reduktionspotentiale der dreiwertigen Erden*, « Angewandte Chemie », 50, 362 (1937).
- [23] PICCARDI G., *Sulla ricerca dell'Europio e sopra tre righe di estrema sensibilità*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VI, 17, 1092 (1933).
- [24] PICCARDI G., *Sullo spettro di fiamma dell'europio e sopra la persistenza di tre righe di bassa eccitazione*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VI, 25, 730 (1937).
- [25] PICCARDI G., *Il metodo degli spettri molecolari ed il frazionamento delle terre rare*, « Spettrochimica Acta », 1, 249 (1939).
- [26] PIÑA DE RUBIES S. e DOETSCH J., *Pyroelektrische Konzentration zur Spektralbestimmung von Y, La und anderen seltenen Erden in Bleimineralien*, « Zeitschr. für anorg. allgem. Chem. », 220, 199 (1934).
- [27] PRZIBRAM K., *Irradiation Colours and Luminescence*, London, 1956.
- [28] RIGAULT G., *Notizie preliminari chimico-spettrografiche sulla scheelite di Challant Saint Victor e della Val Toppa*, « Rend. Soc. Min. Ital. », 12, 189 (1956).
- [29] RIGAULT G., *Ricerche sulla scheelite dei giacimenti delle Alpi piemontesi*, « Atti Acc. Sc. di Torino », 90, 647 (1956).
- [30] SAHAMA TH. G., *Akzessorische Elemente in den Granuliten von Finnisch-Lappland*, « C. R. Soc. Géol. Finlande », 9, 267 (1936).
- [31] SAHAMA TH. G., *Spurenelemente der Gesteine im südlichen Finnisch-Lappland*, « Bull. Comm. Géol. Finlande », 135 (1945).
- [32] SERVIGNE M., *La photo-luminescence des scheelites*, « Bull. Soc. Franc. Min. », 62, 262 (1939).
- [33] SERVIGNEM., *Sur la photoluminescence des scheelites*, « Comptes Rendus », 210, 440 (1940).
- [34] URBAIN G., *Recherches sur les terres rares*, « Journ. Chim. Phys. », 4, 232 (1906).
- [35] URBAIN G. e LACOMBE H., *Sur l'europium*, « Comptes Rendus », 138, 627 (1904).
- [36] WARING C. L. e MELA H., *Method for Determination of Small Amounts of Rare Earths and Thorium in Phosphate Rocks*, « Analytical Chemistry », 25, 432 (1953).
- [37] WILD G., *Spektralanalytische Untersuchungen von Fluoriten*, « Sitz. Akad. Wiss. Wien », II A, 146, 479 (1937).

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali*<sup>(\*)</sup>. Nota II di ALDO GHIZZETTI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio M. PICONE.

Si prosegue lo studio del problema considerato nella Nota I e precisamente si studiano i casi II, III', III'' di cui al n. 1 di tale Nota.

5. Studiamo il caso II del n. 1, partendo dalla (3,8) ove, ammesso che dei due sistemi di caratteristiche sia doppio quello delle  $x = \text{cost.}$ , dobbiamo supporre  $B = 0$ ,  $C \neq 0$  vale a dire

$$(5, 1) \quad \mathcal{E}(u) = \frac{\partial}{\partial x}(Cu_{yy} + Lu_x + Mu_y + Pu) + \frac{\partial}{\partial y}(Cu_{xy} + Mu_x + Nu_y + Qu).$$

Dobbiamo ancora imporre che siano soddisfatte la seconda e la terza delle (2,11) lungo ogni retta  $x = \text{cost.}$  e lungo ogni retta  $y = \text{cost.}$

Applicando le (2,4), (2,5) (con  $A = B = D = 0$ ) si trova

$$E = Cy'(y'^2 - x'^2), \quad F = Cx'(3y'^2 - x'^2).$$

Lungo una  $x = \text{cost.}$  si ha  $x' = 0$ ,  $y' = \varepsilon$  e quindi  $E = \varepsilon C$ ,  $F = 0$ , mentre dalle (2,7), (2,8), (2,9) si ricava  $H = M$ ,  $K = -L$ ,  $I = \varepsilon P$ . Perciò tenuto anche conto che  $\gamma = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial y}$ , la seconda e la terza delle (2,11) diventano  $L = 0$ ,  $\varepsilon C_{yy} - \varepsilon M_y + \varepsilon P = 0$ , ossia

$$(5, 2) \quad L = 0, \quad P = -C_{yy} + M_y.$$

Lungo una  $y = \text{cost.}$  si ha  $y' = 0$ ,  $x' = \varepsilon$  e quindi  $E = 0$ ,  $F = -\varepsilon C$ , mentre  $H = -M$ ,  $K = -N$ ,  $I = -\varepsilon Q$ . Perciò, dato che  $\gamma = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}$ , la seconda e la terza delle (2,11) diventano  $-C_x + N = 0$ ,  $\varepsilon M_x - \varepsilon Q = 0$ , ossia

$$(5, 3) \quad N = C_x, \quad Q = M_x.$$

Le (5,2), (5,3) devono sussistere identicamente nel campo  $\Gamma$  e perciò, sostituendo in (5,1), si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u) &= \frac{\partial}{\partial x}(Cu_{yy} + Mu_y - C_{yy}u + M_y u) + \frac{\partial}{\partial y}(Cu_{xy} + Mu_x + C_x u_y + M_x u) = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\beta u_y + \gamma u), \quad (\beta = 2C, \gamma = 2M - C_y). \end{aligned}$$

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

Resta così dimostrata la seconda parte del teorema II del n. 1 nel caso  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  [vedi la (1,3)]. Vale un'osservazione analoga a quella fatta alla fine del n. 4.

6. Studiamo il caso III' del n. 1, partendo dalla (3,8) con  $B \neq 0, C \neq 0$ . Abbiamo allora tre sistemi distinti di caratteristiche reali e fra essi dobbiamo prefissarne due; supporremo che si tratti dei due sistemi  $x = \text{cost.}$ ,  $y = \text{cost.}$ . Dobbiamo pertanto imporre che siano soddisfatte la seconda e la terza delle (2,11) lungo ogni retta  $x = \text{cost.}$  e lungo ogni retta  $y = \text{cost.}$  Il calcolo è analogo a quello fatto nel numero precedente e perciò ci limiteremo ad accennarlo. Si trova dapprima

$$(6,1) \quad E = (y'^2 - x'^2)(Cy' + Bx') \quad , \quad F = -By'(y'^2 - 3x'^2) + Cx'(3y'^2 - x'^2)$$

e successivamente, scrivendo che le citate (2,11) sono verificate lungo una  $x = \text{cost.}$  e lungo una  $y = \text{cost.}$ , si ottengono rispettivamente le

$$(6,2) \quad \begin{cases} L = B_y & , & P = -C_{yy} + M_y \\ N = C_x & , & Q = -B_{xx} + M_x \end{cases}$$

Queste ultime relazioni devono essere delle identità in  $\Gamma$  e perciò sostituendo in (3,8) si conclude che

$$(6,3) \quad \mathcal{E}(u) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u) \quad , \quad (\alpha = 2B, \beta = 2C, \gamma = 2M - B_x - C_y).$$

Con ciò è provata la seconda parte del teorema II del n. 1 nel caso  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  [vedi la (1,3)], valendo poi l'osservazione analoga a quella fatta alla fine del n. 4.

7. Studiamo infine il caso III'' del n. 1, partendo ancora dalla (3,8) con  $B \neq 0, C \neq 0$ . Dobbiamo ora imporre che la seconda e la terza delle (2,11) siano soddisfatte, non solo lungo ogni retta  $x = \text{cost.}$  e lungo ogni retta  $y = \text{cost.}$ , ma anche lungo ogni caratteristica del 3° sistema, che è definito dall'equazione differenziale  $Bdy - Cdx = 0$ .

È ovvio intanto che le prime due imposizioni portano alle conclusioni del precedente n. 6, dimodoché possiamo ritenere senz'altro valide le (6,1) (6,2) e (6,3). Rimangono da trovare le ulteriori condizioni provenienti dal 3° sistema di caratteristiche. Lungo le curve di tale sistema si ha

$$x' = \frac{B}{\varepsilon \Delta} \quad , \quad y' = \frac{C}{\varepsilon \Delta} \quad , \quad \text{con} \quad \Delta = \sqrt{B^2 + C^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{B}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial y} \quad ,$$

$$x'' = \frac{B}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{B}{\varepsilon \Delta} \right) + \frac{C}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{B}{\varepsilon \Delta} \right) = \frac{C}{\Delta^4} [C(BB_x + CB_y) - B(BC_x + CC_y)] \quad ,$$

$$\gamma = -\frac{x''}{y'} = -\frac{C(BB_x + CB_y) - B(BC_x + CC_y)}{\varepsilon \Delta^3} \quad ,$$



onde dalle (6,1) si trae

$$E = \frac{C^2 - B^2}{\Delta^2} \left( \frac{C^2}{\varepsilon \Delta} + \frac{B^2}{\varepsilon \Delta} \right) = \frac{C^2 - B^2}{\varepsilon \Delta},$$

$$F = -\frac{BC}{\varepsilon \Delta} \left( \frac{C^2}{\Delta^2} - 3 \frac{B^2}{\Delta^2} \right) + \frac{BC}{\varepsilon \Delta} \left( 3 \frac{C^2}{\Delta^2} - \frac{E^2}{\Delta^2} \right) = \frac{2 BC}{\varepsilon \Delta},$$

e successivamente

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \left( \frac{B}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{C^2 - B^2}{\varepsilon \Delta} = -\frac{B(B^2 + 3C^2)(BB_x + CB_y) - C(3B^2 + C^2)(BC_x + CC_y)}{\Delta^4},$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \left( \frac{B}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{2 BC}{\varepsilon \Delta} = 2 \frac{C^3(BB_x + CB_y) + B^3(BC_x + CC_y)}{\Delta^4}.$$

Dalle (2,7), (2,8), (2,9), tenendo conto delle (6,2), si ricava poi

$$H = M \frac{C^2}{\Delta^2} + (B_y - C_x) \frac{BC}{\Delta^2} - M \frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{(C^2 - B^2)M + BC(B_y - C_x)}{\Delta^2},$$

$$K = -B_y \frac{C^2}{\Delta^2} + 2M \frac{BC}{\Delta^2} - C_x \frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{2BCM - C^2 B_y - B^2 C_x}{\Delta^2},$$

$$I = (-C_{yy} + M_y) \frac{C}{\varepsilon \Delta} - (-B_{xx} + M_x) \frac{B}{\varepsilon \Delta} = \frac{-BM_x + CM_y + BB_{xx} - CC_{yy}}{\varepsilon \Delta}.$$

In base a queste formule, la prima delle (2,11) diventa

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \gamma E - K = \frac{BC(B_x + C_y) + 2C^2 B_y + 2B^2 C_x - 2BCM}{\Delta^2} = 0,$$

onde deve essere (lungo ogni caratteristica del 3° sistema e perciò) identicamente in  $\Gamma$ :

$$(7, 1) \quad M = \frac{1}{2}(B_x + C_y) + \frac{B}{C}C_x + \frac{C}{B}B_y = \frac{1}{2}(B_x + C_y) + B(\log C)_x + C(\log B)_y.$$

Per imporre la seconda delle (2,11), cominciamo coll'osservare che risulta

$$\frac{\partial E}{\partial s} - \gamma F - H = -\frac{B(BB_x + 2CB_y) - C(2BC_x + CC_y) - (B^2 - C^2)M}{\Delta^2},$$

da cui, sostituendo a  $M$  la sua espressione fornita da (7,1):

$$\frac{\partial E}{\partial s} - \gamma F - H = -\frac{1}{2}(B_x - C_y) + \frac{B}{C}C_x -$$

$$- \frac{C}{B}B_y = -\frac{1}{2}(B_x - C_y) + B(\log C)_x - C(\log B)_y;$$

d'altra parte, sempre per la (7,1), l'espressione di  $I$  data poco sopra viene modificata come segue

$$I = \frac{1}{\varepsilon \Delta} \left[ \frac{1}{2} BB_{xx} - \frac{1}{2} (BC_{xy} + \frac{1}{2} CB_{xy} - \frac{1}{2} CC_{yy} - (BB_x - CB_y)(\log C)_x - \right.$$

$$\left. - (BC_x - CC_y)(\log B)_y - B^2(\log C)_{xx} - BC(\log B)_{xy} + BC(\log C)_{xy} + C^2(\log B)_{yy} \right].$$

Dopo ciò è facile verificare che la seconda delle (2,11) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial E}{\partial s} - \gamma F - H \right) + I &= \left( \frac{B}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C}{\varepsilon \Delta} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial E}{\partial s} - \gamma F - H \right) + I = \\ &= \frac{2 BC}{\varepsilon \Delta} \left( \log \frac{C}{B} \right)_{xy} = 0. \end{aligned}$$

Lungo ogni caratteristica del 3° sistema, e quindi identicamente, deve essere  $\left( \log \frac{C}{B} \right)_{xy} = 0$ , cosicché  $C/B$  è il prodotto di una funzione della sola  $x$  per una funzione della sola  $y$ . Si può dunque porre

$$B = \frac{1}{2} X(x) \varphi(x, y) \quad , \quad C = \frac{1}{2} Y(y) \varphi(x, y), \quad (X, Y, \varphi \neq 0) \quad (4)$$

onde per la (7,1) risulta

$$2M - B_x - C_y = X(x) \varphi_x + Y(y) \varphi_y,$$

e sostituendo nella (6,3)

$$(7,2) \quad \mathfrak{E}(u) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [X(x) (\varphi u)_x + Y(y) (\varphi u)_y].$$

Eseguendo il cambiamento di variabili  $\xi = \int_{x_0}^x \frac{dx}{X(x)}$ ,  $\eta = - \int_{y_0}^y \frac{dy}{Y(y)}$ ,

l'espressione (7,2) si trasforma nella  $-\frac{1}{XY} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} [(\varphi u)_\xi - (\varphi u)_\eta]$ , dalla quale, moltiplicando per il modulo del jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = -XY$  (cfr. teorema I del n. 3) e ponendo  $\theta = -\varphi \cdot \operatorname{sgn}(XY)$ , si ottiene finalmente l'espressione

$$(7,3) \quad \frac{\partial^3(\theta u)}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{\partial^3(\theta u)}{\partial \xi \partial \eta^2}.$$

È così dimostrata anche la terza parte del teorema II del n. 1 [vedi la (1,4)]. È da notare che le caratteristiche relative a (7,3) sono le rette  $\xi = \text{cost.}$ ,  $\eta = \text{cost.}$ ,  $\xi + \eta = \text{cost.}$  e noi abbiamo scritto la (1,4) assumendo come dominio d'integrazione un triangolo limitato da tali rette; è però ovvio che una formula analoga vale per ogni poligono limitato da rette dei tre sistemi indicati.

Si osservi infine che questi tre sistemi di rette formano un *tessuto esagonale* <sup>(5)</sup>; la stessa proprietà continuerà a sussistere per i tre sistemi di caratteristiche relativi ad ogni espressione dedotta da (7,3) per mezzo di un omeomorfismo.

(4) Oppure  $B = \frac{1}{2} Y(y) \varphi$ ,  $C = \frac{1}{2} X(x) \varphi$ , ma queste posizioni si riducono alle precedenti scrivendo  $B = \frac{1}{2} \frac{1}{X(x)} \cdot (XY\varphi)$ ,  $C = \frac{1}{2} \frac{1}{Y(y)} \cdot (XY\varphi)$ .

(5) Vedi W. BLASCHKE und G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer Verlag-Berlin 1938, p. 17, Satz I.

**Analisi matematica.** — *Un principio di esistenza nell'analisi lineare e sua applicazione alla dualità di alcune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali.* Nota di SANDRO FAEDO, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

I. G. Fichera <sup>(1)</sup> ha dato recentemente un principio generale di esistenza nell'Analisi lineare, mediante il quale egli ha potuto trattare in modo unitario numerosi problemi esistenziali <sup>(2)</sup>.

Siano  $V$  un insieme astratto, lineare rispetto al corpo reale [complesso] e  $\mathfrak{B}_1$  e  $\mathfrak{B}_2$  due spazi di Banach reali [complessi]. Siano definite in  $V$  due trasformazioni lineari  $M_1(v)$  e  $M_2(v)$ , aventi codominio rispettivamente in  $\mathfrak{B}_1$  e in  $\mathfrak{B}_2$ . Sia assegnato un funzionale lineare e continuo  $\Phi(w_1)$ , definito in  $\mathfrak{B}_1$ , e si consideri l'equazione

$$(1) \quad \Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)],$$

nell'incognita  $\Psi(w_2)$ , essendo  $\Psi(w_2)$  un funzionale lineare e continuo definito in  $\mathfrak{B}_2$ .

Il principio esistenziale di Fichera si può così enunciare:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché esista la soluzione dell'equazione (1), dato comunque  $\Phi$ , è che esista una costante  $K$ , tale che sia per ogni  $v \in V$ .*

$$(2) \quad \|M_1(v)\| \leq K \|M_2(v)\|.$$

*Soddisfatta la (2), esiste una soluzione  $\Psi$  della (1) verificante la disuguaglianza  $\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|$  e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale al codominio  $M_2(V)$  di  $M_2(v)$ .*

2. Indichiamo con  $\omega_i$  l'origine dello spazio di Banach  $\mathfrak{B}_i$  e con  $V_i$  la varietà lineare delle autosoluzioni dell'equazione  $M_i(v) = \omega_i$  ( $i = 1, 2$ ). La varietà  $V_i$  può essere eventualmente vuota.

Se è soddisfatta la (2) è ovviamente  $V_2 \subset V_1$ .

Se non è  $V_2 \subset V_1$ , esiste un'autosoluzione di  $M_2(v) = \omega_2$  che non verifica la (2), comunque grande si prenda  $K$ ; in tal caso esistono funzionali

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) «Atti del Convegno internazionale sulle equazioni alle derivate parziali», Trieste, agosto 1954, Ediz. Cremonese, Roma 1955, pp. 174-227. «Atti del V Congresso dell'U.M.I.», Roma, Cremonese, pp. 279-280 (1956).

(2) Oltre al lavoro citato in <sup>(1)</sup> si veda G. FICHERA, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine*, «Memorie dell'Accad. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. V, fasc. I, 1956; G. FICHERA, *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche*, «Rend. Seminario Mat. Univ. e Pol. di Torino», vol. 15, pp. 27-47 (1956).

lineari continui  $\Phi(w_1)$ , definiti in  $\mathfrak{B}_1$  per cui la (1) non possiede soluzione. È immediato che

*Se non è  $V_2 \subset V_1$ , condizione necessaria perché la (1) sia risolubile è che l'assegnato funzionale  $\Phi(w_1)$  sia ortogonale a  $M_1(V_2)$ ; ogni soluzione  $\Psi(w_2)$  della (1) è allora ortogonale a  $M_2(V_1)$ .*

Qualora non sia  $V_2 \subset V_1$  si ha il teorema:

*Condizione necessaria e sufficiente affinché esista la soluzione  $\Psi$  dell'equazione (1), per ogni  $\Phi$  ortogonale a  $M_1(V_2)$  è che esista una costante  $K$ , tale che sia per ogni  $v \in V$*

$$(3) \quad \text{estr. inf.}_{v_2 \in V_2} \|M_1(v + v_2)\| \leq K \|M_2(v)\|.$$

*Soddisfatta questa condizione, esiste una soluzione  $\Psi$  della (1), ortogonale a  $M_2(V_1)$  e verificante la disuguaglianza  $\|\Psi\| \leq K \|\Phi\|$  e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale a  $M_2(V)$  (3).*

3. Sia  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) un insieme appartenente a uno spazio ambiente  $S_k$  nel quale sia stata definita una misura non negativa  $\mu_k$  per cui  $E_k$  risulti  $\mu_k$ -misurabile.

Con  $\mathcal{L}^{(p)}(E_k)$  ( $p \geq 1$ ) si indicherà lo spazio di Banach delle funzioni reali aventi modulo di potenza  $p$ -esima che sia  $\mu_k$ -sommabile in  $E_k$ . Al solito con  $\mathcal{L}^{(\infty)}(E_k)$  si indica lo spazio delle funzioni pseudo-limitate in  $E_k$ .

Siano  $V$  un insieme astratto, lineare rispetto al corpo reale, ed  $M_k(v)$  e  $L_k(v)$  due trasformazioni lineari definite in  $V$  e i cui codomini  $M_k(V)$  e  $L_k(V)$  appartengano rispettivamente a  $\mathcal{L}^{(q_k)}(E_k)$  e  $\mathcal{L}^{(p_k)}(E_k)$  ( $1 \leq q_k \leq \infty$ ,  $1 \leq p_k \leq \infty$ ).

Sia inoltre  $U$  un secondo insieme astratto lineare rispetto al corpo reale. Le due trasformazioni lineari  $M_k^*(u)$  e  $L_k^*(u)$  siano definite in  $U$  ed abbiano codomini  $M_k^*(U)$  ed  $L_k^*(U)$  contenuti in  $\mathcal{L}^{(p_k^*)}(E_k)$  ed  $\mathcal{L}^{(q_k^*)}(E_k)$ , dove  $p_k^*$  e  $q_k^*$  sono rispettivamente i complementari di  $p_k$  e  $q_k$  (4).

Supponiamo che per ogni  $v \in V$  ed  $u \in U$  si abbia

$$(4) \quad \sum_{k=1}^n \int_{E_k} [M_k(v) L_k^*(u) - M_k^*(u) L_k(v)] d\mu_k = 0.$$

Indichiamo con  $\mathfrak{B}_1$  lo spazio di Banach che ha per elementi i vettori  $w_1 \equiv (u_1, u_2, \dots, u_n)$  di componenti  $u_k \in \mathcal{L}^{(q_k^*)}(E_k)$  e con  $\mathfrak{B}_2$  lo spazio di Banach che ha per elementi i vettori  $w_2 = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  con  $s_k \in \mathcal{L}^{(p_k)}(E_k)$ .

(3) Per la dimostrazione di tale teorema, insieme con alcune sue applicazioni alla teoria delle equazioni a derivate parziali, si veda S. FAEDO, *Su un principio di esistenza nell'Analisi Lineare*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. III, vol. XI, 1957.

(4)  $p$  e  $q$  sono complementari se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , con la convenzione  $p = \infty$  se  $q = 1$  e viceversa.



Analogamente indichiamo con  $\mathfrak{B}_1^*$  e  $\mathfrak{B}_2^*$  gli spazi di Banach dei vettori le cui componenti appartengono rispettivamente a  $\mathfrak{L}^{(p_k^*)}(\mathfrak{E}_k)$  ed  $\mathfrak{L}^{(q_k^*)}(\mathfrak{E}_k)$ . Ovviamente  $\mathfrak{B}_2^* [\mathfrak{B}_1^*]$  è lo spazio duale di  $\mathfrak{B}_1 [\mathfrak{B}_2]$ .

Lo spazio  $\mathfrak{B}_1$  è così normalizzato

$$\|w_1\| = \left( \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \right)^{1/2}$$

e analogamente  $\mathfrak{B}_2$ ,  $\mathfrak{B}_1^*$  e  $\mathfrak{B}_2^*$ .

Indichiamo con  $M(v)$  la trasformazione lineare la quale fa corrispondere all'elemento  $v$  di  $V$  il vettore  $w_1$  di  $\mathfrak{B}_1$  con componenti  $M_k(v)$  e con  $L(v)$  quella trasformazione lineare che fa corrispondere a  $v \in V$  il vettore  $w_2$  di  $\mathfrak{B}_2$  di componenti  $L_k(v)$ .

Analogamente sia  $M^*(u) [L^*(u)]$  la trasformazione lineare che fa corrispondere all'elemento  $u \in U$  l'elemento  $w_1^* [w_2^*]$  di  $\mathfrak{B}_1^* [\mathfrak{B}_2^*]$  di componenti  $M_k^*(u) [L_k^*(u)]$ .

G. Fichera <sup>(5)</sup> ha dimostrato il seguente principio di dualità per le formule di maggiorazione:

*Se il codominio  $L(V)$  della trasformazione  $L(v)$  è un insieme completo nello spazio  $\mathfrak{B}_2$  e se sussiste la formula di maggiorazione*

$$(5) \quad \|M(v)\| \leq K \|L(v)\|$$

*per ogni  $v \in V$ , allora per ogni  $u \in U$  sussiste la formula di maggiorazione duale*

$$(5') \quad \|M^*(u)\| \leq K \|L^*(u)\|.$$

4. Supponiamo che sussistano ancora la (4) e la (5) ma che  $L(V)$  possa non essere completo in  $\mathfrak{B}_2$ . Dalla (5), per il principio di esistenza di Fichera, segue che, comunque si assuma un funzionale lineare continuo  $\Phi(w_1)$ , definito in  $\mathfrak{B}_1$ , esiste un funzionale lineare continuo  $\Psi^*(w_2)$ , definito in  $\mathfrak{B}_2$ , per cui è per ogni  $v \in V$

$$(6) \quad \Phi(M(v)) = \Psi^*(L(v))$$

ed è

$$(7) \quad \|\Psi^*\| \leq K \|\Phi\|.$$

Inoltre ogni soluzione della (6) è del tipo  $\Psi + \Psi_0$ , dove  $\Psi_0(w_2)$  è un funzionale lineare continuo definito in  $B$  e ortogonale a  $L(V)$ .

La (4) esprime che  $M^*(u)$  è una soluzione della (6) in cui si sia posto  $\Phi(w_1) = L^*(u)$ ; perciò è

$$\Psi = M^*(u) + \Psi_0,$$

(5) G. FICHERA, *Su un principio di dualità per talune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XIX, pp. 411-418 (1955).

dove  $\Psi_0$  è un elemento della varietà  $W$  degli elementi di  $\mathfrak{B}_1^*$  che sono ortogonali a  $L(V)$ . Ne segue dalla (7) che è

$$(5'') \quad \text{estr. inf.}_{\Psi_0 \in W} \|M^*(u) + \Psi_0\| \leq K \|L^*(u)\|.$$

Se  $L(V)$  è completo in  $\mathfrak{B}_2$   $W$  è vuota e si riottiene la (5').

Ne segue immediatamente che

*Se per ogni  $v \in V$  sussiste la formula di maggiorazione (5) e se  $M^*(U)$  contiene la varietà dei funzionali lineari continui ortogonali a  $L(V)$ , sussiste per ogni  $u \in U$  la formula di maggiorazione duale*

$$(5''') \quad \text{estr. inf.}_{u_1 \in U_1} \|M^*(u + u_1)\| \leq K \|L^*(u)\|,$$

dove  $U_1$  è la varietà degli elementi  $u_1$  di  $U$  per cui  $M^*(u_1)$  è ortogonale a  $L(V)$ .

5. Indichiamo con  $V_1 \subset V$  l'insieme delle autosoluzioni di  $L(v) = \omega_2$ ,  $\omega_2$  essendo lo zero di  $\mathfrak{B}_2$ . Supponiamo che continui a valere la (4) e in luogo della (5) sia verificata, per ogni  $v \in V$ , la disuguaglianza

$$(8) \quad \text{estr. inf.}_{v_1 \in V_1} \|M(v + v_1)\| \leq K \|L(v)\|.$$

Dal teorema enunciato nel n. 2 segue che, comunque si assegni un funzionale lineare e continuo  $\Phi(w_1)$ , definito in  $\mathfrak{B}_1$  e ortogonale a  $M(V_1)$ , esiste un funzionale lineare continuo  $\Psi(w_2)$ , definito in  $\mathfrak{B}_2$  e verificante le (6) e (7)

Ne segue immediatamente il teorema:

*Se per ogni  $v \in V$  sussiste la formula di maggiorazione (8) e se  $M^*(U)$  contiene la varietà dei funzionali lineari e continui ortogonali a  $L(V)$ , allora per tutti gli  $u \in U$  per cui  $L^*(u)$  è ortogonale a  $M(V_1)$  sussiste la formula di maggiorazione duale'*

$$(8') \quad \text{estr. inf.}_{u_1 \in U_1} \|M^*(u + u_1)\| \leq K \|L^*(u)\|,$$

dove  $U_1$  è la varietà degli elementi  $u_1$  di  $U$  per cui  $M^*(u_1)$  è ortogonale a  $L(V)$ .

Qualora  $V_1$  ed  $U_1$  siano vuoti si riottiene il principio di dualità di Fichera (n. 3).

In un successivo più ampio lavoro dedurrò dal principio di dualità così esteso alcune nuove formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali.

**Matematica.** — *Sulle curve a flessione costante.* Nota di MARIA TERESA CALAPSO, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

1. È ben noto, anzitutto, che una curva analitica isotropa dello spazio ordinario (riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali) si rappresenta con le equazioni parametriche:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= tF'' - F' & y &= \frac{1-t^2}{2} F'' + tF' - F \\ z &= i \left( \frac{1+t^2}{2} F'' - tF' + F \right) & i &= \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

in esse  $t$  è il parametro, gli apici indicano derivate rispetto ad esso, ed inoltre  $F = F(t)$  designa una funzione olomorfa di  $t$ . Al variare di questa, si ottengono tutte le curve analitiche isotrope <sup>(1)</sup>.

2. Segnaliamo ora il seguente risultato; i fatti geometrici su cui poggiano gli sviluppi della presente Nota verranno esposti in un lavoro successivo assieme ad ulteriori approfondimenti. *A partire da due curve isotrope, ottenute dalle (1) mettendo al posto di  $F$  due diverse funzioni  $f(t)$  e  $\varphi(t)$ , la più generale curva gobba a flessione costante può venir rappresentata parametricamente dalle equazioni:*

$$(2) \quad \begin{cases} x = (tf'' - f') - \frac{f'''}{\varphi'''} (t\varphi'' - \varphi') \\ y = \left( \frac{1-t^2}{2} f'' + tf' - f \right) - \frac{f'''}{\varphi'''} \left( \frac{1-t^2}{2} \varphi'' + t\varphi' - \varphi \right) \\ z = i \left( \frac{1+t^2}{2} f'' - tf' + f \right) - \frac{f'''}{\varphi'''} i \left( \frac{1+t^2}{2} \varphi'' - t\varphi' + \varphi \right); \end{cases}$$

qui le funzioni  $f$  e  $\varphi$  possono venir scelte comunque, purchè soggette alla disuguaglianza  $\varphi''' \neq 0$  ed all'equazione:

$$(3) \quad f''' = \frac{ic\varphi'''}{\sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}}, \quad \text{con } c = \text{costante} \neq 0.$$

Allora  $c$  sarà il raggio di flessione, mentre la torsione verrà a dipendere soltanto dalla funzione  $\varphi$ , essendo data precisamente dalla formola:

$$(4) \quad \frac{1}{T} = \frac{c\varphi^2\varphi'''}{(\varphi'^2 - 2\varphi\varphi'')^{3/2}}.$$

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) C. GUICHARD, *Les courbes de l'espace à  $n$  dimensions*, « Mémorial des Sciences Mathématiques », fasc. XXIX, Paris 1928; E. CARTAN, *La méthode du repère mobile etc.*, « Actualité scient. et industr. », n. 194, Paris, Hermann, 1935; E. BOMPIANI, *Geometria degli elementi differenziali*, Edizione litografata, 1942, p. 144.

3. La determinazione delle curve a flessione costante viene così a dipendere, in definitiva, dall'unica equazione (3) (la cui forma funzionale è la stessa per tutte le suddette curve), la quale si integra immediatamente. A questo scopo basta prendere ad arbitrio la funzione  $\varphi$  e ricavare in conseguenza la  $f$ , il che si effettua con tre quadrature successive applicate al secondo membro della (3). Ciò in accordo con la teoria classica, che, per via molto diversa (attraverso le curve sferiche), assegna appunto tre quadrature per la determinazione delle curve in discorso <sup>(2)</sup>.

Queste quadrature non hanno però relazioni fra loro; mentre ora invece si presenta un fatto nuovo, e cioè che le tre quadrature *risultano consecutive*. Esse allora possono venir sostituite con una sola, e precisamente, se, per es., il valore  $t = 0$  è interno alla regione in cui varia  $t$ , si può assumere <sup>(3)</sup>:

$$(5) \quad f = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \frac{ic}{2} \int_0^t (t-u)^2 \frac{\varphi'''(u) du}{\sqrt{\varphi'^2(u) - 2\varphi(u)\varphi''(u)}},$$

con  $c_0, c_1, c_2$ , costanti arbitrarie. Pertanto:

*Le curve a flessione costante possono tutte venir determinate con una sola quadratura.*

4. Le (2) (3) permettono di ricavare subito quanti si vogliano esempi di curve a flessione costante. Così, assumendo

$$(6) \quad \varphi = e^t,$$

si ottiene, per opportuna scelta delle costanti d'integrazione (ossia a meno di un movimento), la cubica gobba:

$$(7) \quad \begin{cases} x = c \left( \frac{t^2}{2} - t \right) \\ y = c \left( -\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} \right) \\ z = ic \left( \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} t \right) \end{cases}$$

già incontrata da Lyon <sup>(4)</sup>, il quale la determinò attraverso calcoli assai complicati. Questa curva ha pure torsione costante.

Se invece si assume

$$\varphi = t^3,$$

(2) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, volume primo, 3<sup>a</sup> edizione, Bologna 1927, p. 53; G. LORIA, *Curve sghembe speciali*, vol. II, Zanichelli, Bologna 1925, p. 99.

(3) Cfr. PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, volume secondo, 1956, p. 716.

(4) Cfr. LYON, *Sur les courbes à torsion constante*, «Annales de l'enseignement sup. de Grenoble, tome II, 1890, p. 353. Vedasi anche: G. LORIA, *Curve sghembe speciali*, volume primo, Zanichelli, Bologna 1925, p. 192 e sgg.



ne risulta l'elica:

$$(8) \quad \begin{cases} x = \log t & , & y = -\frac{1}{t} - \frac{t}{3} \\ z = i\left(-\frac{1}{t} + \frac{t}{3}\right) \end{cases}$$

Un altro esempio notevole d'integrazione immediata della (3) si ha per

$$(9) \quad \varphi = e^t + e^{it},$$

la curva corrispondente, di flessione costante  $1/c$ , avendo la torsione

$$\frac{1}{T} = ic \left( \frac{e^t + e^{it}}{e^t - ie^{it}} \right)^2$$

ed equazioni parametriche che si scrivono immediatamente.

5. La (3), che può venir denominata «l'equazione delle curve a flessione costante», presenta un ovvio interesse.

Una classe notevole di soluzioni si ottiene assumendo per  $\varphi$  una qualunque delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$(10) \quad \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'' = -\varphi'''^2,$$

soluzioni che sono da ricercare fra quelle dell'equazione seguente (ottenuta per derivazione):

$$(11) \quad \varphi^{IV} = \varphi,$$

di facilissima integrazione. In questa classe rientrano il primo e il terzo degli esempi del n. 4.

Come altro esempio, si può porre:

$$(12) \quad \phi'^2 - 2\phi\phi'' = -2A,$$

con  $A = A(t)$  funzione nota di  $t$ , da cui, ancora derivando, si ottiene:

$$\varphi''' = \frac{1}{\varphi} A'.$$

In generale si semplifica - sotto certi aspetti - l'equazione in discorso, ponendo, <sup>(5)</sup>:

$$(13) \quad \varphi = e^{\int \theta dt},$$

con che si passa all'equazione:

$$(14) \quad f''' = \frac{c(\theta^3 + 3\theta\theta' + \theta'')}{\sqrt{\theta^2 + 2\theta'}}.$$

(5) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali, ecc.*, Bologna 1948, parte prima, p. 88; DARBOUX, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, I, p. 34 (Paris, 1914).

Si riconosce agevolmente che, fatte le sostituzioni nelle (2), la funzione a secondo membro della (13) sparisce, sicchè non resta che l'integrazione della stessa (14). Facendo in questa una posizione analoga alla (12) si ottiene una equazione di Riccati; ecc.

6. La cubica di Lyon, rappresentata parametricamente dalle (7), appartiene alla classe di eliche cilindriche per le quali il rapporto delle due curvatures vale  $\pm i$ .

In relazione a queste curve, può venir completata la nota dimostrazione del teorema di Bertrand <sup>(6)</sup> (secondo il quale ogni curva avente costante il rapporto delle due curvatures è un'elica), mostrando che le curve della classe in discorso sono tutte e sole le geodetiche dei cilindri isotropi (ossia a generatrici isotrope).

Convieni chiamare « eliche di seconda specie » queste curve, per distinguerle dalle geodetiche dei cilindri non isotropi, che possono dirsi « eliche di prima specie » <sup>(7)</sup>.

Fra le eliche di seconda specie, poi, la cubica di Lyon è l'unica, a meno di un movimento e di un'omotetia, che abbia separatamente costanti le due curvatures. In tal caso, il cilindro isotropo di cui la cubica è geodetica diventa del secondo ordine (e bitangente all'assoluto), in perfetta analogia con quanto si verifica per le eliche circolari ordinarie <sup>(8)</sup>.

Si riconosce altresì che le eliche di seconda specie altro non sono che le trasformate di Combescure dell'elica di Lyon (o di un'altra elica di seconda specie, comunque prefissata), sempre a meno di un movimento <sup>(9)</sup>.

7. Accenniamo ora alla questione di determinare le curve gobbe il cui raggio di flessione  $\rho$  sia funzione lineare dell'arco  $s$ , tali cioè che si abbia:

$$(15) \quad \frac{d\rho}{ds} = k,$$

ove  $k$  denota una costante non nulla. La soluzione di questo problema, che nella teoria classica si ottiene mediante tre quadrature <sup>(10)</sup>, può esser conseguita con procedimento analogo a quello indicato per le curve a flessione costante, di cui le curve in discorso costituiscono una generalizzazione.

(6) L. BIANCHI, loc. cit., p. 23; G. SANSONE, *Lezioni di analisi matematica*, vol. II, 1954, p. 391.

(7) L'opportunità di questa distinzione è avvalorata dal fatto che un cilindro isotropo non ammette alcuna direttrice che ne sia sezione retta, fatta cioè con un piano non passante per il vertice e perpendicolare alle generatrici. (Va da sè che qui ci riferiamo alle geodetiche a doppia curvatura).

(8) L. BIANCHI, loc. cit., p. 25. È utile confrontare quanto quivi si dice sulle eliche circolari con l'osservazione di cui alla precedente nota <sup>(7)</sup>.

(9) Per la trasformazione di Combescure, ved. BIANCHI, loc. cit., p. 50.

(10) L. BIANCHI, loc. cit., p. 54.

Si dimostra, infatti, che:

*Le curve della classe (15) si ottengono anch'esse (e nel modo più generale) con le medesime formole (2), di cui ci siamo serviti per le curve a flessione costante, mutando soltanto leggermente l'equazione differenziale (3), che lega le funzioni  $f$  e  $\varphi$ , nel senso che in questa il radicale va elevato ad un certo esponente costante non nullo  $n$  (in generale complesso).*

Questo  $n$  dipende da  $k$ , e prende il valore 1 per  $k=0$ . La costante  $ic$ , se  $n \neq 1$ , può venir conglobata nella stessa funzione  $\varphi$ , con che l'equazione differenziale che caratterizza le curve della classe (15) diventa:

$$(16) \quad f''' = \frac{\varphi'''}{(\sqrt{\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''})^n} \quad (n \neq 1).$$

Come al n. 3, da qui si deduce che:

*Le curve aventi il raggio di flessione funzione lineare dell'arco si determinano con una sola quadratura.*

È chiaro che questo teorema, come l'analogo del n. 3, può venir messo in relazione con la presenza di soluzioni particolari, riconoscibili a priori nel caso in esame, dell'equazione di Riccati da cui dipende la determinazione, nel gruppo metrico, di una curva a partire dalle sue equazioni intrinseche <sup>(11)</sup>.

La (16) permette di ottenere subito (con integrazioni immediate) quanti si vogliano esempi di curve razionali della classe (15): all'uopo basta assumere  $n = -2h$ , con  $h$  intero positivo arbitrario, e prendere per  $\varphi$  un qualunque polinomio in  $t$ . Per  $n=2$ ,  $\varphi = t^3$  si ottiene così una cubica gobba che è altresì un'elica; questo caso rientra in quello, anche interessante, in cui  $n=2h$ ,  $\varphi = t^r$  con  $r$  intero positivo; e così via <sup>(12)</sup>.

8. In relazione ai risultati esposti, è utile ricordare la nota trasformazione di Bianchi, di curva in curva, che - applicata ad una qualunque curva (non isotropa) dello spazio ordinario - ne scambia tra loro curvatura e torsione <sup>(13)</sup>.

Mediante questa trasformazione, si passa senz'altro dalle proprietà che abbiamo segnalato ad altre riguardanti le curve a torsione costante e le curve il cui raggio di torsione è una funzione lineare dell'arco.

(11) Ibidem, p. 21.

(12) Si noti che, non prefissando il valore di  $k$ , quello di  $n$  rimane arbitrario. Per le eliche cubiche gobbe, vedasi G. LORIA, loc. cit., I, p. 191; II, p. 143.

(13) La suddetta trasformazione di Bianchi si deduce dalle formole del paragrafo 9, p. 18, di cui alle citate *Lezioni*. La stessa trasformazione è quella che subiscono le geodetiche di una superficie minima, quando questa si deforma nella coniugata secondo Bonnet. (Vedasi L. BIANCHI, *Opere*, vol. II, p. 92).

**Geometria.** — *Sui piani desarguesiani affini « non-ciclici »*. Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

R. C. Bose [1] ha dimostrato che ogni piano desarguesiano irriducibile,  $\Pi$ , di rango  $n$  può riguardarsi come un piano ciclico affine, vale a dire ammette un gruppo ciclico, d'ordine  $n^2 - 1$ , di collineazioni, transitivo su « quasi tutti » i punti di  $\Pi$ , cioè sull'insieme degli  $n^2 - 1$  punti di  $\Pi$  che non appartengono a una determinata retta  $u$  (retta impropria) e sono distinti da un determinato punto  $U$ , non giacente su  $u$ . Non ho trovato, nella letteratura sull'argomento, esempi di piani desarguesiani affini non-ciclici, cioè di piani  $\Pi$  irriducibili desarguesiani, di rango  $n$ , dotati, oltre che del suddetto gruppo ciclico di collineazioni, anche di un gruppo non ciclico, d'ordine  $n^2 - 1$ , di collineazioni transitivo sul suddetto insieme di  $n^2 - 1$  punti di  $\Pi$  (1).

In questa Nota si determinano tutti i piani  $\Pi$  desarguesiani irriducibili, di rango  $n$ , affini non-ciclici e si fa vedere che il gruppo non ciclico di  $n^2 - 1$  collineazioni di cui sono dotati è transitivo anche su « quasi tutte » le rette di  $\Pi$ , cioè sull'insieme delle  $n^2 - 1$  rette di  $\Pi$  distinte da  $u$  e non passanti per  $U$ . Inoltre si caratterizzano i piani desarguesiani irriducibili affini non ciclici per cui le suddette collineazioni sono tutte omografie (2).

In una prossima Nota risolveremo analogo problema per i piani desarguesiani proiettivi.

1. Siano  $p$  e  $t$  un intero primo e un intero positivo qualsiasi e  $\Pi$  un piano proiettivo desarguesiano irriducibile di rango  $n = p^t$  definito sopra il campo di Galois  $GF(n)$ . Siano inoltre  $u$  e  $U$  rispettivamente una retta e un punto di  $\Pi$  che non si appartengano,  $\Pi_0$  l'insieme dei punti di  $\Pi$  distinti da  $U$  e non appartenenti ad  $u$  e delle rette di  $\Pi$  distinte da  $u$  e non passanti per  $U$ ,  $\Pi_1$  l'insieme dei punti di  $\Pi$  non appartenenti ad  $u$  e delle rette di  $\Pi$  distinte da  $u$ . Riferiamo  $\Pi_1$  a un sistema di coordinate non omogenee  $(x_1, x_2)$  in modo che sia  $U \equiv (0, 0)$ .  $\Pi_1$  è un piano affine che, con l'aggiunta della retta impropria  $u$  dà luogo al piano proiettivo  $\Pi$ . Tenuto conto delle equazioni generali di una collineazione [4], risulta subito che, se  $(x_1, x_2)$ ,  $(x'_1, x'_2)$  sono le coordinate di due punti propri di  $\Pi$  che si corrispondono in una collineazione che lasci fissi  $u$  e  $U$ , si ha

$$(1) \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11} x_1^{p^t} + a_{12} x_2^{p^t} \\ x'_2 = a_{21} x_1^{p^t} + a_{22} x_2^{p^t} \end{cases}$$

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) D. R. HUGHES in [2] dichiara di non conoscere esempi di piani affini non ciclici. Questa ricerca è stata suggerita dalla lettura di tale nota.

(2) Dati due piani lineari  $\Pi$  e  $\Pi'$ , chiamiamo collineazione fra essi una qualunque corrispondenza biunivoca fra i punti di  $\Pi$  e i punti di  $\Pi'$  che conservi gli allineamenti. Chiamiamo invece omografia una collineazione fra  $\Pi$  e  $\Pi'$  che conservi anche i birapporti.



dove i coefficienti  $a_{ik}$  appartengono a  $\text{GF}(n)$ ,  $|a_{ik}| = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$  ed  $r$  è uno qualsiasi dei numeri  $0, 1, \dots, t-1$ . Se  $r=0$  le (1) rappresentano una omografia di  $\Pi$  in sé che lascia fissi  $u$  e  $U$ . Queste collineazioni costituiscono un gruppo, che diremo  $H$ , di ordine  $t(n^2-1)(n^2-n)$ , transitivo su tutti i punti e le rette di  $\Pi$ , ed ogni collineazione di  $H$  lascia fisso  $U$  e muta ogni punto di  $u$  in un punto di  $u$ .

Sia, se possibile,  $G$  un sottogruppo di  $H$  di ordine  $n^2-1$ , tale che l'unica collineazione di  $G$  che lasci fermo un punto di  $\Pi$ , sia l'identità e siano  $\xi_i \equiv (x_{1i}, x_{2i})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n^2$ , i punti propri di  $\Pi$  e poniamo  $\xi_i + \xi_j \equiv (x_{1i} + x_{1j}, x_{2i} + x_{2j})$ ; i punti propri  $\xi_i$  formano un gruppo abeliano additivo,  $A$ , di ordine  $n^2$  e tipo  $(1, 1, \dots, 1)_{n^2}$ . È subito visto che una collineazione,  $g$ , di  $G$  determina su  $A$  un automorfismo. Infatti, se per effetto di  $g$  si ha  $\xi_i \rightarrow \xi'_i$ , per effetto dell'inversa di  $g$  si ha  $\xi'_i \rightarrow \xi_i$ ; inoltre, a causa delle (1), ricordando che in  $\text{GF}(n)$  è  $(x_i + x_j)^{p^r} = x_i^{p^r} + x_j^{p^r}$ , se  $\xi_i \rightarrow \xi'_i$  e  $\xi_j \rightarrow \xi'_j$  allora  $\xi_i + \xi_j \rightarrow \xi'_i + \xi'_j$ . D'altra parte è noto che nel gruppo di automorfismi di un gruppo abeliano elementare di ordine  $n$  esistono sottogruppi di ordine  $n-1$  non ciclici, semplicemente transitivi sugli elementi diversi dall'identità, per quei valori di  $n$  per cui esistono pseudocorpi del Dickson <sup>(3)</sup> di ordine  $n$  che non siano campi di Galois; precisamente ad ogni gruppo di automorfismi di ordine  $n-1$ , non ciclico, di un gruppo abeliano elementare di ordine  $n$  corrisponde uno pseudocorpo del Dickson che non è un campo di Galois e viceversa [3, 5]. Ne risulta che, se  $\Pi$  è un piano desarguesiano, irriducibile affine non-ciclico, il rango  $n = p^t$  di  $\Pi$  è tale che esiste uno pseudocorpo del Dickson di ordine  $n^2$  che non è un campo di Galois.

2. Viceversa vogliamo provare che a ogni pseudocorpo del Dickson, che non sia un campo di Galois, di ordine  $n^2$ , corrisponde un piano desarguesiano, affine, non-ciclico, di rango  $n$ . Consideriamo un campo di Galois  $\text{GF}(n)$  di ordine  $n = p^t$ ;  $x_1, x_2, \dots$  siano suoi elementi generici e sia  $x^2 + ax + b = 0$  una equazione a coefficienti in  $\text{GF}(n)$ , e ivi irriducibile;  $\xi = x_1 + \gamma x_2$  genera, al variare di  $x_1$  e  $x_2$  in  $\text{GF}(n)$ , ciascuno una volta sola, tutti gli elementi di un campo di Galois  $\text{GF}(n^2)$ , contenente  $\text{GF}(n)$ . In particolare, se  $h$  appartiene a  $\text{GF}(n)$  e quindi a  $\text{GF}(n^2)$ ,  $h(x_1 + \gamma x_2) = hx_1 + \gamma hx_2$ . Inoltre gli elementi di  $\text{GF}(n^2)$  composti per mezzo dell'addizione costituiscono un gruppo abeliano elementare,  $A$ , di ordine  $n^2$ . Scegliamo  $n$  in modo tale che esista uno pseudocorpo del Dickson, che non sia un campo di Galois,

(3) Si dice pseudocorpo del Dickson un sistema,  $K$ , con doppia composizione definito dalle seguenti proprietà:

1° gli elementi di  $K$ , rispetto all'addizione, formano un gruppo abeliano;

2° gli elementi non nulli di  $K$  formano, rispetto alla moltiplicazione, un gruppo; inoltre, qualunque sia  $a$  in  $K$ ,  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ;

3° qualunque siano  $a, b, c$  in  $K$ ,  $a(b+c) = ab+ac$ .

Ordine di uno pseudocorpo finito è il numero dei suoi elementi. Gli pseudocorpi del Dickson finiti che non siano campi di Galois, coincidono con i « vollständige Fastkörper » finiti considerati da H. Zassenhaus in [6].

di ordine  $n^2$ , che indicheremo con  $K$ . Tenuto conto che il gruppo additivo di uno pseudocorpo del Dickson finito è un gruppo abeliano elementare dello stesso ordine dello pseudocorpo e che due gruppi abeliani elementari dello stesso ordine sono isomorfi, si ha che tra  $GF(n^2)$  e  $K$  può porsi una corrispondenza biunivoca che dia luogo ad un isomorfismo,  $\vartheta$ , tra i loro gruppi additivi. Identificando ora tra loro elementi corrispondenti in  $\vartheta$ , può ritenersi che  $GF(n^2)$  e  $K$  siano costituiti degli stessi elementi. Presi allora due elementi qualsiasi,  $\eta, \alpha$ , di  $K$  e quindi di  $GF(n^2)$ , indicheremo con  $\eta \circ \alpha$  il loro prodotto in  $K$ , mentre indicheremo con  $\eta \alpha$  il prodotto di  $\eta$  e  $\alpha$  in  $GF(n^2)$ . È noto che, fissato  $\eta \neq 0$  in  $K$ , al variare di  $\alpha$  in  $K$ , la corrispondenza  $\alpha \rightarrow \eta \circ \alpha$  è un automorfismo,  $\sigma_\eta$ , del gruppo additivo  $A$  di  $K$ . Di più si sa che, al variare di  $\eta$  fra gli elementi diversi da zero dello pseudocorpo, gli automorfismi  $\sigma_\eta$  costituiscono un gruppo, che diremo  $G$ , isomorfo al gruppo moltiplicativo dello pseudocorpo, di ordine  $n^2 - 1$ , non ciclico, poiché  $K$  non è un campo di Galois, semplicemente transitivo sugli elementi diversi da zero di  $A$  [3].

Vogliamo ora dimostrare che, fissati tre elementi  $\eta, \alpha, \beta$  di  $K$  si può determinare una corrispondenza biunivoca  $\varphi$  di  $GF(n)$  su di sé tale che, per  $h$  in  $GF(n)$  si abbia

$$(2) \quad \eta \circ (\alpha h + \beta) = (\eta \circ \alpha) \varphi(h) + \eta \circ \beta.$$

A tal fine distinguiamo ora i due seguenti casi:

a)  $n$  è un numero primo  $p$  (onde  $K$  ha ordine  $p^2$ ). Allora, considerato un automorfismo qualunque  $\vartheta$  del gruppo additivo di  $K$  (e di  $GF(p^2)$ ), se  $\alpha, \beta$  sono elementi qualunque di  $K$  ed  $h$  è un elemento qualunque di  $GF(p)$ , si ha

$$\begin{aligned} \vartheta(\alpha h + \beta) &= \vartheta(\alpha + \alpha + \dots + \alpha + \beta) = \\ &= \vartheta(\alpha) + \vartheta(\alpha) + \dots + \vartheta(\alpha) + \vartheta(\beta) = \vartheta(\alpha) h + \vartheta(\beta), \end{aligned}$$

onde, tenuto conto che, se  $\eta$  è un elemento fisso diverso da zero e  $\xi$  uno variabile di  $K$ , la corrispondenza  $\xi \rightarrow \eta \circ \xi$  è un automorfismo di  $A$ , si ha

$$(3) \quad \eta \circ (\alpha h + \beta) = (\eta \circ \alpha) h + \eta \circ \beta.$$

Vale pertanto la (2), ed anzi, in questo caso la corrispondenza  $\varphi$  si riduce alla identità (ed è quindi indipendente da  $\eta, \alpha, \beta$ ).

b)  $n$  non sia un numero primo. Allora, necessariamente,  $n = p^t$  con  $p$  primo,  $t > 1$ . In questo caso  $K$  rientra nel tipo che H. Zassenhaus [6] indica col simbolo  $K_{p^t, m}$ , poiché egli ha provato che gli unici sette pseudocorpi del Dickson non campi di Galois che non siano di tal tipo sono di ordine  $p^2$ , con  $p$  primo.

È noto [6] che il centro di  $K$ , cioè l'insieme degli elementi di  $K$  ciascuno dei quali è permutabile con ogni elemento di  $K$ , è un campo di Galois  $GF(q)$ , d'ordine  $q = p^r$  tale che sia  $q^m = p^{r^m} = n^2$ .

Rammentiamo come, seguendo H. Zassenhaus [6], si possa costruire un generico pseudocorpo di tipo  $K_{p^t, m}$  il cui centro sia isomorfo a un campo di Galois,  $GF(q)$ , di ordine  $q = p^r$ . Sia  $m$  un intero naturale divisibile soltanto per fattori primi di  $q - 1$ . Inoltre sia  $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ , se  $q \equiv 3 \pmod{4}$ .

Sia poi  $\omega$  un generatore del gruppo moltiplicativo (ciclico) di un campo di Galois  $\text{GF}(q^m)$  contenente  $\text{GF}(q)$ ,  $\alpha = \omega^d$  un elemento qualsiasi di tale gruppo e  $\rho$  l'automorfismo di  $\text{GF}(q^m)$  tale che, per ogni  $\xi$  in  $\text{GF}(q^m)$ , sia

$$(4) \quad \rho(\xi) = \xi^q.$$

Qualunque sia l'intero  $d$ , esiste almeno un intero naturale  $u$  tale che

$$(5) \quad q^u \equiv 1 + d(q-1) \pmod{(q-1)m}$$

e, fissato  $\alpha = \omega^d$ , rimane univocamente determinato da  $\alpha$  l'automorfismo di  $\text{GF}(q^m)$

$$(6) \quad \rho_\alpha = \rho^u.$$

Posto, per  $\beta$  qualsiasi in  $\text{GF}(q^m)$ ,

$$(7) \quad \alpha \circ \beta = \alpha \rho_\alpha(\beta) \quad , \quad 0 \circ \beta = 0,$$

rimane definita la tavola di moltiplicazione di uno pseudocorpo di ordine  $q^m$  avente per centro un campo di Galois di ordine  $q$ . Dovendo, nel caso in esame, essere  $K$  del tipo  $K_{p^l, m}$ , possiamo supporre che  $K$  sia stato costruito a partire da  $\text{GF}(q^m)$ , ( $q^m = n^2$ ), nel modo anzidetto.

Notiamo ora che, se  $\alpha$  è un qualunque elemento di  $K$  diverso da zero,  $\rho_\alpha$  determina un automorfismo di  $\text{GF}(n)$ ; infatti, per le (4) (6),  $\rho_\alpha$  muta ogni elemento di  $\text{GF}(n^2)$  in una sua potenza, e quindi, se  $h$  è un elemento di  $\text{GF}(n)$ , anche  $\rho_\alpha(h)$  lo è. Quindi, se  $\eta$  è un elemento diverso da zero di  $K$

$$\begin{aligned} \eta \circ (\alpha h + \beta) &= \eta \circ (\alpha h) + \eta \circ \beta = \eta \circ [\alpha (\rho_\alpha^{-1}(\rho_\alpha^{-1}(h)))] + \eta \circ \beta = \\ &= \eta \circ [\alpha \circ (\rho_\alpha^{-1}(h))] + \eta \circ \beta = (\eta \circ \alpha) \circ (\rho_\alpha^{-1}(h)) + \eta \circ \beta = \\ &= (\eta \circ \alpha) \rho_{\eta \circ \alpha}[\rho_\alpha^{-1}(h)] + \eta \circ \beta. \end{aligned}$$

Posto  $\varphi = \rho_\alpha^{-1} \rho_{\eta \circ \alpha}$ , si ha che  $\eta \circ (\alpha h + \beta) = (\eta \circ \alpha) \varphi(h) + \eta \circ \beta$ , con  $\varphi$  automorfismo di  $\text{GF}(n)$ , cioè la (2).

Preso dunque uno pseudocorpo del Dickson qualsiasi di ordine  $n^2$  che non sia un campo di Galois e supposto, d'accordo con quanto già visto, che i suoi elementi siano della forma  $\xi = x_1 + \gamma x_2$ , con  $x_1$  e  $x_2$  in  $\text{GF}(n)$  e  $\gamma$  un elemento di  $\text{GF}(n^2)$ , rappresentiamo un generico punto proprio  $(x_1, x_2)$  di un piano finito, desarguesiano, irriducibile,  $\Pi$ , di rango  $n$  con l'elemento  $\xi = x_1 + \gamma x_2$  dello pseudocorpo. Si consideri poi in  $\Pi$  una retta propria,  $r$ , che possiamo rappresentare mediante le equazioni parametriche  $z_1 = l_1 h + x_1$ ,  $z_2 = l_2 h + x_2$  ( $z_1, z_2$  coordinate correnti,  $h$  parametro variabile in  $\text{GF}(n)$ ), vale a dire, mediante l'equazione parametrica « vettoriale »

$$\zeta = \lambda h + \xi,$$

con  $\lambda = l_1 + \gamma l_2$ ,  $\xi = x_1 + \gamma x_2$ ,  $\zeta = z_1 + \gamma z_2$ .

Per la (2) si ha che, comunque si prenda un elemento  $\eta \neq 0$  di  $K$ , è

$$\eta \circ (\lambda h + \xi) = (\eta \circ \lambda) \varphi(h) + \eta \circ \xi,$$

dove  $\varphi$  è un automorfismo di  $G$ , onde, al variare di  $h$  in  $\text{GF}(n)$ , altrettanto fa  $\varphi(h)$ . Pertanto, la corrispondenza che porta ogni punto proprio

$\zeta$  di  $\Pi$  nel punto  $\eta\circ\zeta$  porta la  $r$  nella retta di equazione parametrica vettoriale

$$\zeta = (\eta\circ\lambda)h' + \eta\circ\xi,$$

( $h'$  parametro variabile in  $\text{GF}(n)$ ).

Si nota subito che, per effetto di tale corrispondenza,  $U$  viene trasformato in se stesso, una retta per  $U$  in una retta per  $U$ . Tale corrispondenza dà quindi luogo a una collineazione di  $\Pi$ , onde a  $G$  corrisponde un gruppo di collineazioni di  $\Pi$ ,  $\bar{G}$ , non ciclico, di ordine  $n^2 - 1$ , semplicemente transitivo su tutti i punti propri di  $\Pi$  distinti da  $U$  e che lascia fissi  $U$  e la retta impropria  $u$ .

Siccome pseudocorpi distinti hanno gruppi moltiplicativi distinti e poiché ogni pseudocorpo determina univocamente il suo gruppo moltiplicativo che, negli pseudocorpi da noi considerati, è isomorfo a  $G$ , risulta che *vi è una corrispondenza biunivoca tra i piani desarguesiani irriducibili affini non-ciclici, di rango  $n$ , e gli pseudocorpi del Dickson di ordine  $n^2$  che non siano campi di Galois.*

Mostriamo ora che  $\bar{G}$  è transitivo anche su quasi tutte le rette di  $\Pi$ .

Infatti, se  $\bar{G}$  non fosse transitivo sulle rette proprie di  $\Pi$  non passanti per  $U$ , una retta propria di  $\Pi$ ,  $r$ , non passante per  $U$ , sarebbe portata dalle collineazioni di  $\bar{G}$  solo in un numero di rette minore di  $n^2 - 1$  e quindi vi dovrebbero essere due diverse collineazioni,  $\sigma_\xi$  e  $\sigma_\eta$ , che portano  $r$  nella stessa retta e la collineazione non identica  $\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta^{-1} = \sigma_\zeta$  porterebbe  $r$  in sé. Ma ciò è assurdo: infatti  $\sigma_\zeta$  in tal caso permuterebbe tra loro gli  $n$  punti propri di  $r$ , e poiché nessuna collineazione non identica del gruppo, quindi nemmeno alcuna potenza non identica di  $\sigma_\zeta$ , lascia fermo alcun punto proprio di  $\Pi$  diverso da  $U$ ,  $\sigma_\zeta$  dovrebbe determinare una sostituzione regolare sugli  $n$  punti propri di  $r$ , e perciò il suo ordine dovrebbe dividere  $n$ : e questo è assurdo, perché  $n$  è primo con  $n^2 - 1$ .

Ricordando che tutti gli pseudocorpi del Dickson che non siano campi di Galois sono stati determinati da H. Zassenhaus [6], risultano determinati tutti i piani desarguesiani irriducibili affini non-ciclici e il gruppo non ciclico  $\bar{G}$  di collineazioni di cui sono dotati risulta transitivo anche su quasi tutte le loro rette.

3. Vogliamo ora determinare le condizioni perché le collineazioni di  $\bar{G}$  siano tutte delle omografie.

Siano  $\xi$  e  $\xi'$  due elementi di  $K$  corrispondenti in una generica corrispondenza di  $G$ . Cominciamo col provare il seguente lemma:

*$\bar{G}$  è un gruppo di omografie quando e solo quando un elemento di  $G$  che porta  $\xi$  in  $\xi'$ , porta di conseguenza  $h\xi$  in  $h\xi'$ , qualunque sia  $h$  in  $\text{GF}(n)$ .*

Ricordiamo prima di tutto che le (I) rappresentano una omografia se e soltanto se  $p^r = 1$ . Se pertanto una omografia porta  $(x_1, x_2)$  in  $(x'_1, x'_2)$ , essa porta  $(hx_1, hx_2)$  in  $(hx'_1, hx'_2)$ , qualunque sia  $h$  in  $\text{GF}(n)$ . Viceversa, se una collineazione di equazioni (I), tutte le volte che porti  $(x_1, x_2)$  in  $(x'_1, x'_2)$ , porta di conseguenza  $(hx_1, hx_2)$  in  $(hx'_1, hx'_2)$ , qualunque sia  $h$  in  $\text{GF}(n)$ , deve essere, come si vede subito,  $p^r = 1$ , onde la collineazione è una omografia. Pertanto



una collineazione  $\vartheta$  è una omografia quando e soltanto quando, comunque si prendano  $x_1, x_2, h$  in  $\text{GF}(n)$ , detto  $(x'_1, x'_2)$  il corrispondente di  $(x_1, x_2)$  in  $\vartheta$ , si ha che il corrispondente di  $(hx_1, hx_2)$  è  $(hx'_1, hx'_2)$ . Tenuto conto che un generico punto  $(x_1, x_2)$  di  $\Pi$  si rappresenta con l'elemento  $\xi = x_1 + \gamma x_2$  di  $K$ , risulta quanto si voleva dimostrare.

Possiamo ora dimostrare che:

*Condizione necessaria e sufficiente perché tutte le collineazioni del piano desarguesiano, affine transitivo regolare non ciclico,  $\Pi$ , di rango  $n$ , definito da uno pseudocorpo del Dickson,  $K$ , di ordine  $n^2$ , che non sia un campo di Galois, siano omografie è che  $n$  sia un numero primo oppure che  $K$  abbia per centro un campo di Galois di ordine  $n$ .*

Distinguiamo due casi:

a)  $n$  è un numero primo  $p$  e quindi  $K$  ha ordine  $p^2$ . In tal caso, se per effetto di un automorfismo appartenente a  $G$  si ha  $\xi \rightarrow \xi' = \eta \circ \xi$ , allora per la (3)  $h\xi \rightarrow h\xi'$ , qualunque sia  $h$  in  $\text{GF}(n)$ . Tenuto conto del lemma sopra dimostrato risulta, se  $K$  ha ordine  $p^2$ , verificato l'asserto.

b)  $n$  è la potenza  $p^t$  di un numero primo  $p$  e  $t > 1$ . In questo caso  $K$  è di tipo  $K_{p^t, m}$  [6].

Cominciamo col dimostrare che se  $K$  ha per centro un campo di Galois  $\text{GF}(n)$  tutte le collineazioni di  $\bar{G}$  sono omografie. In questo caso nella (4) è  $q = n$ , onde, se  $h$  è un qualsiasi elemento di  $\text{GF}(n)$ , si ha  $\rho(h) = h^n = h$ . Pertanto, qualunque sia  $\alpha \neq 0$  in  $K$ , in base alla (6), la (7) fornisce  $\alpha \circ h = = \alpha \rho_\alpha(h) = \alpha \rho^n(h) = \alpha h$ . D'altra parte, se per effetto di un automorfismo appartenente a  $G$ ,  $\sigma_\eta$ , si ha  $\alpha \rightarrow \eta \circ \alpha = \alpha'$ , allora  $\alpha h = \alpha \circ h \rightarrow \eta \circ (\alpha \circ h) = = (\eta \circ \alpha) \circ h = (\eta \circ \alpha) h = \alpha' h$ . Tenuto conto del lemma sopra dimostrato, risulta quanto si voleva.

Vogliamo ora dimostrare che, se tutte le collineazioni di  $\bar{G}$  sono omografie, allora  $K$  ha per centro un campo di Galois di ordine  $n$ . Supponiamo che il centro di  $K$  sia un campo di Galois di ordine  $q$  tale che sia  $q^m = n^2$ . Si tratterà di far vedere che è  $q = n$ . Fissato  $\eta \neq 0$  in  $K$ , consideriamo l'automorfismo appartenente a  $G$ ,  $\xi \rightarrow \eta \circ \xi$  e l'omografia da esso determinata. Allora, presi comunque  $\alpha \neq 0$  in  $K$  e  $h$  in  $\text{GF}(n)$ , posto  $\alpha' = \eta \circ \alpha$ , si ha  $\alpha \circ h = = \eta \circ (\alpha \circ h) = (\eta \circ \alpha) \circ h = \alpha' \circ h$ . Quindi se, per le (4) (6) (7),  $\alpha \circ h = \alpha h^{q^u}$ , tenuto conto del lemma stabilito al principio di questo numero, deve aversi  $\alpha' \circ h = \alpha' h^{q^u}$ . Siccome poi, scelti due elementi in  $K$ ,  $\alpha$  e  $\alpha'$ , diversi da zero, esiste sempre un automorfismo appartenente a  $G$  che porta  $\alpha$  in  $\alpha'$ , risulta che se, per  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \circ h = \alpha h^{q^u}$ ,  $q^u$  è indipendente da  $\alpha$  (e da  $h$ ).

Consideriamo ora un altro elemento,  $k$ , di  $\text{GF}(n)$ . Si ha

$$\begin{aligned} h \circ k \circ h &= (h \circ k) \circ h = (hk^{q^u}) \circ h = hk^{q^u} h^{q^u} = h^{q^{u+1}} k^{q^u}; \\ h \circ k \circ h &= h \circ (k \circ h) = h \circ (kh^{q^u}) = hk^{q^u} h^{q^2} = h^{q^2+1} k^{q^u}. \end{aligned}$$

Da queste risulta  $h^{q^u} = h^{q^2}$ , qualunque sia  $h$  in  $\text{GF}(n)$ ; cioè  $h^{q^u} = h$  e  $\alpha \circ h = \alpha h$ , qualunque siano  $\alpha \neq 0$  in  $K$  e  $h$  in  $\text{GF}(n)$ .

Si vede poi che, se  $r$  è un intero relativo qualsiasi e  $\alpha = \omega^{r-rm}$ , per la (5) si ha  $q^u \equiv q \pmod{(q-1)m}$  e quindi, per la (6),  $\rho_\alpha = \rho$ . In particolare, per le

(4) (7), sarà  $\alpha o h = \alpha h^q$ . Si dovrà avere perciò  $\alpha h^q = \alpha h$  e  $h^{q-1} = 1$ , qualunque sia  $h \neq o$  in  $\text{GF}(n)$ . E poiché gli elementi di  $\text{GF}(n) \neq o$  formano un gruppo moltiplicativo ciclico di ordine  $n-1$ , dovrà essere  $q-1 = s(n-1)$  con  $s$  intero naturale conveniente  $\geq 1$ . Essendo poi  $q^m = n^2$  ed  $m > 1$ , è  $1 < q \leq n$ ; onde deve essere  $s = 1$ ,  $q = n$ . Pertanto, come si voleva dimostrare, il centro  $\text{GF}(q)$  di  $K$  è proprio  $\text{GF}(n)$ . Il teorema è così completamente dimostrato.

Dai ragionamenti fatti risulta anche che per ogni campo di Galois di ordine  $n^2$  esiste, come è noto, un piano ciclico affine; anzi un piano ciclico affine,  $\Pi$ , dotato di un gruppo ciclico di omografie di ordine  $n^2-1$ , transitivo su tutti i punti propri di  $\Pi$  distinti da un punto  $U$  e su tutte le rette proprie di  $\Pi$  non passanti per  $U$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. C. BOSE, *An affine analogous of Singer's Theorem*, « Journ. Indian Math. Soc. », 6, pp. 1-15 (1942).
- [2] D. R. HUGHES, *Partial difference sets*, « Amer. Journ. of Math. », 78, pp. 650-674 (1956).
- [3] L. LOMBARDO-RADICE, *Piani grafici finiti a coordinate di Veblen-Wedderburn*, « Ricerche di Matematica », 2, pp. 266-273 (1953).
- [4] O. VELEN e W. H. BUSSEY, *Finite projective geometries*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 7, pp. 241-259, (1906).
- [5] G. ZAPPA, *Sui piani grafici finiti h-l-transitivi*, « Boll. U.M.I. », s. III, a. IX, n. 1, pp. 16-24.
- [6] H. ZASSENHAUS, *Über endliche Fastkörper*, « Abhandlungen aus dem Mathem. Seminar der Hamburg. Univ. », 11, pp. 187-220 (1935).

**Meccanica.** — *Espressioni delle proiezioni su una retta del peso elastico assiale di un'asta*. Nota di FILIPPO LATTANZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. In una nostra Nota precedente si sono riportate relativamente al peso elastico longitudinale di un'asta curva alcune relazioni fra i momenti del I e II ordine che più frequentemente s'incontrano nello studio dei sistemi elastici reticolari piani iperstatici.

Nella presente Nota, e per lo stesso fine, riportiamo alcune relazioni riguardanti le proiezioni su particolari rette del peso elastico assiale.

2. Prendiamo pertanto in considerazione ancora l'asta della Nota precedente, per le caratteristiche elastiche della quale valgono tutte le notazioni per essa già indicate; ed alle quali va ora aggiunta quella relativa al peso elastico assiale.

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

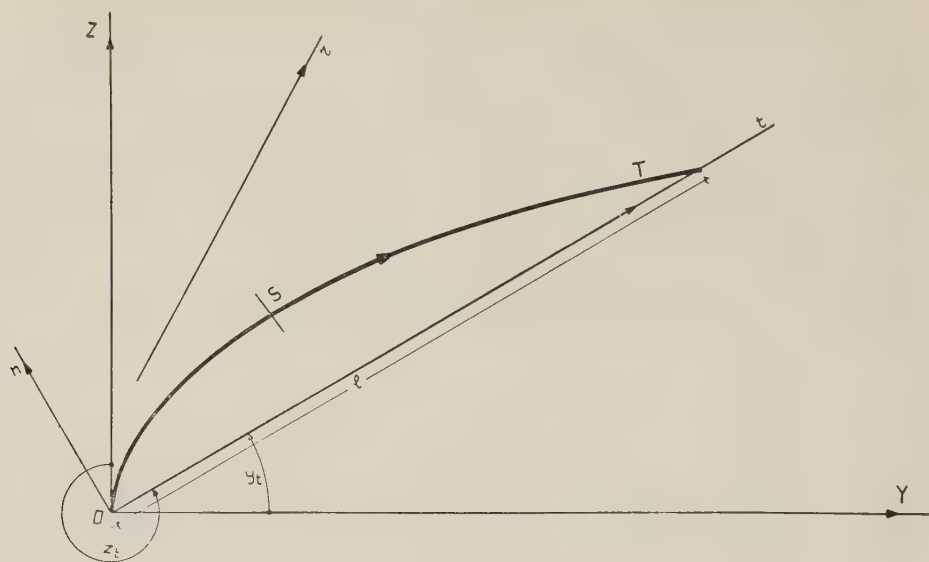


Fig. 1.

Se per la sezione S è:

l'area  $\Omega$   $[L^2]$

il momento d'inerzia baricentrico  $I$   $[L^4]$

e per il materiale di cui si compone l'asta:

$$\frac{E_t}{E} = \frac{\text{modulo di elasticità a trazione}}{\text{modulo di elasticità a compressione}} = \chi$$

(assumendo  $\chi = 1$  per aste compresse)

posto  $\chi\Omega = \bar{\Omega}$   $[L^2]$

sarà il raggio d'inerzia della sezione  $\frac{I}{\bar{\Omega}} = \rho^2$   $[L^2]$

E quindi per l'elemento infinitesimo  $ds$  sarà  
il peso elastico assiale

(I3)

$$\boxed{\frac{ds}{E\Omega} = \rho^2 d\varphi = d\bar{\eta}} \quad [L/F]$$

Ora, mentre il peso elastico longitudinale  $d\varphi$  relativo ad un elemento infinitesimo  $ds$  e di dimensioni  $(1/LF)$ , in quanto moltiplicato per un momento flettente dà una rotazione, viene rappresentato sul piano di contenimento dell'asta mediante il suo punto baricentrico (traccia dell'asse di rotazione di direzione normale a detto piano); il peso elastico assiale  $d\bar{\eta}$  di dimensioni  $(L/F)$ , in quanto moltiplicato per una forza dà una lunghezza, viene nel suddetto piano rappresentato con un segmento disposto secondo la tangente alla curva nella sezione S relativa all'elemento  $ds$ .

Del quale segmento prenderemo in esame le sue componenti secondo una fissata coppia di assi.

3. Consideriamo pertanto la figura 2. Se  $AB$  rappresenta  $d\vec{j}$  disposto secondo la tangente alla curva nella sezione  $S$ , per quello che potrà interessarci in seguito, proponiamoci, da un punto di vista puramente geometrico, di risolvere il seguente quesito:

«Data una retta  $r$  sulla quale sia stato fissato il verso e condotta per il baricentro  $S$  della sezione la parallela, determinare le componenti secondo il

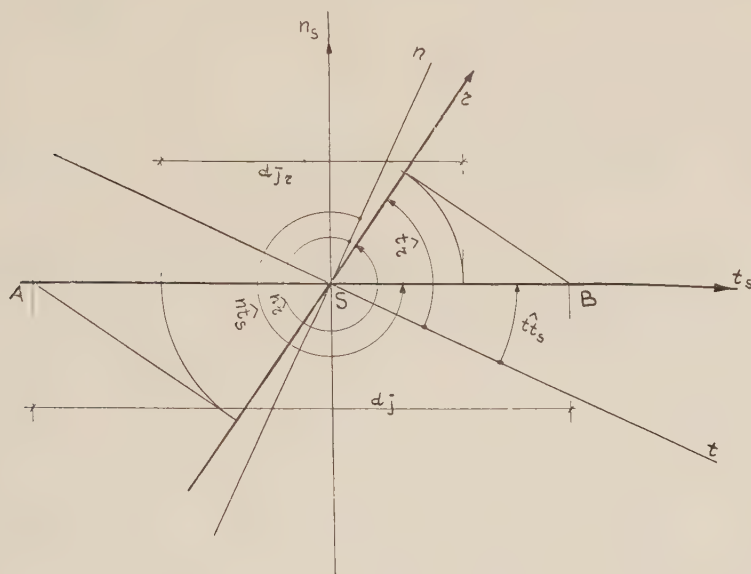


Fig. 2.

sistema di assi  $O(yz)$  del ribaltamento sulla tangente alla curva della proiezione di  $d\vec{j}$  su la retta  $r$ ».

Questo peso elastico assiale ribaltamento in  $t_s$  della proiezione di  $d\vec{j}$  su  $r$ , verrà indicato con la notazione  $(d\vec{j})_r$ ; e le sue componenti secondo  $t$  ed  $n$  rispettz. con  $(d\vec{j})_{rt}$  e  $(d\vec{j})_{rn}$ .

4. Per determinare quest'ultime indichiamo nel sistema  $O(tn)$  con:  $\hat{tr}$   $\hat{nr}$  gli angoli direttori della retta  $r$  e con  $\hat{tt}_s$   $\hat{nt}_s$  gli angoli direttori della tangente alla curva in  $S$ .

La proiezione di  $d\vec{j}$  sulla parallela per  $S$  alla retta  $r$ , risulterà allora:

$$(14) \quad (d\vec{j})_r = \cos(\hat{tr} - \hat{tt}_s) d\vec{j} = (\cos \hat{tr} \cos \hat{tt}_s + \cos \hat{nr} \cos \hat{nt}_s) d\vec{j}.$$

Se supponiamo di ribaltarla sulla tangente in  $S$ , le sue componenti secondo gli assi  $O(tn)$  saranno:

$$(d\vec{j})_{r,t} = \cos \hat{tt}_s (d\vec{j})_r \quad (d\vec{j})_{r,n} = \cos \hat{nt}_s (d\vec{j})_r$$



e quindi per la (14):

$$(15) \quad \begin{cases} (d\bar{j})_{r,t} = (\cos \hat{tr} \cos^2 \hat{tt}_s + \cos \hat{nr} \cos \hat{tt}_s \cos \hat{nt}_s) d\bar{j} \\ (d\bar{j})_{r,n} = (\cos \hat{tr} \cos \hat{tt}_s \cos \hat{nt}_s + \cos \hat{nr} \cos^2 \hat{nt}_s) d\bar{j}. \end{cases}$$

Poniamo ora:

$$(V) \quad \boxed{\alpha^2 = \cos^2 \hat{tt}_s \quad \alpha\beta = \cos \hat{tt}_s \cos \hat{nt}_s \quad \beta^2 = \cos^2 \hat{nt}_s}$$

$$(16) \quad d\bar{j}_t = \alpha^2 d\bar{j} = \alpha^2 \rho^2 d\varphi \quad d\bar{j}_{t,n} = \alpha\beta d\bar{j} = \alpha\beta \rho^2 d\varphi \quad d\bar{j}_n = \beta^2 d\bar{j} = \beta^2 \rho^2 d\varphi$$

e di conseguenza:

$$(VI) \quad \boxed{\bar{\mathfrak{I}}_t = \int_0^T \alpha^2 d\bar{j} \quad \bar{\mathfrak{I}}_{t,n} = \int_0^T \alpha\beta d\bar{j} \quad \bar{\mathfrak{I}}_n = \int_0^T \beta^2 d\bar{j}}$$

Poiché le dimensioni della (VI) sono quelle di un momento d'inerzia di un peso elastico  $d\varphi$ , possiamo porre:

$$(17) \quad \bar{\mathfrak{B}}_t^2 = \frac{\bar{\mathfrak{I}}_t}{\Phi} \quad \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 = \frac{\bar{\mathfrak{I}}_{tn}}{\Phi} \quad \bar{\mathfrak{B}}_n^2 = \frac{\bar{\mathfrak{I}}_n}{\Phi}$$

e scrivere:

$$(VII) \quad \boxed{\bar{\mathfrak{I}}_t = \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \Phi \quad \bar{\mathfrak{I}}_{tn} = \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \Phi \quad \bar{\mathfrak{I}}_n = \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \Phi}$$

analoghe alle espressioni dei momenti del II ordine del peso elastico longitudinale rispetto alle coppie di assi  $G(tn)$  uscenti da  $G$ .

Le (V), dipendenti unicamente dalla forma dell'asse dell'asta, le chiameremo « variabili d'asse ». Per  $ds = 1$  nel triangolo rettangolo formato da  $ds$  come ipotenusa e dalle sue componenti secondo gli assi  $O(tn)$ , rappresentano:

$\alpha^2$  la proiezione sull'ipotenusa del cateto componente di  $ds$  secondo  $t$ ;  
 $\beta^2$  quella del cateto componente di  $ds$  secondo  $n$ ;  
 $\alpha\beta$  l'altezza rispetto l'ipotenusa.

5. Integrando ora le (15) potremo scrivere:

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_{rt} &= \bar{\mathfrak{I}}_t \cos \hat{tr} + \bar{\mathfrak{I}}_{tn} \cos \hat{nr} \\ \bar{\mathfrak{I}}_{rn} &= \bar{\mathfrak{I}}_{tn} \cos \hat{tr} + \bar{\mathfrak{I}}_n \cos \hat{nr}. \end{aligned}$$

Da queste poi si passa alle componenti secondo  $y, z$  mediante le:

$$\bar{\mathfrak{I}}_{r,y} = \bar{\mathfrak{I}}_{r,t} \cos \hat{yt} - \bar{\mathfrak{I}}_{r,n} \cos \hat{zt} \quad \bar{\mathfrak{I}}_{r,z} = \bar{\mathfrak{I}}_{r,t} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{I}}_{r,n} \cos \hat{yt}$$

e quindi:

$$(19) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_{r,y} &= \bar{\mathfrak{I}}_t \cos \hat{tr} \cos \hat{yt} + \bar{\mathfrak{I}}_n \cos \hat{nr} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{I}}_{tn} (\cos \hat{nr} \cos \hat{yt} - \cos \hat{tr} \cos \hat{zt}) \\ \bar{\mathfrak{I}}_{r,z} &= \bar{\mathfrak{I}}_t \cos \hat{tr} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{I}}_n \cos \hat{nr} \cos \hat{yt} + \bar{\mathfrak{I}}_{tn} (\cos \hat{nr} \cos \hat{zt} + \cos \hat{tr} \cos \hat{yt}). \end{aligned}$$

Se della retta  $r$  conosciamo i coseni direttori  $\cos \hat{yr}$ ,  $\cos \hat{zr}$  nel sistema  $O(yz)$ , poiché è:

$$\hat{tr} = \hat{yr} - \hat{yt}$$

avremo le espressioni

$$\begin{aligned} \cos \hat{tr} &= \cos \hat{yr} \cos \hat{yt} + \cos \hat{zr} \cos \hat{zt} \\ \cos \hat{nr} &= \cos \hat{zr} \cos \hat{yt} - \cos \hat{yr} \cos \hat{zt} \end{aligned}$$

che sostituite nelle (19) tenendo presente le (VII) le trasformano nelle:

$$(VIII) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_{r,y} &= \left\{ \begin{aligned} &\cos \hat{yr} [\bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{yt} + \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \cos^2 \hat{zt} - 2 \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \cos \hat{yt} \cos \hat{zt}] \\ &+ \cos \hat{zr} [(\bar{\mathfrak{B}}_t^2 - \bar{\mathfrak{B}}_n^2) \cos \hat{yt} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{yt} - \cos^2 \hat{zt})] \end{aligned} \right\} \cdot \Phi \\ \bar{\mathfrak{I}}_{r,z} &= \left\{ \begin{aligned} &\cos \hat{yr} [(\bar{\mathfrak{B}}_t^2 - \bar{\mathfrak{B}}_n^2) \cos \hat{yt} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{yt} - \cos^2 \hat{zt})] \\ &+ \cos \hat{zr} [\bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{zt} + \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \cos^2 \hat{yt} + 2 \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \cos \hat{yt} \cos \hat{zt}] \end{aligned} \right\} \cdot \Phi \end{aligned}$$

che sono le espressioni delle componenti richieste dal quesito, nella loro forma più generale.

6. Se per la retta  $r$  è:

$$\cos \hat{yr} = 1 \quad \cos \hat{zr} = 0,$$

cioè la retta  $r$  è parallela ad  $y$  e dello stesso verso, oppure con essa coincidente, le (VIII) diverranno:

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_y &= [\bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{yt} + \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \cos^2 \hat{zt} - 2 \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \cos \hat{yt} \cos \hat{zt}] \Phi \\ \bar{\mathfrak{I}}_{yz} &= [(\bar{\mathfrak{B}}_t^2 - \bar{\mathfrak{B}}_n^2) \cos \hat{yt} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{yt} - \cos^2 \hat{zt})] \Phi. \end{aligned}$$

Se per la retta  $r$  è:

$$\cos \hat{yr} = 0 \quad \cos \hat{zr} = 1,$$

cioè la retta  $r$  è parallela a  $z$  e dello stesso verso, oppure con essa coincidente, le (VIII) diverranno:

$$(21) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_{zy} &= [(\bar{\mathfrak{B}}_t^2 - \bar{\mathfrak{B}}_n^2) \cos \hat{yt} \cos \hat{zt} + \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{yt} - \cos^2 \hat{zt})] \Phi \\ \bar{\mathfrak{I}}_z &= [\bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{zt} + \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \cos^2 \hat{yt} - 2 \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \cos \hat{yt} \cos \hat{zt}] \Phi \end{aligned}$$

e ponendo analogamente alle (II):

$$(IX) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}}_y^2 &= \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \cos^2 \hat{z}t + \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{y}t - 2 \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t \\ \bar{\mathfrak{B}}_z^2 &= \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \cos^2 \hat{y}t + \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{z}t + 2 \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t \\ \bar{\mathfrak{B}}_{yz}^2 &= (\bar{\mathfrak{B}}_t^2 - \bar{\mathfrak{B}}_n^2) \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t + \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2 (\cos^2 \hat{y}t - \cos^2 \hat{z}t) \end{aligned}$$

potremo scrivere le (20) e le (21) rispettivamente

per  $r \equiv // y$

$$(X) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_y &= \bar{\mathfrak{B}}_y^2 \Phi & \bar{\mathfrak{I}}_{yz} &= \bar{\mathfrak{B}}_{yz}^2 \Phi \end{aligned}$$

per  $r \equiv // z$

$$(XI) \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{I}}_{yz} &= \bar{\mathfrak{B}}_{yz}^2 \Phi & \bar{\mathfrak{I}}_z &= \bar{\mathfrak{B}}_z^2 \Phi \end{aligned}$$

7. Se l'asta è in posizione tale per cui  $\cos yt = 1$ ;  $\cos zt = 0$ , cioè  $t \equiv y$   $n \equiv z$  le (X) (XI) rimangono formalmente identiche avendosi dalle (IX)

$$\bar{\mathfrak{B}}_y^2 = \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \quad \bar{\mathfrak{B}}_z^2 = \bar{\mathfrak{B}}_n^2 \quad \bar{\mathfrak{B}}_{yz}^2 = \bar{\mathfrak{B}}_{tn}^2.$$

8. Se l'asta curva degenera in una retta sarà per ogni sua sezione

$$\cos \hat{t}t_s = 1 \quad \cos \hat{n}t_s = 0;$$

le « variabili d'asse » diverranno pertanto:

$$\alpha^2 = 1 \quad \beta^2 = 0 \quad \alpha\beta = 0.$$

Di conseguenza:

$$\bar{\mathfrak{I}}_t = 0 \quad \bar{\mathfrak{I}}_{tn} = 0$$

e quindi

$$\bar{\mathfrak{B}}_n^2 = 0 \quad \bar{\mathfrak{B}}_{tn} = 0,$$

per cui le (IX) si ridurranno alle:

$$(IX') \quad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}}_y^2 &= \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{y}t & \bar{\mathfrak{B}}_z^2 &= \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos^2 \hat{z}t & \bar{\mathfrak{B}}_{yz}^2 &= \bar{\mathfrak{B}}_t^2 \cos \hat{y}t \cos \hat{z}t \end{aligned}$$

le (X) e le (XI) rimanendo formalmente identiche.

9. Se poi l'asta retta è in posizione tale per cui

$$\cos \hat{y}t = 1 \quad \cos \hat{z}t = 0$$

cioè

$$t \equiv y \quad n \equiv z,$$

dalle (IX) scaturiscono:

$$\overline{\mathfrak{B}}_y^2 = \overline{\mathfrak{B}}_t^2 \quad \overline{\mathfrak{B}}_z^2 = 0 \quad \overline{\mathfrak{B}}_{yz}^2 = 0$$

e di conseguenza:

$$(X') \quad \boxed{\overline{\mathfrak{I}}_t = \overline{\mathfrak{B}}_t^2 \cdot \Phi \quad \overline{\mathfrak{I}}_{tn} = 0}$$

$$(XI') \quad \boxed{\overline{\mathfrak{I}}_{nt} = 0 \quad \overline{\mathfrak{I}}_n = 0}$$

**Meccanica.** — *Sul flusso secondario nello strato limite tridimensionale.* Nota di BRUNO BERTOTTI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

1. È noto che nel flusso a grandi numeri di Reynolds la transizione dal regime di aderenza a contatto con un ostacolo a quello della vena libera, ove le forze viscosive sono trascurabili, avviene entro uno strato sottilissimo rispetto alle dimensioni del corpo; su questo fatto sperimentale, valido sotto condizioni abbastanza generali, è basata la teoria di Prandtl dello strato limite.

Il problema che forma oggetto di questo lavoro riguarda la possibilità della presenza entro tale strato di una componente della velocità di flusso normale alla direzione della corrente all'esterno. Se consideriamo, ad esempio, un corpo di rotazione investito da una corrente parallela all'asse, è ovvio, per ragioni di simmetria, che ogni linea di corrente è contenuta in un piano meridiano, e quindi questo « flusso secondario » è assente; ma lo stesso non potrà dirsi, in generale, per una superficie qualsiasi. Nel caso concreto di un'ala a freccia, per esempio, il calcolo mostra che la corrente all'interno dello strato limite assume, in vicinanza della linea di distacco, una direzione di flusso pressoché longitudinale, dal centro verso l'esterno; il che non avviene per la corrente perfetta esterna <sup>(1)</sup>.

In un recente lavoro di G. Gotusso <sup>(2)</sup>, in cui viene sviluppato un metodo di Levi-Civita <sup>(3)</sup> per lo studio dello strato limite attorno ad una superficie generica, si suppone esplicitamente che la velocità del « flusso secondario » sia da trattarsi alla stessa stregua della componente normale alla super-

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) Citiamo solo la rassegna di FRANKLIN K. MOORE, *Three-dimensional boundary layer theory. Advances in Applied Mechanics*, vol. IV (New York 1956); soprattutto il cap. V, §§ 1 e 2.

(2) « L'Aerotecnica », vol. 36, p. 1 (1956).

(3) *Allgemeine Folgerungen aus der Prandtl'schen Grenzschichttheorie*. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929), p. 30.



ficie, e sia quindi da trascurarsi rispetto alla componente parallela alla direzione della corrente all'esterno. A precisare la forte limitazione che tale ipotesi comporta, ci proponiamo di mostrare che il « *flusso secondario* » è presente in ogni caso in cui le linee di corrente esterne, proiettate ortogonalmente sull'ostacolo, non segnano ivi delle geodetiche.

2. Per definire esattamente il concetto di « *flusso secondario* » scegliamo anzitutto, come ha fatto Gotusso, un particolare riferimento adimensionale nell'interno dello strato limite nella maniera seguente: le linee di corrente esterne, proiettate ortogonalmente sull'ostacolo  $\Omega$ , determineranno ivi le linee coordinate  $x^1$ , mentre le linee  $x^2$  saranno normali a queste ultime;  $x^0$  sarà infine la distanza ortogonale da  $\Omega$ . Chiamiamo « *flusso secondario* » la componente del flusso nella direzione  $x^2$ .

Facciamo l'ipotesi essenziale che lo spessore dello strato limite sia trascurabile rispetto al raggio di curvatura gaussiana di  $\Omega$ . In tali condizioni la metrica acquista la forma:

$$(1) \quad ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (4),$$

ove

$$(2) \quad g_{12} = 0$$

e  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  possono ritenersi funzioni di  $x^1$  e  $x^2$  solamente <sup>(5)</sup>.

Le equazioni adimensionali della quantità di moto nello strato limite sono:

$$(3) \quad \rho \frac{dv^i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau_i}{\partial x^0},$$

ove

$$(4) \quad \tau_i \equiv \mu \frac{\partial v_i}{\partial x^0},$$

essendo  $\mu$  il reciproco del numero di Reynolds. La terza equazione ci dice solamente che  $p$  non dipende da  $x^0$ . Sul contorno esterno dello strato limite avremo:

$$(5) \quad \begin{aligned} \rho &= \bar{\rho}(x^i) \\ v^1 &= \bar{v}^1(x^i) \\ \bar{v}^0 &= \bar{v}^2 = 0; \end{aligned}$$

e dovremo riguardare

$$\bar{\tau}_i = 0$$

perché il fluido è ivi ritenuto perfetto.

(4) Gli indici latini assumono i valori 1 e 2; useremo qui la convenzione di somma.

(5) Per quanto concerne i dettagli di questo metodo, e le equazioni di moto che se ne derivano, rimandiamo al lavoro di LEVI-CIVITA citato nella nota (3).

La pressione  $p$  può essere eliminata dalla (3) ricordando che anche entro lo strato limite  $p = \bar{p}$ , e quindi

$$(6) \quad \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x^i};$$

per cui si ottiene:

$$(7) \quad \rho \frac{dv_i}{dt} - \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_i}{dt} - \frac{\partial \tau_i}{\partial x^0} = 0.$$

Le derivate lagrangiane

$$\frac{dv_i}{dt} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i|0} v^0 + v_{i|j} v^j$$

possono essere scritte esplicitamente ricordando il significato della derivazione tensoriale:

$$v_{i|j} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - v_0 \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\} - v_s \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\},$$

ove i «simboli di Christoffel»  $\left\{ \begin{smallmatrix} s \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\}$  sono un'abbreviazione per

$$(8) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\} \equiv g^{sr} \{ i \ j, r \} \equiv \frac{1}{2} g^{sr} \left( \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right).$$

Si noti anche che  $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ i \ j \end{smallmatrix} \right\}$  è nullo nel nostro riferimento. Si constata facilmente che la (7) acquista la forma:

$$(9) \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x^0} v^0 + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x^j} v^j - \rho v^s v^j \{ i \ j, s \} - \\ - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^0} \bar{v}^0 - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} \bar{v}^j + \bar{\rho} \bar{v}^s \bar{v}^j \{ i \ j, s \} - \frac{\partial \tau_i}{\partial x^0} = 0.$$

Per  $i = 2$ , ricordando le condizioni (5) verificate all'esterno dello strato limite, la (9) si riduce a:

$$(10) \quad \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_2}{\partial x^0} v^0 + \rho \frac{\partial v_2}{\partial x^j} v^j - \rho v^j v^s \{ 2 \ j, s \} + \bar{\rho} (\bar{v}^1)^2 \{ 2 \ 1, 1 \} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x^0} = 0.$$

È chiaro allora che la condizione

$$(11) \quad v_2 = g_{22} v^2 = 0$$

non rende la (10) identicamente soddisfatta, a motivo della presenza dei simboli di Christoffel; ma porta alla conseguenza

$$(12) \quad [\bar{\rho} (\bar{v}^1)^2 - \rho (v^1)^2] \{ 2 \ 1, 1 \} = 0.$$

Ora l'espressione in parentesi quadra certamente non è nulla per ogni valore di  $x^0$  in corrispondenza ad un punto generico  $(x^1, x^2)$  di  $\Omega$ ; mentre  $\{ 2 \ 1, 1 \}$  non dipende da  $x^0$ . Si deve quindi concludere che

$$\{ 2 \ 1, 1 \} = 0,$$

ossia

$$(13) \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0.$$

Quest'ultima condizione equivale ad asserire che le linee  $x^2 = \text{costante}$  su  $\Omega$  sono geodetiche. Ciò può venire confermato sia mediante un calcolo diretto che con la seguente considerazione geometrica: la «curvatura tangenziale», cioè la proiezione sulla superficie  $\Omega$  del vettore di curvatura, delle linee coordinate  $x^1$  è

$$(14) \quad \frac{1}{\rho^1} = - \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial x^2} \quad (6);$$

il suo annullarsi significa allora che le normali a tali linee sono normali a  $\Omega$ , e che quindi queste ultime sono geodetiche. Se, viceversa, la (13) non è verificata in una regione  $\omega$  di  $\Omega$  e, come avviene in generale nei casi concreti, il termine in parentesi quadra al primo membro della (12) non si annulla mai all'interno dello strato limite, potremo concludere che  $v^2$  deve essere diverso da zero in tutta la porzione dello strato limite corrispondente ad  $\omega$ . Si noti, tuttavia, che non si potrà trarre in generale alcuna conclusione ove al contrario le linee  $x^1$  siano geodetiche su  $\Omega$ . Analogamente, se  $v^2$  è assai piccola, dell'esame diretto dei vari termini della (10), si conclude facilmente che il primo membro della (13) è dello stesso ordine; cioè che le linee  $x^1$  su  $\Omega$  si scostano di poco da linee geodetiche.

3. Dopo che l'esame diretto delle equazioni di moto ha mostrato che l'approssimazione adottata da Gotusso non è, in generale, valida, un punto oscuro attende tuttavia di essere chiarito. Viene infatti spontaneo chiedersi per quale ragione  $v^1$ , che, al pari di  $v^0$ , si annulla sull'ostacolo  $\Omega$  e sul contorno esterno dello strato limite, non possa essere considerato, al pari di  $v^0$ , alla stregua di una grandezza infinitesima.

Osserviamo che l'ipotesi fondamentale su cui si basa la teoria dello strato limite non è tanto la piccolezza di  $v^0$ , quanto quella che la derivata di ogni grandezza rispetto a  $x^0$  sia assai più grande della grandezza stessa. La piccolezza di  $v^0$  è allora una conseguenza necessaria dell'equazione di continuità:

$$(15) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^0)}{\partial x^0} + (\rho v^i)_{,i} = 0.$$

Se infatti  $v^0$  non fosse assai piccolo, il termine  $\frac{\partial (\rho v^0)}{\partial x^0}$ , grandissimo, non potrebbe essere compensato da alcuno degli altri termini, tutti di ordine finito. Nessuna conclusione del genere sussiste invece per  $v^2$ .

Si noti inoltre che il fatto che  $v^2$  si annulli su  $\Omega$  e al confine con la corrente perfetta, non permette di concludere che tale componente è, in ogni punto, più piccola di  $v^1$ ; e tanto meno che è trascurabile di fronte a questa ultima. Infatti, nei punti di  $\Omega$  che appartengono alla linea di distacco,  $v^1$  si annulla con la sua derivata normale, mentre  $v^2$  si annulla senza che, in generale, sia eguale a zero anche la sua derivata. Pertanto, nell'intorno del primo ordine di  $x = 0$ , sulla linea di distacco, è genericamente

$$v^1 < v^2.$$

(6) Vedi L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I (Pisa 1922), § 98.

**Meccanica razionale.** — *Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla.* Nota di GIUSEPPE GRIOLI, presentata (\*) dal Corrisp. A. TONOLO.

Il problema dinamico del moto rispetto ad un suo punto,  $O$ , fisso o coincidente con il baricentro, di un solido soggetto a forze di potenza nulla, nell'ipotesi che l'ellissoide d'inerzia relativo ad  $O$  sia di rivoluzione si può ridurre alle quadrature <sup>(1)</sup> ed ha interesse, tra l'altro, in questioni di fisica atomica <sup>(2)</sup>. L'analogo problema nel caso di un ellissoide a tre assi è notevolmente più difficile e non riducibile, in generale, alle quadrature.

Di recente ne ho stabilito le equazioni generali, determinando tutti i possibili moti rotatori e dimostrando l'impossibilità dinamica di precessioni regolari <sup>(3)</sup>.

Rifacendomi a quelle equazioni in questa Nota invece determino una classe di precessioni che potrebbero dirsi *semiregolari*, in quanto è invariabile la velocità di precessione ma non quella di rotazione propria, ed inoltre mostro l'esistenza di un tipo di movimenti che non hanno carattere di precessione.

I. — EQUAZIONI GENERALI. — Sia  $C$  un qualunque corpo rigido il cui ellissoide di inerzia relativo ad un suo punto  $O$  è a tre assi. Riferito  $C$  ad una terna solidale di origine  $O$  di versori  $i, j, k$ , l'omografia d'inerzia,  $\sigma$ , è rappresentata dalla matrice

$$(1) \quad \sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{vmatrix},$$

con evidente significato dei simboli e avendo supposto  $C' = 0$ , com'è certamente lecito, pur di orientare opportunamente la terna intorno al suo terzo asse [che può scegliersi comunque].

Detta  $\omega$  la velocità angolare, le equazioni che regolano il moto di  $C$  nella ipotesi che  $O$  sia fisso, con vincolo liscio, o nello studio del moto di  $C$  rispetto ad una terna con origine in  $O$  e assi di orientamento invariabile, se  $O$  coincide con il baricentro, si scrivono

$$(2) \quad \sigma \dot{\omega} + \omega \wedge \sigma \omega - \lambda \omega \wedge \mathbf{H} + 2 \omega \wedge \sigma \mathbf{H} = 0,$$

$$(3) \quad \dot{\mathbf{H}} + \omega \wedge \mathbf{H} = 0,$$

con

$$(4) \quad \lambda = A + B + C.$$

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) G. GRIOLI, *Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla*, « Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni », fasc. III-IV (1947).

(2) GOLDSTEIN, *The classical Motion of a rigid charged body in a magnetic field*, « American Journal of Physics », vol. 19, p. 100 (1951).

(3) G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*. « Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova », vol. XXVII (1957).



Nelle (2), (3),  $\mathbf{H}$  è un vettore invariabile da cui derivano le forze di potenza nulla presenti. Ad esempio, nel caso delle forze centrifughe composte dovute alla rotazione terrestre  $\mathbf{H}$  coincide con la velocità angolare della Terra [e la (2) vale per  $O$  coincidente con il baricentro]; invece se la sollecitazione è dovuta all'interazione tra una distribuzione con densità  $\mu^*$  di cariche elettriche solidali a  $C$  ed un campo magnetico uniforme,  $\mathbf{H}^*$ , si ha

$$(5) \quad \mathbf{H} = \frac{A^*}{A} \mathbf{H}^*,$$

se con  $A^*$  si denota il momento d'inerzia rispetto al primo asse solidale (4) di una distribuzione di massa avente densità  $\mu^*$ .

Le equazioni (2), (3) ammettono i due integrali primi

$$(6) \quad \sigma \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 2 E_0 = \text{cost.},$$

$$(7) \quad (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}) \times \sigma \mathbf{H} = \mathbf{h} = \text{cost.},$$

di cui il primo è l'integrale dell'energia, e la relazione in termini finiti

$$(8) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{H} = H^2 = \text{cost.}$$

2. - ADATTAMENTO DELLE EQUAZIONI GENERALI ALLA RICERCA DI UN PARTICOLARE TIPO DI PRECESSIONI. — Dette  $p, q, r$  le componenti della velocità angolare rispetto agli assi solidali, cercherò — se ne esistono — tutti i moti dinamicamente possibili di  $C$  che siano delle precessioni aventi come asse di precessione la parallela ad  $\mathbf{H}$  condotta per  $O$ , costante la velocità di precessione e uguale a  $\pi/2$  l'angolo di nutazione.

In altri termini, assunto l'asse solidale di versore  $\mathbf{k}$  coincidente con quello di figura, supporrò

$$(9) \quad \boldsymbol{\omega} = a\mathbf{H} + r\mathbf{k},$$

con  $a$  costante non nulla.

Alla (9) va associata la condizione

$$(10) \quad \dot{r} \neq 0,$$

dato che per  $C$  non sono dinamicamente possibili precessioni regolari che non degenerino in moti rotatori uniformi (3).

Denotando con  $H_1, H_2, H_3 = 0$  le componenti di  $\mathbf{H}$  rispetto agli assi solidali, gli integrali primi (6), (7) e la relazione (8), in base a (9), si esplicitano in

$$(11) \quad a^2 (AH_1^2 + BH_2^2) - 2a (A' H_2 + B' H_1) r + Cr^2 = 2 E_0,$$

$$(12) \quad (a + 1) (AH_1^2 + BH_2^2) - (A' H_2 + B' H_1) r = h,$$

$$(13) \quad H_1^2 + H_2^2 = H^2.$$

(4) In tal caso la (2) mantiene la sua validità purché l'ellissoide principale di centro  $O$  relativo alla distribuzione di masse con densità  $\mu^*$  e quello d'inerzia abbiano i medesimi assi di simmetria e proporzionali le lunghezze dei semiassi [vedi loc. cit. in nota (3)].

Comincio con l'osservare che deve essere

$$(14) \quad a + 2 \neq 0.$$

Infatti, se è  $a + 2 = 0$ , basta moltiplicare la (12) per 4 e sommare con la (11) per dedurre che  $r$  deve essere costante, in contrasto con la (10).

Supposta dunque verificata la (14), da (11), (12), (13) si deduce:

$$(15) \quad \begin{cases} (A - B) H_1^2 = \frac{Cr^2 + \alpha}{a(a+2)}, \\ (A - B) H_2^2 = -\frac{Cr^2 + \beta}{a(a+2)} \end{cases}$$

$$(16) \quad a(a+2)(A' H_2 + B' H_1)r = (Cr^2 - 2E_0)(a+1) + ha^2,$$

con

$$(17) \quad \alpha = 2(ha - E_0) - a(a+2)BH^2, \quad \beta = 2(ha - E_0) - a(a+2)AH^2.$$

Sulle (15), (17) si riconosce che non può essere  $A = B$  senza che risulti  $r \equiv \text{cost.}$ , in contrasto con la (10). Nel seguito supporremo quindi

$$(18) \quad A - B \neq 0.$$

È necessario distinguere due casi:

$$\text{Caso I} \quad a + 1 \neq 0.$$

Da (16) si deduce che non può essere  $A' = B' = 0$  senza che ne segua  $r \equiv \text{cost.}$ , in contrasto con la (10). Se  $a + 1 \neq 0$  supporrò, pertanto,

$$(19) \quad A' \neq 0$$

$$\text{Caso II} \quad a + 1 = 0.$$

Non potendo essere  $r \equiv \text{cost.}$ , da (15), (16) segue

$$(20) \quad A' = B' = 0, \quad h = 0.$$

3. — PRECESSIONI DINAMICAMENTE POSSIBILI. — Determinerò tutte le precessioni caratterizzate dalla (9).

Caso I. — Introducendo la (15) nella (16) si deduce <sup>(5)</sup>

$$(21) \quad \left\{ A' \sqrt{\frac{a(a+2)(Cr^2 + \beta)}{B-A}} + B' \sqrt{\frac{a(a+2)(Cr^2 + \alpha)}{A-B}} \right\} r = \\ = (Cr^2 - 2E_0)(a+1) + ha^2.$$

La (21) deve sussistere identicamente rispetto a  $r$ . Ma poiché il secondo membro è razionale intero in  $r^2$ , il primo membro di (21) deve potere assu-

(5) Per opportuna scelta dei versi degli assi di riferimento si potrà sempre supporre positiva la determinazione dei radicali che esprimono  $H_1$ ,  $H_2$ , in base a (15).

mere un tale aspetto. Tenuto conto di (17), (18), (19), si deduce, come condizione necessaria e sufficiente perché ciò possa essere <sup>(6)</sup>

$$(22) \quad B' = 0 \quad , \quad 2(ha - E_0) = a(a + 2)AH^2,$$

nonchè

$$(23) \quad \frac{a(a+2)}{B-A} > 0.$$

Supposte verificate le (22), la (21) si esaurisce nelle ulteriori condizioni

$$(24) \quad ha^2 - 2E_0(a+1) = 0,$$

$$(25) \quad A' \sqrt{\frac{a(a+2)}{B-A}} = (a+1) \sqrt{C}.$$

Le (22,2), (24) determinano  $h$  ed  $E_0$ , mentre la (25) determina  $a$ . Conseguentemente la (23) equivale a

$$(26) \quad A'^2 + C(A-B) > 0,$$

che impone una condizione strutturale.

Proiettando la (2) sull'asse di versore  $\mathbf{k}$  si ottiene, in base a (1), (4), (22),

$$(27) \quad C\dot{r} + a(a+2)(B-A)H_1H_2 = 0,$$

la quale, per le (15), (17), (22), (25), diviene

$$(28) \quad A'\dot{r} - r\sqrt{(B-A)^2(a+1)^2H^2 - A'^2r^2} = 0.$$

È facile constatare che le due equazioni vettoriali (2), (3) sono verificate allora e soltanto allora che si ritengano  $H_1, H_2$  definite [vedi nota <sup>(5)</sup>] dalle (15), con  $r$  integrale di (28) e si tenga conto di (17), (22), (25), (26). La (28) è di immediata integrazione, avendosi

$$(29) \quad r^2 = \frac{4\rho^2 e^{2\left(\frac{\rho}{A'}t + v\right)}}{A'^2 \left[ e^{2\left(\frac{\rho}{A'}t + v\right)} + 1 \right]},$$

con

$$(30) \quad \rho = (B-A)(a+1)H$$

e  $v$  costante arbitraria.

Si conclude che nel caso I *sono dinamicamente possibili precessioni del tipo (9) allora e soltanto allora che l'asse di figura appartenga ad uno dei piani principali relativi al punto O [(19), (22)], subordinatamente alla condizione strutturale (26).*

*In esse la velocità di precessione, invariabile, è  $aH$ , con  $a$  soddisfacente alla (25) e la velocità di rotazione propria è espressa da (29), (30).*

(6) Naturalmente, può aversi invece  $B' \neq 0$ ,  $A' = 0$ , ecc., anziché le (19), (22). Non considero tale eventualità sostanzialmente equivalente alla prima, potendo sempre inter cambiarsi la funzione degli assi di indice 1, 2.

Caso II. — Sussistono le (20) e la (16) diviene un'identità. Le (15), (17) determinano  $H_1$ ,  $H_2$ , mentre la (27), scritta per  $a = -1$  determina  $r$  per quadrature. Le (23), (26) non sono più necessarie. Si può constatare che, tenuto conto di (15), (17), (20), (27) e di  $a = -1$ , le equazioni vettoriali (2), (3) sono verificate. La determinazione di  $r$  porta in generale a integrali ellittici. Semplice si presenta quella dell'angolo di rotazione propria,  $\varphi$ , della terna solidale rispetto ad una fissa, avente il terzo asse parallelo ad  $\mathbf{H}$ . Precisamente, in base all'integrale dell'energia, l'angolo  $\varphi$  si ricava per quadratura dall'uguaglianza

$$(31) \quad C\dot{\varphi}^2 = H^2 (B - A) \sin^2 \varphi + 2 E_0 - B^2 H^2.$$

Nel caso II si conclude, pertanto, che *sono possibili precessioni del tipo (9) se e solo se l'asse di figura è principale per O. La velocità di precessione, costante, è uguale a  $-H$ , mentre quella di rotazione propria soddisfa all'equazione (31).*

4. — UNA NUOVA CLASSE DI MOTI DINAMICAMENTE POSSIBILI. — Indicherò una nuova classe di movimenti di  $C$  rinunciando, per brevità, a mostrare come le loro espressioni analitiche verifichino le equazioni fondamentali (2), (3). *Tali movimenti possono aver luogo soltanto se la struttura materiale di  $C$  è tale che i piani ciclici dell'ellissoide principale di centro  $O$  sono tra loro ortogonali*, condizione che si traduce nella relazione.

$$(32) \quad A = \frac{B+C}{2},$$

pur di indicare, ora, con  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i momenti principali relativi ad  $O$ .

Sia  $b$  un qualunque numero soddisfacente alla relazione

$$(33) \quad \frac{b^4 - 2b^3 + 2b^2 - 2b - 3}{b^4 + 2b^3 + 2b^2 + 2b - 3} = \frac{B}{C} \neq 1.$$

*Per  $C$  sono dinamicamente possibili i movimenti rappresentati, con riferimento alla terna principale di origine  $O$ , dalle uguaglianze*

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= \frac{H(v e^{2bHt} - 1)}{v e^{2bHt} + 1}, \quad H_2 = \frac{(b-1)H\sqrt{2v}e^{bHt}}{\sqrt{b^2+1}(v e^{2bHt} + 1)}, \quad H_3 = \frac{(b+1)H\sqrt{2v}e^{bHt}}{\sqrt{b^2+1}(v e^{2bHt} + 1)}, \\ p &= -\frac{1+b^2}{2}H_1, \quad q = -\frac{b^3+b^2+3b-1}{2(b-1)}H_2, \quad r = -\frac{b^3-b^2+3b+1}{2(b+1)}H_3, \end{aligned} \right.$$

con  $v$  costante arbitraria positiva.



**Astronomia.** — *La moderna colorimetria delle stelle binarie ed il nuovo fotometro colorimetrico dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario.* Nota I di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (\*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La grande importanza che ha lo studio dei sistemi binari, risiede principalmente nel fatto che è possibile, dopo calcolata la loro orbita, di conoscere numerose caratteristiche fisiche, quando sia noto il loro tipo spettrale od il loro colore. Per esempio la massa, la parallasse dinamica, la temperatura ecc. sono nozioni facilmente ricavabili e nello stesso tempo di grande interesse, anche perché permettono di estendere le nostre cognizioni sulla costituzione fisica dell'insieme delle singole stelle. Basta pensare ad esempio che il diagramma massa - luminosità, così importante per lo studio dell'evoluzione stellare, è stato formato in maggior parte con i dati forniti dai sistemi binari.

Purtroppo però, su circa 25000 stelle doppie o multiple, si conoscono con precisione pochissimi tipi spettrali di singole componenti; anzi spesso è noto soltanto il tipo della componente più luminosa od anche della luce globale.

Per colmare tale lacuna, sono state fatte osservazioni colorimetriche di stelle binarie, con metodi vari. Ricordiamo, fra le più recenti, quelle del Muller<sup>(1)</sup>, del Wallenquist<sup>(2)</sup> e soprattutto dell'Hopmann<sup>(3)</sup>; ma si è ancora ben lontani dal concludere il lavoro.

Per questa ragione, il Direttore dell'Osservatorio di Roma mi ha incaricata di iniziare una serie di misure colorimetriche di stelle binarie, ed a tal fine mi ha per qualche tempo inviata all'Osservatorio astronomico di Vienna, dove ho appreso, sotto la guida del Direttore prof. J. Hopmann, specialista in materia, il metodo e la riduzione delle osservazioni in questione.

Come è evidente, data la grande vicinanza apparente delle due stelle componenti un sistema binario, non sarebbe possibile far uso di celle fotoelettriche, ma occorrono altri tipi di fotometro. A tale scopo, l'Osservatorio di Roma, ha fatto costruire, sotto la mia sorveglianza, dal Laboratorio di precisione dell'Esercito, un fotometro colorimetrico, analogo a quello usato per le stelle binarie dall'Osservatorio di Vienna.

Il fotometro verrà applicato al grande equatoriale Steinheil di 390 mm. di apertura e m. 5,25 di distanza focale. Ma riservandomi di dare, in una successiva Nota, la descrizione dello strumento e dei primi lavori compiuti con esso, passo intanto ad illustrare il metodo che seguirò nelle osservazioni.

(\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) P. MULLER, *Colorimétrie de 51 étoiles doubles*, «Ann. d'Astroph.», vol. 15 (1952).

(2) A. WALLENQUIST, *Some preliminary results of photoelectric determinations of colours and magnitude differences in double stars*, «Ark. f. Astroph.», 1 (1950) e «Medd. Upsala», N. 103.

(3) J. HOPMANN, *Photometrisch-Kolorimetrische Beobachtungen von visuellen Doppelsternen*. «Mitteil. Wien», B. 6, N. 12 (1953); B. 7, N. 13, 14 (1955).

2. La teoria delle osservazioni colorimetriche fu trattata dapprima dal Wilsing <sup>(4)</sup> e poi sostanzialmente esposta dallo Schnauder <sup>(5)</sup>. Ne ricordo ora i punti essenziali.

Consideriamo un corpo nero, avente temperatura assoluta  $T$ , espressa in centigradi, e chiamiamo con  $\lambda$  la lunghezza d'onda espressa in micron. Il potere emissivo è allora dato dalla nota formula di Planck:

$$(1) \quad I(\lambda, T) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}$$

in cui  $e$  è la base dei logaritmi naturali,  $c_2$  è una costante che, con le unità scelte, vale 14350 e  $c_1$  è una quantità dipendente dalla grandezza e dalla lontananza dell'oggetto radiante.

Per rendere la (1) facilmente applicabile, consideriamo per un momento il caso di un corpo nero per cui l'esponente  $c_2/\lambda T$  sia grande, in modo da potersi trascurare il termine  $-1$  del denominatore. Abbiamo allora approssimativamente:

$$(2) \quad I(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-c_2/\lambda T}.$$

Per una maggiore approssimazione, poniamo

$$(3) \quad f = (1 - e^{-c_2/\lambda T})^{-1}$$

e cerchiamo di esprimere  $f$  sotto forma di potenze di  $e$  con esponente dipendente linearmente da  $\lambda$ . A tal fine, sviluppiamo  $\log f$  in serie di potenze di  $1/\lambda$  ed introduciamo due parametri  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  funzioni della temperatura.

Posto poi  $c_2/T = x$  ed  $1/\lambda = y$  scriviamo con Schnauder:

$$(4) \quad \log f(xy) = \gamma_0(x) + y \gamma_1(x),$$

essendo sufficiente, per l'approssimazione richiesta, arrestare la serie alla prima potenza di  $1/\lambda$ .

Lo Schnauder risolve quindi la (4), determina cioè i parametri  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  imponendo che il quadrato della differenza fra i due membri sia minima, e dà infine una tabella dei valori  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  trovati al variare di  $c_2/T$ .

La formula di Planck diviene dunque:

$$(5) \quad I(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T} e^{\gamma_0 + \gamma_1/\lambda}$$

in cui i coefficienti  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  vengono ricavati volta per volta dalla tabella già calcolata, in funzione di  $c_2/T$ .

L'errore che si commette, usando la (5) al posto della (1) è al massimo dell'1,5 per cento.

3. - Ciò posto, il principio dell'osservazione colorimetrica consiste nel paragonare il colore di una stella con quella di una stella artificiale, otte-

(4) F. WILSING, *Über die Beziehungen zwischen den Farben, den Temperaturen und den Durchmessern der Sterne*, «Astron. Nachr.», B. 214 p. 185.

(5) SCHNAUDER, *Zu Wilsings kolorimetrischer Methode*, «Astr. Nach.», B. 219, p. 221.

nuta ponendo davanti ad una lampada elettrica a filamento incandescente un cuneo colorato in bleu. Poiché le stelle irradiano nel campo visuale e fotografico come corpi neri, possiamo applicare la teoria suesposta.

La radiazione di una stella qualsiasi, già corretta - come vedremo in seguito - per l'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre, sarà data dalla (5). D'altra parte, la radiazione emessa dal filamento della lampada, di temperatura assoluta  $T'$ , sarà espressa conformemente alla (5), da:

$$(6) \quad I(\lambda, T') = c'_1 \lambda^{-5} e^{-c_2/\lambda T'} e^{\gamma'_0 + \gamma'_1/\lambda}$$

ma, per il passaggio attraverso il cuneo colorato, sarà ridotta di una quantità pari ad  $e^{-s \cdot k(\lambda)}$ , in cui  $s$  è lo spessore del cuneo e  $k$  il suo coefficiente di assorbimento, variabile al variare della lunghezza d'onda  $\lambda$ . Ora, poiché il cuneo viene costruito in modo che lo spessore  $s$  in un punto qualunque sia funzione lineare della lettura  $L$  eseguita sulla graduazione del cuneo stesso e  $k$  sia funzione lineare dell'inverso della lunghezza d'onda, abbiamo:

$$(7) \quad s \cdot k(\lambda) = (L_0 + L_i) \left( \beta_0 + \frac{\beta_1}{\lambda} \right)$$

dove  $L_0$  è il valore dello zero,  $L_i$  la lettura eseguita e  $\beta_0$  e  $\beta_1$  sono due costanti caratteristiche del cuneo stesso.

La radiazione della stella artificiale, osservata all'oculare, sarà perciò, tenendo conto della (6) e della (7):

$$(8) \quad I(\lambda, T') = c'_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-c_2/\lambda T'} \cdot e^{\gamma'_0 + \gamma'_1/\lambda} \cdot e^{-(L_0 + L_i) \left( \beta_0 + \frac{\beta_1}{\lambda} \right)}$$

Se allora, spostando opportunamente il cuneo, rendiamo il colore della stella artificiale uguale a quello della stella vera, potremo uguagliare le rispettive radiazioni e cioè, tenendo presente la (5) e la (8) avremo:

$$(9) \quad c_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-c_2/\lambda T} \cdot e^{\gamma_0 + \gamma_1/\lambda} = c'_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-c_2/\lambda T'} \cdot e^{\gamma'_0 + \gamma'_1/\lambda} \cdot e^{-(L_0 + L_i) \left( \beta_0 + \frac{\beta_1}{\lambda} \right)}$$

Ora uguagliando i coefficienti degli esponenti nelle potenze  $e^{x/\lambda}$ , si ha:

$$(10) \quad -\frac{c_2}{T} + \gamma_1 = -\frac{c_2}{T'} + \gamma'_1 - (L_0 + L_i) \beta_1.$$

Poniamo ora:

$$(11) \quad \frac{c_2}{T} - \gamma_1 = A$$

e ricordiamo che  $A$  dipende solo da  $T$  in quanto anche  $\gamma_1$  è funzione solo di  $T$ ; la (10) diventa:

$$(12) \quad A = A' + (L_0 + L_i) \beta_1.$$

Quindi, se osserviamo due stelle - supposte le rispettive radiazioni corrette dell'assorbimento atmosferico, di cui parlerò in seguito - e facciamo rispettivamente le letture  $L_1$  e  $L_2$  sulla scala del cuneo, poiché la temperatura  $T'$  della lampada si può ritenere costante, avremo tenendo presente la (12):

$$(13) \quad A_1 - A_2 = \beta_1 (L_1 - L_2).$$

Conoscendo  $A_1$ , per una stella campione, ne risulta subito  $A_2$  per la seconda stella e quindi, per mezzo della (11), si determina anche la quantità  $c_2/T$  e perciò la sua temperatura assoluta, caratteristica del tipo spettrale.

Nella presente tabella I, calcolata dallo Schnauder, sono dati in corrispondenza alle  $A$ , le quantità  $c_2/T$  che si determinano in base alla (11) e prendendo per  $\gamma$  i valori trovati (come già si è detto) con la condizione che il quadrato della differenza fra i due membri della (4) sia minimo.

TABELLA I.

A	$c_2/T$	A	$c_2/T$	A	$c_2/T$	A	$c_2/T$	A	$c_2/T$	A	$c_2/T$
0,8	0,45	1,6	1,49	2,4	2,37	3,2	3,19	4,0	4,00	4,8	4,80
0,9	0,60	1,7	1,61	2,5	2,47	3,3	3,29	4,1	4,10	4,9	4,90
1,0	0,74	1,8	1,72	2,6	2,57	3,4	3,39	4,2	4,20	5,0	5,00
1,1	0,88	1,9	1,83	2,7	2,68	3,5	3,49	4,3	4,30	5,1	5,10
1,2	1,01	2,0	1,94	2,8	2,78	3,6	3,59	4,4	4,40	5,2	5,20
1,3	1,14	2,1	2,05	2,9	2,88	3,7	3,69	4,5	4,50	5,3	5,20
1,4	1,26	2,2	2,16	3,0	2,99	3,8	3,80	4,6	4,60		
1,5	1,38	2,3	2,26	3,1	3,09	3,9	3,90	4,7	4,70		

4. L'osservazione colorimetrica, come risulta dalla (13), richiede dunque l'esatta conoscenza del colore o di una quantità ad esso equivalente, per un certo numero di stelle, che possano servire da campioni. Tali stelle, analogamente a quelle la cui posizione in cielo serve di riferimento, vengono chiamate *stelle colorimetriche fondamentali*; esse sono scelte dal *Vorläufiger Katalog der mittleren Farbenäquivalente von 1207 Sternen* del Kukarkin <sup>(6)</sup>, il quale ha ridotto ad un unico sistema le determinazioni di temperatura di stelle, prese da vari autori, adottando come sistema di temperatura quella di « radiazione ». In proposito, ricordo che per « temperatura di radiazione » di un dato astro, si intende la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero, perché l'energia emessa per centimetro quadrato e per lunghezza d'onda compresa tra  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sia uguale a quella emessa dall'astro, per centimetro quadrato di superficie e nello stesso intervallo. Per determinarla, occorre dunque conoscere il diametro di ciascun astro e la sua lontananza dalla Terra, nozioni che raramente si hanno; ma S. Gaposchkin <sup>(7)</sup>, basandosi su al-

(6) Cfr. Publications of the Sternberg State, Astr. Inst., Moscow 1937, vol. X, p. 2.

(7) S. GAPOSCHKIN, *Die Temperaturbestimmung bei den Bedeckungsveränderlichen*, « Astr. Nach. », B. 248, p. 213.



cune stelle di cui erano noti con sufficiente precisione i dati richiesti, ha costruito una scala fra temperatura di radiazione e tipi spettrali. Ed il Kukarkin si è servito poi di tali dati, e di altre stelle (i cui diametri erano noti per misure interferometriche) per la determinazione della scala della temperatura adottata nel suo citato catalogo.

Più recentemente, il Becker<sup>(8)</sup>, basandosi su studi e su osservazioni moderne, ha dato una nuova scala della temperatura di radiazione; sicché le quantità  $c_2/T$  del catalogo del Kukarkin, spettanti alle singole stelle, sono state corrette dall'Hopmann<sup>(9)</sup> per quantità approssimativamente proporzionali, onde renderle aggiornate con la nuova scala della temperatura del Becker.

Ora nelle osservazioni che mi propongo di eseguire a Roma, con l'equatoriale Steinheil, userò in particolare come stelle colorimetriche fondamentali, quelle già scelte dal prof. Hopmann e che rispondono ai seguenti requisiti: *a*) declinazione compresa tra  $-5^\circ$  e  $+30^\circ$ ; *b*) luminosità inferiore alla grandezza 4,5 (onde avere modo di confrontarne agevolmente lo splendore con quello della stella fotometrica); *c*) valori della quantità  $c_2/T$  da 0,5 a 4,0; ciò che significa spettri stellari compresi tra i tipi BO (stelle azzurre) ed MO (stelle rosse).

La lista delle stelle campioni da me adottate, per esigenze di spazio, sarà pubblicata in una prossima Nota.

5. Dobbiamo però tener conto dell'assorbimento selettivo operato dalla atmosfera terrestre sulla luce stellare; assorbimento che altera il reale colore dell'astro. Infatti, come è ben noto, l'atmosfera terrestre agisce non solo quantitativamente sulla radiazione indebolendo lo splendore della stella, ma anche qualitativamente assorbendo in diversa misura i raggi di varia lunghezza d'onda. In particolare, i raggi violetti ed azzurri sono assorbiti maggiormente dei gialli e dei rossi, onde il colore dell'astro appare spostato verso il rosso. Studi per la determinazione dell'assorbimento selettivo, sono stati condotti dal Rayleigh<sup>(10)</sup>, dal Müller<sup>(11)</sup> e dal Wilsing<sup>(12)</sup>, che, per stelle non troppo basse sull'orizzonte, hanno date varie formule atte a determinare l'assorbimento operato; infine Armellini<sup>(13)</sup>, ha mostrato che i risultati sperimentali ottenuti dal Wilsing a Potsdam, potevano essere ben rappresentati dalla formula:

$$(14) \quad \frac{i}{I} = e^{-\left(\rho + \frac{q}{\lambda}\right) \sec z}$$

(8) LANDOLT BÖRNSTEIN, *Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik*. B. 3, «Astr. u. Geoph.», p. 118.

(9) J. HOPMANN, *Phot.-Kolor. Beobach. von visuellen Doppelsternen*, «Mitteil. Wien», B. 6, N. 12.

(10) Cfr. FOWLE, *The transmissibility of Radiation*, «Astroph. Journal», vol. XXXVIII.

(11) MÜLLER, *Die Photometrie der Gestirne*, p. 117 (Leipzig).

(12) WILSING, *Über die Helligkeitsverteilung in Sonnespektrum*, «Publ. Obs. zu Potsdam», N. 72.

(13) G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. II, p. 198.

in cui  $i$  è la radiazione che giunge all'osservatore,  $I$  quella fuori della atmosfera,  $p$  e  $q$  due costanti uguali a 0,299 e 0,322 e  $z$  è la distanza zenitale della stella al momento dell'osservazione.

Tenendo conto della (14), la radiazione stellare che giunge ad un osservatore data dalla (5), dopo il passaggio attraverso l'atmosfera terrestre, diventa:

$$(15) \quad I(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \cdot e^{\gamma_0 + \gamma_1/\lambda} \cdot e^{-\left(p + \frac{q}{\lambda}\right) \sec z}.$$

Ne risulta, confrontando la radiazione stellare con quella del filamento della lampada elettrica, rappresentata dalla (8), ed uguagliando i coefficienti degli esponenti nelle potenze di  $e^{1/\lambda}$ , che la (10) va sostituita con la seguente formula:

$$(16) \quad -\frac{c_2}{T} + \gamma_1 - q \sec z = -\frac{c_2}{T'} + \gamma'_1 - (L_0 + L_i) \beta_1$$

da cui, tenendo presente la (11) si ha:

$$(17) \quad A + q \sec z = A' + (L_0 + L_i) \beta_1.$$

Se poniamo

$$(18) \quad q \sec z = \Delta A$$

la (17) diventa:

$$(19) \quad A = A' - \Delta A + (L_0 + L_i) \beta_1.$$

Il calcolo delle quantità  $\Delta A$  è immediato. Conoscendo la declinazione della stella osservata ed il tempo siderale al momento della osservazione, un nomogramma da me costruito per la latitudine di Roma, dà immediatamente la  $z$ ; e la seguente tabella II, anch'essa da me calcolata in base alla (18), fornisce i valori di  $\Delta A$  per ogni distanza zenitale.

TABELLA II.

$\Delta A$	$z$	$\Delta A$	$z$	$\Delta A$	$z$	$\Delta A$	$z$
0,33	12° ,6	0,44	43° ,0	0,56	54° ,9	0,68	61° ,7
0,34	18 ,7	0,46	45 ,6	0,58	56 ,3	0,70	62 ,6
0,36	26 ,6	0,48	47 ,9	0,60	57 ,5	0,72	63 ,4
0,38	32 ,1	0,50	49 ,9	0,62	58 ,7	0,74	64 ,2
0,40	36 ,4	0,52	51 ,7	0,64	59 ,8	0,76	64 ,9
0,42	39 ,9	0,54	53 ,4	0,66	68 ,8	0,78	65 ,6

In una prossima Nota, darò la descrizione dello strumento ed i risultati ottenuti con la taratura dei cunei che ne fanno parte.

**Geofisica.** — *Il gradiente del campo gravitazionale* (\*). Nota di ARMANDO NORINELLI, presentata (\*\*) dal Socio G. SILVA.

1. Indichiamo con  $\mathbf{F}$  la forza attrattiva esercitata da una determinata distribuzione di materia sull'unità di massa posta in un punto arbitrario  $S$ , di coordinate  $x, y, z$  rispetto ad un sistema trirettangolo di riferimento.

Se con  $T = T(x, y, z)$  si indica il relativo potenziale gravitazionale è:

$$(1) \quad X_F = T_x, \quad Y_F = T_y, \quad Z_F = T_z^{(1)},$$

essendo  $X_F, Y_F, Z_F$  le componenti di  $\mathbf{F}$  secondo i tre assi cartesiani e  $T_x, T_y, T_z$  le derivate parziali prime calcolate nel punto  $S$ .

Si ha inoltre:

$$(2) \quad F = \text{mod } \mathbf{F} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}.$$

La funzione  $T = T(x, y, z)$  è finita, continua, univalente ed ammette, com'è noto, derivate parziali di tutti gli ordini, finite e continue in tutti i punti dello spazio esterno al corpo attraente; spazio in cui supporremo posti i punti potenziati che considereremo nella presente trattazione.

Inoltre, avendo la funzione  $T(x, y, z)$  derivate parziali di qualsiasi ordine continue, può essere scambiato l'ordine nelle derivazioni parziali.

Del campo scalare dell'intensità  $F$  consideriamo il *gradiente*  $\Gamma$ :

$$(3) \quad \Gamma = \text{grad } F.$$

Se ci riferiamo al sistema di coordinate cartesiane, la (3), tenendo conto della (2), ci dà:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_\Gamma = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{F} (T_x T_{xx} + T_y T_{xy} + T_z T_{xz}), \\ Y_\Gamma = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{F} (T_x T_{xy} + T_y T_{yy} + T_z T_{yz}), \\ Z_\Gamma = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{F} (T_x T_{xz} + T_y T_{yz} + T_z T_{zz}), \end{array} \right.$$

le derivate essendo calcolate nel punto  $S(x, y, z)$ .

È infine:

$$(5) \quad \Gamma = \text{mod } \mathbf{\Gamma} = \sqrt{X_\Gamma^2 + Y_\Gamma^2 + Z_\Gamma^2}.$$

Il campo vettoriale, definito dalla (3) o dalle (4), è un campo a potenziale: la funzione  $F(x, y, z)$  è il potenziale del campo.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geodesia e Geofisica di Padova.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1)  $T_x, T_y, T_z$  e i successivi simboli  $T_{xx}, T_{xy}$ , ecc. stanno ad indicare le derivate parziali  $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$ , ecc. di  $T(x, y, z)$ .

2. Dal punto di vista applicativo la funzione  $T(x, y, z)$  è il potenziale provocato da particolari formazioni geologiche del sottosuolo o in generale da corpi sepolti vicini e questo è da ritenersi differenza del potenziale gravitazionale terrestre  $W(x, y, z)$  e del potenziale normale  $U(x, y, z)$ , in quanto che la differenza dovuta alle formazioni lontane è da considerarsi costante; *tenendo però presente che il potenziale  $T(x, y, z)$  del corpo sepolto è quello che originerebbe lo stesso corpo isolato, ma con densità eguale alla densità reale meno quella dei materiali incassanti.*

Il potenziale  $T(x, y, z)$  viene chiamato potenziale *perturbante* o *anomalo* <sup>(2)</sup>, e *campo perturbante* o *anomalo* è il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \text{grad } W - \text{grad } U.$$

Ai fini geofisici interessano le derivate parziali della funzione  $T(x, y, z)$ , mentre, com'è noto, vengono determinate alcune derivate parziali del potenziale gravitazionale terrestre  $W(x, y, z)$ , osservate sulla superficie fisica della Terra e ridotte all'ellissoide di riferimento. Sottraendo quindi da queste i valori normali è possibile dedurre le prime.

Poiché la parte di superficie terrestre che si assoggetta alle misure è, in generale, molto limitata, i punti, in cui le derivate di  $T(x, y, z)$  sono note, appartengono ad una superficie che può considerarsi piana, coincidente praticamente con il piano tangente all'ellissoide nel punto centrale della zona che si rileva. È usuale, in tal caso, disporre il sistema cartesiano di riferimento in modo che l'origine  $O$  sia un punto della detta superficie, l'asse  $z$ , orientato verso il Nadir, coincida con la direzione della verticale in  $O$ , l'asse  $x$  sia rivolto al nord geografico e l'asse  $y$  all'est; cosicché la zona considerata si discosterà in modo trascurabile dal piano  $x, y$ , orizzontale in  $O$ .

In generale, le azioni del campo perturbante vengono apprezzate nella Geofisica applicata, ricorrendo alla *anomalia della gravità*, cioè alla componente verticale  $Z_F = T_z$  di  $\mathbf{F}$  ed ai gradienti di  $T_z$  così denominati:

a) *gradiente orizzontale*, le cui componenti secondo gli assi  $x$  e  $y$  sono rispettivamente  $T_{xz}$  e  $T_{yz}$ ;

b) *gradiente verticale*  $T_{zz}$ ;

c) *gradiente totale*, le componenti del quale secondo i tre assi cartesiani, sono le tre derivate seconde ora scritte.

Sono però calcolabili altre derivate parziali di  $T(x, y, z)$ , in particolare quelle che figurano nei secondi membri delle (4) <sup>(3)</sup>, per modo che possiamo ritenere determinabili i vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$ .

Nella presente Nota viene esaminato il comportamento e l'utilità, ai fini interpretativi, del *gradiente  $\mathbf{I}$* , introdotto nel paragrafo precedente, in presenza di una e di due masse sferiche, riservandoci di ritornare in seguito su altre forme di distribuzioni di massa.

(2) Cfr., per esempio, L. SOLAINI-O. VECCHIA, *Lezioni di Geofisica applicata*, vol. I, Milano, 1953, p. 380.

(3) Cfr., per esempio, H. HAALK, *Die vollständige Bestimmung örtlicher gravimetrischer Störungsfelder aus Drehwaagemessungen mit Berechnungsbeispiel*, « Veröff. Geod. Inst. Postdam », n. 4, 1950.



3. Consideriamo il caso di una massa isolata puntuale (o a forma sferica). Indichiamo con  $\mathbf{F}$  l'attrazione newtoniana esercitata da tale massa e con  $\mathbf{I}$  il gradiente della sua intensità.

Siano  $(a, b, c)$  le coordinate del punto P nel quale si considera concentrata la massa  $m$  e  $(x, y, z)$  quelle di un punto potenziato S, rispetto al sistema di riferimento introdotto nel paragrafo 2.

Se  $f = 6,66_4 \cdot 10^{-8}$  (c. g. s.) indica la costante di gravitazione universale e  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$  (presa col segno positivo) la distanza PS, le componenti della forza  $\mathbf{F}$ , applicata in S, sono date da:

$$(6) \quad X_F = fm \frac{a-x}{r^3}, \quad Y_F = fm \frac{b-y}{r^3}, \quad Z_F = fm \frac{c-z}{r^3},$$

e le componenti di  $\mathbf{I}$  dalle espressioni:

$$(7) \quad X_I = 2fm \frac{a-x}{r^4}, \quad Y_I = 2fm \frac{b-y}{r^4}, \quad Z_I = 2fm \frac{c-z}{r^4},$$

che si ottengono dalle (6) applicando le (4).

Poiché i secondi membri delle (6) e (7) sono tra loro proporzionali, con costante di proporzionalità positiva, i campi  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$ , in tutti i punti S, sono rappresentati da vettori di eguale direzione e verso, la cui retta d'applicazione è la congiungente i punti P e S.

Ciò era da attendersi, essendo sferiche le superficie rappresentate dalla equazione  $F(x, y, z) = \text{cost.}$

Se pensiamo i punti S localizzati sulla superficie precisata al paragrafo 2, con che risulterà nulla la coordinata  $z$  nei vari punti S, ed immaginiamo costruiti già i vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$  convergenti sulla massa attrahente, si può avere già una prima idea della efficacia dei campi  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$  di individuare in modo univoco, «plasticamente» la massa, oltretutto di rappresentare l'azione gravidica di questa.

Localizzata la massa, rimane nelle (6) e (7) come unica incognita la  $m$ , di facile computo.

4. Una peculiarità notevole del gradiente  $\mathbf{I}$  si ha in presenza di due masse puntuali distinte.

Siano  $m_1$  e  $m_2$  due masse puntuali (o a forma sferica) concentrate nei punti (o i cui centri sono i punti)  $P_1(a_1, b_1, c_1)$  e  $P_2(a_2, b_2, c_2)$ .

Indicando con  $r_1$  e  $r_2$  le distanze di tali punti dal punto potenziato S  $(x, y, z)$ , non coincidente con  $P_1$  o con  $P_2$ , nè a distanza infinita <sup>(4)</sup>, le componenti di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$ , secondo i tre assi coordinati, risultano rispettivamente:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_F = f \left[ \frac{m_1(a_1-x)}{r_1^3} + \frac{m_2(a_2-x)}{r_2^3} \right], \\ Y_F = f \left[ \frac{m_1(b_1-y)}{r_1^3} + \frac{m_2(b_2-y)}{r_2^3} \right], \\ Z_F = f \left[ \frac{m_1(c_1-z)}{r_1^3} + \frac{m_2(c_2-z)}{r_2^3} \right]; \end{array} \right.$$

(4) Viene escluso il caso, perché in posizione eccezionale e privo di interesse, che i campi  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$  tendano allo zero.

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\Gamma} = 2f \left[ \frac{m_1 (a_1 - x)}{r_1^4} + \frac{m_2 (a_2 - x)}{r_2^4} \right], \\ Y_{\Gamma} = 2f \left[ \frac{m_1 (b_1 - y)}{r_1^4} + \frac{m_2 (b_2 - y)}{r_2^4} \right], \\ Z_{\Gamma} = 2f \left[ \frac{m_1 (c_1 - z)}{r_1^4} + \frac{m_2 (c_2 - z)}{r_2^4} \right]. \end{array} \right.$$

In presenza di due masse sferiche distinte le direzioni dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  in generale non coincidono. Ha luogo infatti la seguente:

PROPOSIZIONE I: *Condizione necessaria e sufficiente perché in un punto  $S(x, y, z)$  i vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  abbiano eguale direzione, è che tale punto appartenga:*

- 1° *al luogo degli assi del segmento  $P_1 P_2$*
- 2° *oppure alla retta passante per  $P_1$  e  $P_2$ .*

Dire che  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  coincidono in direzione equivale ad ammettere l'esistenza di uno scalare  $k$  per cui si abbia:

$$(10) \quad \mathbf{F} = k \mathbf{\Gamma},$$

e conseguentemente:

$$(11) \quad X_F = k X_{\Gamma} \quad , \quad Y_F = k Y_{\Gamma} \quad , \quad Z_F = k Z_{\Gamma}.$$

Posto:

$$t = \frac{r_2}{r_1} \quad , \quad m = \frac{m_2}{m_1} \quad , \quad \lambda = \frac{a_2 - x}{a_1 - x} \quad , \quad \mu = \frac{b_2 - y}{b_1 - y} \quad , \quad \nu = \frac{c_2 - z}{c_1 - z} \quad , \quad k' = \frac{2}{r_2} k,$$

le (11), per le (8) e (9), possono scriversi:

$$(12) \quad \frac{t^3 + m\lambda}{t^4 + m\lambda} = \frac{t^3 + m\mu}{t^4 + m\mu} = \frac{t^3 + m\nu}{t^4 + m\nu} = k'.$$

Le (12), com'è facile constatare, sono verificate *se e solo se*:

1° caso.  $t = 1$  e due delle  $\lambda, \mu, \nu$  sono qualunque. In tal caso le (12) sono vere per tutti i punti che soddisfano all'equazione  $r_1 = r_2$ , cioè, ricordando le espressioni di  $r_1$  e  $r_2$ , le (12) sono verificate dalle coordinate dei punti del piano la cui equazione è:

$$(13) \quad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + 2(c_1 - c_2)z = a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 + c_1^2 - c_2^2,$$

che rappresenta il luogo degli assi del segmento  $P_1 P_2$ . Chiameremo tale luogo per brevità « piano  $\pi$  ».

Per i punti del piano  $\pi$  è  $k = r/2$ ; lo si può riconoscere dalle (11) tenendo conto che  $r_1 = r_2 = r$ . I vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  applicati nel piano  $\pi$  sono anche *equiversi*, poiché  $k'$  risulta positivo.

2° caso.  $t$  è qualunque e  $\lambda = \mu = \nu$ . Si può allora scrivere:

$$(14) \quad \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} = \frac{y - b_2}{b_1 - b_2} = \frac{z - c_2}{c_1 - c_2}$$

che è l'equazione della retta passante per i punti  $P_1 P_2$  e che chiameremo in seguito « retta  $p$  ».

I vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$ , applicati nei punti della retta  $p$ , hanno *verso opposto* nei punti interni al segmento  $P_1 P_2$  *se e solo se*  $\sqrt[3]{m} < t < \sqrt{m}$  (con  $m > 1$ ); in tutti gli altri casi sono *equiversi*. Infatti, per le posizioni fatte e per le (14), risulta  $\lambda = \pm t$ , valendo il segno positivo per tutti i punti *esterni* al segmento  $P_1 P_2$  e quello negativo nell'altra alternativa. Poiché  $\lambda = \mu = \nu$ , consegue, per le (12),  $k'$  *positivo*, sempre nel primo caso, se e solo se  $\sqrt{m} < t < \sqrt[3]{m}$  nel secondo. Nel caso particolare di masse eguali  $k'$  risulta positivo per tutti i punti della retta  $p$ .

È da notare che la retta di applicazione comune a  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$  è la retta  $p$  stessa.

Ci si può convincere ricorrendo al concetto fisico della  $\mathbf{F}$  ed anche, analiticamente, calcolando i coseni direttori della retta d'azione di  $\mathbf{F}$ , che risultano:

$$\pm \frac{a_1 - a_2}{d}, \quad \pm \frac{b_1 - b_2}{d}, \quad \pm \frac{c_1 - c_2}{d}; (d = \overline{P_1 P_2})$$

che sono appunto i coseni direttori della retta  $p$ , di cui la (14) è l'equazione normale. (L'indeterminazione del segno ha luogo perché consideriamo soltanto la direzione).

3° caso.  $t = 0$ . Caso da escludersi. Tale soluzione porterebbe infatti alla considerazione dei punti, evitati già nelle premesse, a distanza infinita dalle masse  $m_1$  e  $m_2$ .

5. La proposizione I trova applicazione nella localizzazione delle due masse.

È da osservare innanzitutto che, poiché in via ordinaria le misure vengono effettuate in superficie, i punti  $S(x, y, z)$ , per i quali è valida la proposizione, sono:

a) i punti appartenenti alla retta  $i$ , intersezione del piano  $\pi$  col piano  $xy$ ;

b) il punto  $Q$ , traccia della retta  $P_1 P_2$  sul piano  $xy$ .

(Nel caso escluso rientrano i punti a notevole distanza dalla zona del rilievo).

I punti della retta  $i$  hanno, per la proposizione dimostrata, distanza *nota* dai centri  $P_1$  e  $P_2$  dei due corpi sferici (o dalle due masse puntuali); tale distanza si deduce immediatamente dal rapporto delle componenti omonime (formula (11)) dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$  applicati nei punti della retta  $i$ , il quale dà appunto il valore della semidistanza.

La comune retta d'applicazione dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$ , applicati nel punto  $Q$ , è la retta  $p$ , cioè la retta cui appartengono i centri dei due corpi sferici (o le masse puntuali).

Bastano questi elementi per localizzare rapidamente, specialmente per via grafica, le due masse. Quindi a mezzo delle (8) (o delle (9))  $m_1$  ed  $m_2$ . La fig. 1 schematizza il procedimento per l'individuazione grafica, a mezzo dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{I}$ , delle due masse sferiche sepolte. Il piano del disegno rappresenta il piano verticale passante per il centro delle due masse sferiche.

Di tale piano è nota, sulla superficie  $xy$ , la traccia  $QI$ , condotta dal punto  $Q$  perpendicolarmente alla retta  $i$ , traccia individuata dalla componente orizzontale dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$ , applicati in  $Q$ . Tale traccia è anche la congiungente di  $Q$  con  $I$ , il punto della retta  $i$ , rispetto al quale i vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$ , applicati nei punti della retta  $i$ , risultano, com'è facile riconoscere, simmetrici.

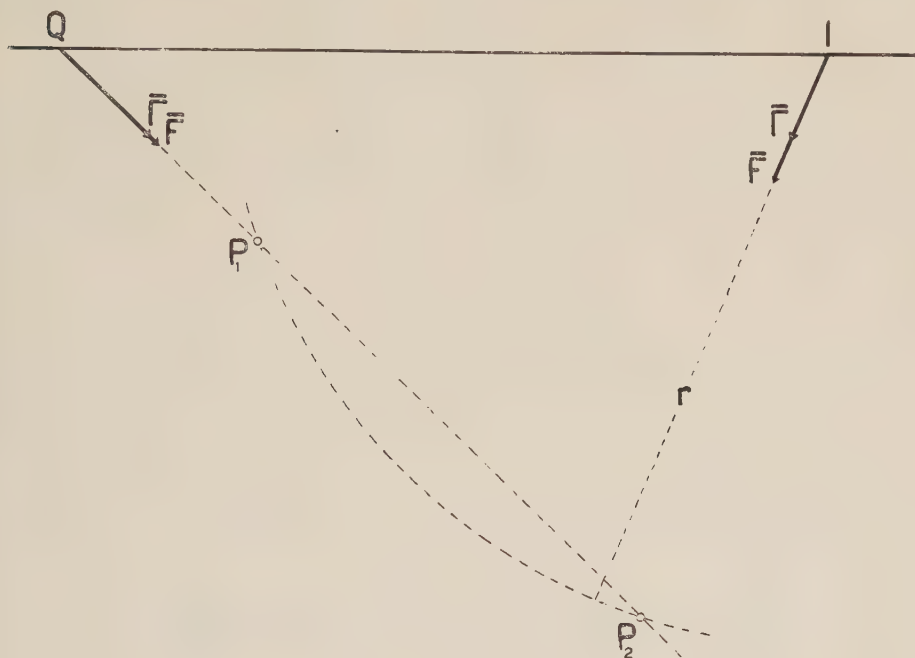


Fig. 1.

Riportando in opportuna scala la distanza  $QI$  e per  $Q$  la direzione di  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$ , è immediata la individuazione grafica di  $P_1$  e  $P_2$ :  $P_1$  e  $P_2$  sono infatti le intersezioni della retta d'applicazione dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$ , applicati in  $Q$ , con l'arco di cerchio di centro  $I$  e raggio noto  $r$ .

6. PROPOSIZIONE II. — *Le comuni rette d'applicazione dei vettori  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}'$  applicati nei punti del piano  $\pi$ , appartengono alla stella di raggi che ha per centro il baricentro delle due masse  $m_1$  e  $m_2$ .*

Consideriamo, per il momento, il solo vettore  $\mathbf{F}$ , applicato in un punto generico  $S$  del piano  $\pi$ , che è il luogo degli assi del segmento  $P_1 P_2$ .

La forza  $\mathbf{F}$  è la risultante delle forze  $\mathbf{F}'$  e  $\mathbf{F}''$  (indicando con tali simboli le due forze newtoniane applicate in  $S$  originate dalle due masse  $m_1$ , concentrata in  $P_1$ , ed  $m_2$ , concentrata in  $P_2$ , separatamente), le cui rette d'azione passano rispettivamente per  $P_1$  e per  $P_2$ .

La retta d'azione del vettore  $\mathbf{F}$  appartiene dunque al piano  $P_1 P_2 S$  e perciò interseca la retta  $P_1 P_2$  in un punto  $A$ .

*Tale punto è il baricentro del sistema  $(m_1, m_2)$ .*





Per l'individuazione della retta orizzontale  $P_1 P_2$  è sufficiente, teoricamente, un unico punto, che può essere appunto il baricentro del sistema  $(m_1, m_2)$  oppure la sua proiezione ortogonale sul piano verticale passante per  $i$ , la quale è più rapidamente determinabile.

Per localizzare poi, sulla retta orizzontale per tale punto, i due punti  $P_1$  e  $P_2$ , si ricorre alla proposizione I, per la quale è nota la loro distanza  $r$  da ciascun punto della retta  $i$ .

La risoluzione grafica è intuitiva.

È facile poi determinare gli altri elementi che consentano, a mezzo delle (8) o (9), di ricavare  $m_1$  e  $m_2$ .

In definitiva *per determinare due masse sferiche i cui centri stanno sopra una retta orizzontale è sufficiente la conoscenza dei campi  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{F}$  in due soli punti della retta  $i$ .*

**Fisica matematica.** — *Le oscillazioni di un plasma sulla base del principio einsteiniano dell'impulso.* Nota di GIOVANNI LAMPARIELLO, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Un miscuglio di gas neutri, di elettroni, di ioni, di atomi eccitati, di fotoni ha preso il nome di *plasma* nel caso che la concentrazione dei portatori di cariche sia molto elevata e la carica spaziale media sia nulla. Quando lo si considera in un campo elettrico diviene sede di fenomeni vibratorii e ondosi.

Un esempio importante di plasma è offerto dal famoso strato di Kennelly-Heaviside o ionosfera che gioca un ufficio essenziale nella propagazione delle onde radio.

Secondo Langmuir, il plasma ha una frequenza propria determinabile con la formula

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_0 \epsilon_0},$$

dove  $m_0$ ,  $e$  sono la massa di quiete e la carica dell'elettrone,  $\epsilon_0$  la costante dielettrica del vuoto,  $n_0$  il numero degli elettroni per unità di volume in assenza di oscillazioni.

Il problema del moto degli elettroni nel plasma è stato fin qui studiato muovendo dall'equazione dell'impulso di Newton.

Si trova che la velocità  $v$  degli elettroni soddisfa ad un'equazione armonica non omogenea.

Scopo di questa Nota è di rispondere alla seguente domanda: si hanno ancora oscillazioni elettroniche nel caso che la velocità degli elettroni raggiunga valori prossimi quanto si vuole alla velocità della luce?

Limitandoci al problema unidimensionale in cui le grandezze del fenomeno si suppongono dipendenti oltre che dal tempo  $t$ , al più della sola varia-

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

bile spaziale  $x$ , sarà qui dimostrato che la velocità degli elettroni è sempre una funzione periodica del tempo, comunque piccolo possa essere il divario fra il suo massimo valore e la velocità della luce.

2. Se  $n$  è il numero degli elettroni per unità di volume durante il moto all'istante  $t$  e se  $\rho_0, \rho$  sono le densità di carica in assenza di oscillazioni e in fase di moto, si ha

$$(1) \quad \rho_0 = -en_0, \quad \rho = -en.$$

Se  $E$  è l'intensità del campo elettrico durante il moto vale l'equazione di Gauss-Maxwell

$$(2) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho - \rho_0}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0}(n - n_0).$$

Inoltre l'equazione di continuità (conservazione delle cariche) si riduce alla forma

$$(3) \quad \frac{\partial (nv)}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial t} = 0.$$

L'equazione risolvibile del problema si dovrà dedurre dall'equazione dell'impulso di Einstein

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -eE$$

tenendo conto di (2) e (3).

Consideriamo le due equazioni di Maxwell di evoluzione del campo elettromagnetico

$$(5) \quad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathfrak{C}$$

$$(6) \quad \mathfrak{C} \equiv \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \rho \vec{v} = \text{rot } \mathfrak{H}.$$

Se ammettiamo, come si fa generalmente, che non esista campo elettrico dovuto a campi magnetici variabili, ricordando che  $\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$  nel plasma, si ha dalla (5)

$$(5') \quad \frac{\partial \text{rot } \mathfrak{B}}{\partial t} = -\text{rot } \text{rot } \mathfrak{C} = 0$$

e quindi per la (6)

$$(6') \quad \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} = 0.$$

Riducendoci al caso unidimensionale, se  $C$  è l'unica componente non nulla di  $\mathfrak{C}$ , si ha

$$(6'') \quad \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

Inoltre è ovvio che anche

$$(7) \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

perchè dalla (6) si deduce che

$$(6''') \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0.$$

Acquisita l'invariabilità spaziale e temporale di  $C$ , dalla (6) si ricava

$$(6^{IV}) \quad C = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \rho v = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} - env$$

e quindi

$$(8) \quad \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = C + env.$$

Ma ora si osservi che la derivata lagrangiana  $dE/dt$  differisce dalla derivata euleriana (locale)  $\partial E/\partial t$  per la derivata di convezione  $v \frac{\partial E}{\partial x}$

$$(9) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial x},$$

sicchè, tenendo conto di (2) e (8) si ha

$$(10) \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} (C + env) - \frac{e}{\epsilon_0} (nn_0) v$$

cioè

$$(10') \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} (C + n_0 ev).$$

Eguagliando le derivate lagrangiane di ambo i membri dell'equazione di Einstein (4), si ha

$$(4') \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -e \frac{dE}{dt}.$$

In virtù della (10') si ha infine l'equazione risolvente del problema

$$(11) \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0} v = -e \frac{C}{\epsilon_0}.$$

In seguito supporremo che l'intensità  $C$  di corrente totale sia positiva, ma si vedrà che la conclusione della nostra indagine non dipende affatto dal segno di  $C$ .

Posto

$$(12) \quad \omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m_0 \epsilon_0}, \quad k^2 = \frac{e C}{m_0 \epsilon_0}$$



l'equazione (II) assume la forma

$$(13) \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \omega^2 v = -k^2.$$

Può essere chiamata *l'equazione armonica relativistica*, perchè se  $c$  fosse un parametro variabile, al tendere di  $c$  all' $\infty$  essa si riduce alla classica equazione armonica.

A questa si riduce tutte le volte che  $v^2/c^2$  è trascurabile di fronte all'unità.

Convieni tener presente per il seguito che il rapporto

$$(14) \quad \frac{k^2}{c\omega^2} = \frac{C}{n_0 ec}$$

è minore di 1

$$(15) \quad \frac{k^2}{c\omega^2} < 1,$$

perchè la grandezza  $n_0 ec$  è il valore assoluto dell'intensità di corrente di convezione che si avrebbe se gli elettroni possedessero la velocità della luce.

3. Prima di procedere all'integrazione dell'equazione (13) vogliamo osservare che se gli elettroni fossero sottoposti a forze perturbatrici periodiche, ad esempio ad una forza puramente sinusoidale, l'equazione del moto assumerebbe la forma

$$(13') \quad \frac{d^2}{dt^2} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \omega^2 v = -k^2 + F \sin \omega_1 t.$$

L'integrazione di codesta equazione offre cospicue difficoltà e non sarà oggetto di discussione qui.

Ci limitiamo per ora a considerare il caso che il secondo membro sia la costante  $-k^2$ .

Allora, come si sa, dagli elementi della meccanica teorica l'integrazione si consegue per quadrature.

Cominciamo coll'introdurre la funzione incognita ausiliaria

$$(16) \quad u = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

da cui si deduce

$$(17) \quad v = \frac{u}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}}.$$

L'equazione (13) assume la forma

$$(18) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left( k^2 + \frac{\omega^2 u}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}} \right).$$

La discussione è immediatamente ricondotta all'integrale primo

$$(19) \quad \left( \frac{du}{dt} \right)^2 = \gamma - 2(k^2 u + c\omega^2 \sqrt{c^2 + u^2})$$

essendo  $\gamma$  una costante arbitraria.

Convieni sostituire alla funzione incognita  $u$  una nuova funzione, tenendo presente la nozione classica che  $u$  e  $w = \sqrt{c^2 + u^2}$  si esprimono razionalmente per mezzo di

$$(20) \quad z = u + w = u + \sqrt{c^2 + u^2}.$$

Si ha infatti da

$$(21) \quad w^2 - u^2 = c^2 \quad w^2 - u^2 = c^2$$

$$(21') \quad z(w - u) = c^2$$

e quindi da (20) e (21')

$$(22) \quad u = \frac{1}{2} \left( z - \frac{c^2}{z} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{c^2}{z} \right).$$

La trasformata in  $z$  della (19) è

$$(19') \quad \frac{1}{4} \frac{(z^2 + c^2)^2}{z^4} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \gamma - \left\{ k^2 \left( z - \frac{c^2}{z} \right) + c\omega^2 \left( z + \frac{c^2}{z} \right) \right\}$$

ovvero

$$(23) \quad \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{4z^3 [-(k^2 + c\omega^2)z^2 + \gamma z - c^2(c\omega^2 - k^2)]}{(z^2 + c^2)^2}.$$

Calcolata la  $z$  in funzione di  $t$ , si dedurrà la funzione incognita originaria  $v$  mediante la formula

$$(24) \quad v = c \frac{z^2 - c^2}{z^2 + c^2}.$$

Nel 2° membro dell'equazione (23) l'attenzione va rivolta al polinomio di 2° grado

$$(25) \quad P(z) = -(k^2 + c\omega^2)z^2 + \gamma z - c^2(c\omega^2 - k^2),$$

di cui il coefficiente di  $z^2$  e il termine noto sono essenzialmente negativi (si badi, anche se la  $C$  fosse negativa).

Ne segue che, esclusi i casi che il discriminante sia negativo o nullo, perchè allora il polinomio  $P(z)$  non assumerebbe mai valore positivo e quindi l'equazione (23) non ammetterebbe soluzioni reali, l'equazione

$$(26) \quad P(z) = 0$$

ammette due radici  $z_1, z_2$  essenzialmente positive e si ha

$$(27) \quad P(z) > 0$$

quando

$$(28) \quad z_1 < z < z_2.$$

Poichè il 2° membro dell'equazione (23) ammette i soli zeri  $z_1, z_2$ , oltre lo zero che è esterno all'intervallo  $(z_1, z_2)$ , ed essi sono semplici, è applicabile un noto teorema di Weierstrass, in virtù del quale tutte le soluzioni dell'equazione (23) sono periodiche ed ammettono il periodo

$$(29) \quad T = \frac{1}{\sqrt{k^2 + c\omega^2}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2 + c^2}{z \sqrt{z(z-z_1)(z_2-z)}} dz.$$

Non sarebbe difficile esprimere la generica soluzione di (23) mediante la funzione ellittica  $p(z)$  di Weierstrass, ma la determinazione esplicita della  $z$  in funzione del tempo e la conseguente caratterizzazione della  $v$  in funzione di  $t$  oltrepassa lo scopo che mi ero proposto in questa breve comunicazione all'Accademia.

**Fisica matematica.** — *Osservazioni sulle onde cilindriche della magneto-idrodinamica.* Nota di GIOVANNI CARINI, presentata (\*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. La considerazione delle onde cilindriche della magneto-idrodinamica presenta interesse sia per lo studio dei moti che possono aver luogo nei bracci di spirale di una nebulosa, come risulta dai lavori di Chandrasekhar e Fermi e di Lyttkens<sup>(1)</sup>, e sia per qualche eventuale esperienza di laboratorio atta a mettere in evidenza l'esistenza di siffatte onde.

R. Nardini<sup>(2)</sup>, rifacendosi allo schema dei lavori degli Autori sopracitati, ha preso in considerazione uno spazio limitato da un cilindro circolare, infinitamente lungo, occupato da un fluido omogeneo, viscoso, incompressibile, elettricamente conduttore, mobile in un campo magnetico non omogeneo  $\mathbf{H}$ , e soggetto ad una forza di massa derivante da un potenziale ed ha ricercato particolari onde cilindriche, in cui le grandezze dipendono soltanto da  $r$  e  $t$ , essendo  $r$  la distanza della generica particella dall'asse del cilindro,  $t$  il tempo.

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) S. CHANDRASEKHAR e E. FERMI, *Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field*, « *Astroph. J.* », 118, 116-141 (1953); *Magnetic fields in spiral arms*, id., 113-115; E. LYTTKENS, *On the radial pulsations of an infinite cylinder with a magnetic field parallel to its axis*, id., 119, 413-424 (1954).

(2) R. NARDINI, *Su particolari onde cilindriche della magneto-idrodinamica* « *Boll. U. M. Italiana* » N. 3, serie III, 1955.

Ma, se si suppone che il cilindro abbia una lunghezza finita e ci si riferisce ad un sistema di coordinate cilindriche  $r, \vartheta, z$ , si è condotti a ricercare le soluzioni delle equazioni della magneto-idrodinamica che dipendono oltretutto da  $r$  e  $t$ , anche da  $z$ .

E già nel 1949, S. Lundquist <sup>(3)</sup>, allo scopo di fare un'investigazione sperimentale sulle onde della magneto-idrodinamica, ha considerato particolari onde (in cui le grandezze caratteristiche del fenomeno dipendono da  $r, z, t$ ), propagantisi in un liquido conduttore, contenuto in un cilindro circolare di lunghezza finita e mobile in un campo magnetico uniforme e costante  $\mathbf{H}_0$ , diretto secondo l'asse del cilindro.

Le precedenti ricerche sono state fondate sulle equazioni di Eulero-Maxwell che il prof. Alfvén ha posto a fondamento della magneto-idrodinamica.

Ora, in una precedente Nota <sup>(4)</sup>, ho considerato il seguente sistema, che nasce dall'associazione delle equazioni di Eulero con quelle di Minkowski, approssimate ai termini di primo ordine in  $\beta = v/c$ , (essendo  $v$  la velocità della generica particella del fluido,  $c$  la velocità della luce nel vuoto):

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} & \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} & \lambda = \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \\ \mathbf{I} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \operatorname{grad} p \right) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \end{array} \right.$$

dove il « punto » indica la derivata parziale rispetto a  $t$ ,  $\mathbf{E}$  è l'intensità elettrica del campo,  $\mathbf{H}$  l'intensità magnetica,  $\mathbf{D}$  lo spostamento elettrico,  $\mathbf{B}$  l'induzione magnetica,  $\mathbf{I}$  la densità di corrente elettrica,  $\sigma$  la conducibilità,  $\rho$  la densità del fluido,  $\varepsilon$  e  $\mu$  rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica,  $\mathbf{F}$  la forza non elettromagnetica agente sul fluido,  $p$  la pressione.

Ho approfondito le divergenze che sorgono con la suddetta sostituzione in un caso particolare <sup>(5)</sup>; inoltre ho dimostrato, nella Nota <sup>(4)</sup>, che nei casi contemplati da Alfvén, i due sistemi di Eulero-Maxwell e di Eulero-Minkowski conducono a risultati identici.

Se ci si propone di ricercare le onde cilindriche, o più generalmente quelle in cui le grandezze dipendono da  $r, z, t$ , compatibili col sistema (I), in con-

(3) S. LUNDQUIST, *Experimental investigations of magneto-hydrodynamic waves*, « Phys. Rev. », vol. 76, n. 12, (1949).

(4) G. CARINI, *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XXI, fasc. VI (1956).

(5) G. CARINI, *Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XXIII, fasc. I (1957).



formità a ciò che ho scritto nelle due mie Note sopracitate, si è portati a prender le mosse dal sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1-\varepsilon\mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H} \right)' = -\frac{c^2}{\sigma} \text{rot rot } \mathbf{H} + \mu \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{rot } \mathbf{H} \wedge \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1-\varepsilon\mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H} \right) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathbf{F} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div} \left( \mu \mathbf{H} + \frac{1-\varepsilon\mu}{\sigma} \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{H} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Così procedendo sembra si vada incontro a difficoltà matematiche.

Lo scopo di questa Nota è di mostrare come si possa utilizzare il sistema di Eulero-Minkowski per lo studio delle onde suddette.

Esaminerò, in particolare, il caso considerato dal Lundquist e determinerò una soluzione delle equazioni di Eulero-Minkowski che caratterizza la propagazione di un'onda nella direzione del campo magnetico  $\mathbf{H}_0$ .

Da tale soluzione si rileva che, pur limitandosi alla prima approssimazione, non è più lecito ritenere che le due grandezze  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$  siano proporzionali, come invece si viene automaticamente ad ammettere quando si fondano le ricerche di magneto-idrodinamica sulle equazioni di Eulero-Maxwell. Siffatta proporzionalità (sempre in prima approssimazione) sussiste fra  $\mathbf{B}$  ed  $\mathbf{H}$ .

2. Per dedurre dalle (I) un nuovo sistema di equazioni più adatto allo scopo indicato sopra, risolviamo le equazioni materiali

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \lambda \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \end{array} \right.$$

rispetto ad  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ .

Trascurando i termini in  $\beta^2 = v^2/c^2$ , si ottiene

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\lambda}{\varepsilon\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{D}. \end{array} \right.$$

Con ciò l'equazione esprime la legge di Ohm diventa

$$(2) \quad \mathbf{I} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right).$$

Se si sostituiscono ora le (2), (3) nella prima, seconda e sesta della (I), si trascura  $\dot{\mathbf{D}}$  di fronte ad  $\mathbf{I}$ , si suppone che il fluido non espliciti la sua comprimibilità e le forze di massa derivino dal potenziale  $U$ , dalle (I) si deduce il seguente sistema:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{B}} = -\frac{c}{\varepsilon} \text{rot } \mathbf{D} + \frac{\lambda c}{\varepsilon\mu} \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \\ \frac{\sigma}{\varepsilon} \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c\mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) = \frac{c}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} + \frac{\lambda c}{\varepsilon\mu} \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}) \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho\mu} \mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\lambda}{\rho\varepsilon\mu} \mathbf{B} \wedge \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{D}) - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \text{grad } U \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \end{array} \right.$$

su cui conviene fondare lo studio delle onde, in cui le grandezze dipendono da  $r, z, t$ .

3. Seguendo lo schema del Lundquist, ricerchiamo se sia possibile determinare semplici soluzioni delle (3), in cui le grandezze dipendano da  $r, z, t$ .

Supponiamo che il moto del liquido avvenga sui piani ortogonali all'asse del cilindro, che assumiamo come asse  $z$  del sistema di coordinate cilindriche  $r, \vartheta, z$ .

Inoltre il liquido sia immerso in un campo magnetico uniforme e costante, la cui induzione  $\mathbf{B}_0$  sia diretta secondo l'asse delle  $z$ .

Dopo ciò, le componenti dei vettori  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ , che intervengono nelle (3), saranno rispettivamente:

$$\mathbf{v} \equiv (u_1, u_2, 0) \quad , \quad \mathbf{B} \equiv (B_1, B_2, B_0) \quad , \quad \mathbf{D} \equiv (D_1, D_2, D_3).$$

Abbiamo trascurato, come si fa solitamente, la componente  $B_3$  del campo indotto rispetto a  $B_0$ .

Dalle equazioni di condizione (ultime delle (3)), si deduce

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_1)}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_1)}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_1) + \frac{\partial D_3}{\partial z} = 0.$$

Se supponiamo  $u_1 \equiv 0$ , la prima delle (4) resta verificata, mentre dalla seconda si deduce

$$B_1 \equiv \frac{\varphi(z, t)}{r}$$

dove  $\varphi$ , per ora, è una funzione arbitraria.

Volendo soddisfare alle (3) con una densità di corrente  $\mathbf{I}$  (data dalla (2)) finita in tutta la massa del liquido, bisognerà che sia

$$\varphi \equiv 0.$$

Con ciò le componenti di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{B}$  saranno rispettivamente

$$(0, v, 0) \quad , \quad (0, B, B_0)$$

Proiettando la prima e la seconda delle (3) sulle linee coordinate  $r, \vartheta, z$ , si ha:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{c}{\epsilon} \frac{\partial D_2}{\partial z} \\ \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{c}{\epsilon} \left( \frac{\partial D_1}{\partial z} - \frac{\partial D_3}{\partial r} \right) + \frac{\lambda c}{\epsilon \mu} B_0 \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (r D_2)}{\partial r} \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\epsilon} D_1 = -\frac{c}{\mu} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\sigma}{c \epsilon \mu} B_0 v \\ \frac{\sigma}{\epsilon} D_2 = \frac{\lambda c}{\epsilon \mu} \left[ \frac{\partial (v D_3)}{\partial z} + \frac{\partial (v D_1)}{\partial r} \right] \\ \frac{\sigma}{\epsilon} D_3 = \frac{c}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial (r B)}{\partial r} \end{array} \right.$$

La  $D_2$  deve soddisfare quindi alle due equazioni

$$\frac{\partial D_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial (r D_2)}{\partial r} = 0,$$

ma per l'osservazione fatta per la determinazione di  $B_1$ , si conclude che deve essere

$$D_2 \equiv 0.$$

Così dalle (5), (6) si deducono le equazioni

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B}{\partial t} = a^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rB)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right] + B_0 \frac{\partial v}{\partial z} \quad \left( a^2 = \frac{c^2}{\mu \sigma} \right) \\ D_1 = -\frac{c\varepsilon}{\mu \sigma} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{c\mu} B_0 v \\ \frac{\partial}{\partial r} (v D_1) + \frac{\partial (v D_3)}{\partial z} = 0 \\ D_3 = \frac{c\varepsilon}{\mu \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial (rB)}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Se ci limitiamo a ricercare una propagazione ondosa nella direzione di  $B_0$ , nell'equazione euleriana, possiamo trascurare i termini quadratici in  $v$ , e tenendo conto che

$$\mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{B} = \frac{B}{r} \frac{\partial (rB)}{\partial r} \mathbf{i} - B_0 \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{j} + B \frac{\partial B}{\partial z} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} \wedge \text{rot } (v \wedge \mathbf{D}) = B_0 \left[ \frac{\partial (v D_1)}{\partial r} + \frac{\partial (v D_3)}{\partial z} \right] \mathbf{i}$$

dove  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  sono rispettivamente i versori delle linee coordinate  $r, \vartheta, z$ , dalla

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \mu} \mathbf{B} \wedge \text{rot } \mathbf{B} + \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

segue

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho \mu} \frac{B}{r} \frac{\partial (rB)}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho \mu} \frac{\partial B}{\partial z} \\ 0 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho \mu} B \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{array} \right.$$

la seconda delle quali stabilisce un legame fra  $v$  e  $B$ , mentre la prima e la terza, nota  $U$ , servono a determinare la pressione.

Quindi, il sistema che serve a determinare  $B$  e  $v$  è

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B}{\partial t} = a^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rB)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right] + B_0 \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho \mu} \frac{\partial B}{\partial z}, \end{array} \right.$$

che è analogo a quello che Lundquist ha dedotto dal sistema di Alfvén per la determinazione di  $\mathbf{H}$ .

Se nelle (9) si elimina la  $v$ , si ottiene che la  $B$  deve soddisfare all'equazione

$$(10) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{B}{r^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} \right] + V^2 \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$$

dove si è posto  $V^2 = B_0^2 / \rho \mu$ .

Tentiamo di soddisfare alla (10) con una  $B$  del tipo

$$(11) \quad B = A f(r) e^{-vz} \cos \Phi \quad (\Phi = \alpha z - \omega t)$$

dove il parametro reale  $\omega$  è prefissato, mentre  $v, \alpha$  (anch'essi parametri reali) e  $f(r)$  devono essere determinati in modo che la (11) soddisfi identicamente alla (10).

Facendo le relative sostituzioni, dalla (10) si deduce

$$(10') \quad f(r) [V^2 (v^2 - \alpha^2) - 2 a^2 \alpha v \omega + \omega^2] \cos \Phi + \\ + a^2 \omega \left[ \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) f \right] \sin \Phi = 0$$

dove si è posto

$$(12) \quad k^2 = v^2 - \alpha^2 + \frac{2 V^2 \alpha v}{a^2 \omega}.$$

Poiché la (10') dev'essere soddisfatta identicamente, se ne deduce

$$(13) \quad V^2 (v^2 - \alpha^2) - 2 a^2 \alpha v \omega + \omega^2 = 0$$

$$(14) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left( k^2 - \frac{1}{r^2} \right) f = 0.$$

La (14) è immediatamente riconducibile all'equazione di Bessel di primo ordine ed una sua soluzione nulla per  $r = 0$  è

$$f = J_1(kr).$$

Nei problemi, utili per l'esperienza, con le condizioni al contorno si determineranno i valori di  $k$ ; quindi i valori di  $\alpha$  e  $v$  si calcoleranno con l'ausilio delle (12), (13). Con ciò, l'espressione di  $B$  è

$$B = A J_1(kr) e^{-vz} \cos \Phi \quad (\Phi = \alpha z - \omega t),$$

mentre dalla seconda delle (9), si ottiene

$$v = \frac{A B_0}{\rho \mu \omega} J_1(kr) e^{-vz} (v \sin \Phi - \alpha \cos \Phi).$$

Dalla seconda e quarta delle (7) si dedurranno  $D_1$  e  $D_3$ , mentre le componenti di  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  si calcoleranno con le (1).



In definitiva la soluzione del sistema (3) caratterizzante un'onda propagantesi nella direzione dell'induzione magnetica  $B_0$  è

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = A J_1(kr) e^{-\nu z} \cos \Phi \mathbf{j} + B_0 \mathbf{k} \\ \mathbf{D} = A J_1(kr) e^{-\nu z} (\xi \sin \Phi + \eta \cos \Phi) \mathbf{i} + \frac{c\varepsilon k}{\mu\sigma} A J_0(kr) e^{-\nu z} \cos \Phi \mathbf{k} \\ \mathbf{v} = \frac{B_0}{\rho\mu\omega} A J_1(kr) e^{-\nu z} (\nu \sin \Phi - \alpha \cos \Phi) \mathbf{j} \\ \varepsilon \mathbf{E} = \left( D_1 - \frac{\lambda}{\mu} B_0 \nu \right) \mathbf{i} + D_3 \mathbf{k} \\ \mu \mathbf{H} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \nu D_3 \mathbf{i} + B \mathbf{j} + \left( B_0 - \frac{\lambda}{\varepsilon} \nu D_1 \right) \mathbf{k} \end{array} \right.$$

dove si è posto

$$\xi = \frac{a^2 \alpha \varepsilon}{c} - \frac{V^2 \nu}{c\mu\omega}, \quad \eta = \frac{a^2 \nu \varepsilon}{c} + \frac{V^2 \alpha}{c\mu\omega}.$$

Se si tien conto che, nell'impostazione del problema particolare, abbiamo preso in considerazione le piccole oscillazioni delle particelle fluide, le quantità  $\nu D_1$ ,  $\nu D_3$  si possono ritenere d'ordine superiore al primo. Quindi l'intensità magnetica  $\mathbf{H}$  in prima approssimazione è proporzionale a  $\mathbf{B}$ ; mentre tale proporzionalità non sussiste più fra  $\mathbf{D}$  ed  $\mathbf{E}$ , come risulta dalla quarta delle (15).

**Chimica fisica.** — *Sullo spettro ultrarosso del cobalticianuro di potassio cristallino alla temperatura dell'azoto liquido* (\*). Nota di GIANFRANCO FABBRI, presentata (\*\*) dal Socio G. B. BONINO.

In un precedente lavoro [1] Bonino e Fabbri avevano studiato lo spettro ultrarosso di assorbimento del  $K_3[Co(CN)_6]$  allo stato cristallino.

L'applicazione dei criteri teorici sviluppati nella citata Nota (ed in un lavoro quasi contemporaneo di Bonino e Salvetti [2] prendendo in particolare considerazione lo studio delle cosiddette oscillazioni  $C \equiv N$ ) aveva rilevato che, mentre per lo spettro ultrarosso dello ione complesso isolato (per esempio in soluzione acquosa) si doveva registrare (come effettivamente si registra sperimentalmente) una sola banda corrispondente all'oscillazione triplamente degenera, indicata nel citato lavoro con  $\nu_6$  ( $T_{1u}$ ), lo spettro del cristallo monoclino, a cella cristallina elementare riferibile al gruppo di simmetria  $C_{2h}^5$  contenente due molecole di complesso, avrebbe dovuto mostrare 6 massimi di assorbimento riferibili alle rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria  $C_{2h}$  e cioè:

$$4 A_u + 2 B_u.$$

(\*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

L'esperienza eseguita a temperatura ordinaria nell'ultrarosso mostra invece 5 massimi dei quali uno però risulta da una banda molto larga e si può ragionevolmente supporre che corrisponda alla sovrapposizione di due bande pure assai allargate.

Si avanzò l'ipotesi che tale mancata risoluzione potesse dipendere da allargamento (e sovrapposizione) di due bande vicine in conseguenza di termini di anarmonicità delle oscillazioni relative e conseguenti combinazioni delle stesse con oscillazioni reticolari e si concludeva: «in questo caso uno studio dello spettro ultrarosso del cristallo a bassa temperatura potrebbe dare nuovi elementi per una conferma».

Si sa infatti che combinazioni con oscillazioni reticolari conseguenti a detti termini di anarmonicità dipendono dalla temperatura e tendono a diminuire fortemente la loro intensità a basse e bassissime temperature. Le bande dovute alle pure oscillazioni fondamentali, indipendenti dalla temperatura, allora si assottigliano ed è pertanto più facile risolverle.

Perciò ho studiato lo spettro del  $K_3 [Co(CN)_6]$  cristallino alla temperatura dell'azoto liquido per constatare se, conformemente alle previsioni teoriche, la banda a  $2129\text{ cm}^{-1}$  dello spettro del complesso cristallino a temperatura ordinaria si poteva risolvere in due bande che avrebbero dovuto presumibilmente corrispondere (data la loro intensità) alle due oscillazioni del tipo  $B_u$  sopra accennate. Le altre 4 bande più deboli rilevate nello spettro ultrarosso sarebbero allora da attribuire alle 4 oscillazioni  $A_u$  previste dalla teoria (ved. lavoro citato [1]).

I risultati sperimentali sono stati soddisfacenti poiché lo spettro ultrarosso del  $K_3 [Co(CN)_6]$  cristallino rilevato alla temperatura dell'azoto liquido ha mostrato la banda a  $2129\text{ cm}^{-1}$  come assai assottigliata e visibilmente risolvibile in due componenti a  $2129$  e  $2126\text{ cm}^{-1}$ .

Con ciò lo spettro ultrarosso delle oscillazioni interne di valenza dei gruppi CN del cobalticianuro di potassio sarebbe dato da 6 massimi di assorbimento come si poteva prevedere dalle considerazioni sviluppate da Bonino e Fabbri in un precedente lavoro [1].

## PARTE SPERIMENTALE.

### *Preparazione dei campioni spettroscopici.*

Data la relativamente alta temperatura di solidificazione degli idrocarburi costituenti l'olio di vaselina; nella preparazione dei campioni spettroscopici sui quali eseguire lo spettro alla temperatura dell'azoto liquido ( $77,2^\circ\text{ K}$ ) ho dovuto assolutamente escludere la presenza dell'olio di vaselina o di altri liquidi sostituenti quest'ultimo, e quindi preparare il campione sotto forma di polvere pura depositata su un disco di NaCl fungente da supporto. La solidificazione dell'olio di vaselina si sarebbe concretata nella formazione di grossi cristalli (di dimensioni maggiori cioè di  $1-2\text{ }\mu$ ) che avrebbero provocato una fortissima diffusione delle radiazioni, tale da non far giungere sulla termocoppia che una quantità minima di energia.

È ben noto che la possibilità di eseguire spettri su polvere pura dipende essenzialmente dalle dimensioni delle particelle costituenti la polvere [3, 4]; se infatti tali dimensioni superano quelle della lunghezza d'onda della radiazione usata, il campione provoca forte diffusione e gli assorbimenti assumono una forma caratteristica dovuta al così detto effetto Christiansen [5].

Per ottenere polvere con particelle di dimensioni inferiori a  $1-2 \mu$  ho operato macinando lungamente (per 3 ore) la sostanza in mulino a palle e separando, per centrifugazione, la polvere sospesa in alcool isopropilico.

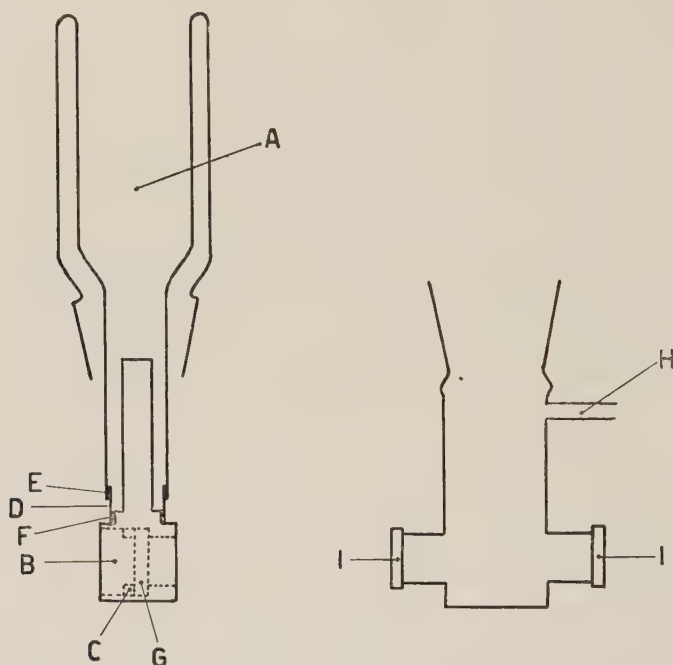


Fig. 1. - Cella per l'esecuzione di spettri alla temperatura dell'azoto liquido.

A: recipiente contenente l'azoto liquido; B: blocco in rame parzialmente immerso nell'aria liquida e a cui viene fissato il campione; C: anello di fissaggio disco porta campione; D: anello tubolare in Kovar; E: saldatura Kovar-vetro; F: saldatura Kovar-rame; G: disco in NaCl(o KBr) portacampione; H: presa per vuoto; I: finestre in NaCl(o KBr)

Allontanato il liquido, le provette da centrifuga venivano poste sotto vuoto per due giorni al fine di ottenere un perfetto essiccamento delle polveri. La scelta dell'alcool isopropilico come sospensivo è stata suggerita in base al suo alto potere disperdente, alla sua volatilità (p. e.  $82,3^{\circ}\text{C}$ ) accompagnata dalla completa insolubilità in esso della maggior parte dei composti inorganici.

Ho preparato i campioni spettroscopici facendo evaporare il liquido da una pasta di polvere e alcool isopropilico previamente distesa sul disco supporto.

*Cella per basse temperature (ved. fig. 1).*

La cella per eseguire gli spettri alla temperatura dell'azoto liquido è mostrata in figura 1. La sua costruzione ha richiesto l'uso di vetro speciale (Moly 501 della Ditta Saivo di Firenze) giacché il comune vetro Pyrex non si presta

a saldature con metalli. Il vetro usato ha permesso la saldatura al rame (metallo adatto in seguito alla sua elevata conducibilità termica) con un solo passaggio attraverso un anello tubolare in Kovar.

Durante l'esecuzione degli spettri si è mantenuto nella cella un vuoto spinto al fine di evitare un eccessivo raffreddamento delle sue parti esposte all'atmosfera (e principalmente delle finestre in NaCl(I) fig. 1) con conseguente condensazione su di esse del vapor acqueo atmosferico. Per la stessa ragione ho adottato la precauzione, terminati gli spettri, di far avvenire il riscaldamento della cella fino alla temperatura ambiente, mantenendo sempre in essa il vuoto. Tale operazione richiede un tempo molto lungo (circa 4 ore) ma salva da gravi danni i materiali ottici.

#### *Apparecchiature e condizioni sperimentali.*

La registrazione degli spettri è stata eseguita con uno spettrografo Beckman IR 2 con monomotore in fluoruro di litio. Per la registrazione è stato usato un registratore Speedomax tipo G delle Leeds e Northrup. La larghezza della fenditura, durante l'esecuzione degli spettri, era tale da fornire una larghezza spettrale (teorica) di  $0,004 \mu$  a  $5 \mu$  corrispondente a circa  $2 \text{ cm}^{-1}$ .

Ringrazio vivamente il prof. G. B. Bonino per il costante interessamento prestato durante l'esecuzione del presente lavoro.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. B. BONINO, G. FABBRI, « Rend. Accad. Lincei », VIII, 21, 246 (1956).
- [2] G. B. BONINO, O. SALVETTI, « Ricerca Scientifica », (C.N.R.) 26, 3627 (1956).
- [3] R. B. BARNES, L. G. BONNER, « Phys. Rev. », 49, 732 (1936).
- [4] R. L. HENRY, « J. Opt. Soc. Am. », 38, 775 (1948).
- [5] W. C. PRICE, K. S. TETLOW, « J. Chem. Phys. », 16, 1157 (1948).

**Chimica teorica.** — *Sulla struttura elettronica dell'ossido di benzonitrile.* Nota di GIUSEPPE DEL RE, presentata (\*) dal Socio A. QUILICO.

INTRODUZIONE. — L'ossido di benzonitrile I, scoperto da Werner e Buss nel 1894 e studiato da Wieland ai primi del secolo<sup>(1)</sup>, è stato di recente oggetto di numerose ricerche<sup>(2)</sup>.

Le reazioni, specialmente di addizione, a cui può partecipare il benzonitrilossido — e, prima fra tutte, la reazione di dimerizzazione a difenilfu-

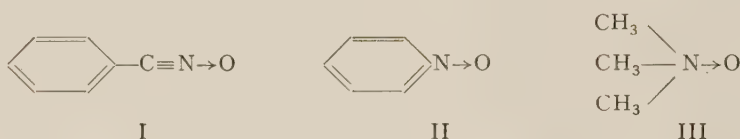
(\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) WERNER e BUSS, « Ber. », 27, 2193 (1894); WIELAND, « Ber. », 40 1667 (1907); WIELAND, *ibid.*, 42, 803, 816, 4207 (1909). Per alcune discussioni sulla struttura del benzonitrilossido ved. anche PAULING e HENDRICKS, « Journ. Am. Chem. Soc. », 48, 641 (1926); VON AUWERS, « Ber. », 61, 1041 (1928).

(2) Cfr. i numerosi lavori di QUILICO, SPERONI, SIMONETTA e coll. iniziati con la Nota: QUILICO e SPERONI, « Gazz. Chim. It. », 76, 148 (1946).



rossano, che esso subisce spontaneamente - interessano soprattutto il gruppo  $\text{—CNO}$ , la cui reattività è così elevata che l'anello benzenico non subisce alcuna delle reazioni che di solito lo caratterizzano, se non successivamente a profonda modificazione del gruppo ossinitrilico; questo fatto rende impossibile ottenere, da ricerche di carattere puramente chimico, indicazioni sulla configurazione del gruppo ossinitrilico e sulla sua interazione con il fenile. Rivestono perciò una importanza particolare le ricerche sulle proprietà fisiche di questo N-ossido, e specialmente quelle sul suo momento dipolare elettrico. L'interesse che presenta quest'ultimo è anche legato al fatto che il momento apparente dei legami N-ossidici nei numerosi N-ossidi noti presenta un'estrema variabilità. Ad esempio, nell'ossido di piridinà II il momento apparente del legame  $\text{N}\rightarrow\text{O}$  risulta di 2,1 D, laddove nel trimetilaminossido III tale momento ascende a 4,4 D <sup>(3)</sup>. Le differenze tra i



momenti sperimentali e i momenti calcolati (a partire dal trimetilaminossido) per gli N-ossidi non saturi sono così elevate da rendere molto difficile la loro immediata interpretazione in termini di effetti mesomeri e induttivi. Nel benzonitrilossido, poi, il momento apparente del legame  $\text{N}\rightarrow\text{O}$  è addirittura nullo (ved. *infra*). Le considerazioni precedenti ci hanno indotto a tentare un breve studio teorico sulla molecola del benzonitrilossido, diretto a interpretare le caratteristiche di questo composto, e in particolare il suo momento elettrico.

**DATI SPERIMENTALI.** - Abbiamo determinato il momento elettrico del benzonitrilossido e di alcuni suoi derivati sostituiti. Non riportiamo i risultati completi, che saranno esposti in altra Nota, ma ci limitiamo a osservare che essi confermano la simmetria assiale della molecola del benzonitrilossido. Nella tabella I riportiamo il momento trovato per il benzonitrilossido, insieme a quelli già noti <sup>(4)</sup> del benzonitrile, del piridin-N-ossido e della piridina.

Come si vede, i momenti del benzonitrilossido e del benzonitrile sono praticamente uguali, laddove l'introduzione del legame N-ossidico avrebbe fatto pensare a un notevole aumento di momento nel passaggio dal gruppo  $\text{—CN}$  al gruppo  $\text{—CNO}$ . Si noti fra l'altro che la perdita del doppietto solitario dell'azoto nel passaggio dal nitrile al nitrilossido è compensata dalla pre-

(3) LINTON, « Journ. Am. Chem. Soc. », 62, 1945 (1940).

(4) Vedi LANDOLT-BÖRNSTEIN, Berlin 1951. Sul benzonitrile un lavoro molto recente (LIDE, « Journ. Chem. Phys. », 22, 1577 (1954)) determina con misure in microonde un valore del momento di 4,14 D. Per la piridina cfr. anche BUCKINGHAM, CHAU, FREEMAN, LEFEVRE etc., « Journ. Chem. Soc. », 1956, 1405.

senza di quello dell'ossigeno nel nitrilossido, cosicch  non sembra che si possa attribuire neppure in parte a tale perdita l'uguaglianza dei momenti dei due composti.

TABELLA I.  
(*Momenti elettrici*).

piridina . . . . .	2,2 D in benzolo a 25°C . . . . .
piridin-N-ossido . . . . .	4,3 D in benzolo a 25°C . . . . .
benzonitrile . . . . .	4,0 D in benzolo a 25°C . . . . .
benzonitrilossido (*) . . . . .	4,0 D in benzolo a 15°C . . . . .

(\*)  $P_2 = 378$  cc;  $MR_2 = 39$  cc.

#### RISULTATI TEORICI.

*Metodo.* — Dei metodi approssimati oggi a disposizione per lo studio delle molecole, pare che solo quelli che tengono conto dell'interazione elettronica possano dare dei risultati quantitativamente attendibili. Questi metodi tuttavia sono recentissimi<sup>(5)</sup> e si debbono considerare ancora in fase sperimentale, dato che sono stati applicati a ben poche molecole. Abbiamo perci  ritenuto opportuno rimandare a un secondo momento l'applicazione di questi metodi al benzonitrilossido, dato che la presente ricerca si prefigge lo scopo di ottenere dei chiarimenti e delle previsioni, piuttosto che di accertare la bont  di un metodo. Abbiamo quindi impiegato il metodo standard degli orbitali molecolari (LCAO senza ricoprimento), che offre il vantaggio di essere stato ampiamente controllato. Se ne conoscono perci  tutte le limitazioni, e si pu  oggi concludere che, mentre da un punto di vista assoluto i risultati ottenuti con questo metodo appaiono molto incerti, in uno studio di carattere comparativo esso offre un quadro abbastanza buono delle propriet  molecolari. Abbiamo scelto come termini di confronto il benzonitrile, l'ossido di piridina e la piridina.

*Parametri.* — Come   noto, la scelta dei parametri da applicare agli eteroatomi   molto difficile, ed   stata fatta in modo variabile dai diversi autori. Noi abbiamo adottato i valori seguenti<sup>(6)</sup>:

$$\alpha_C = \alpha \quad ; \quad \alpha_N = \alpha + \beta \quad ; \quad \alpha_O = \alpha + 2\beta \quad ; \quad \beta_{CN} = \beta_{NO} = \beta_{CC} = \beta$$

(5) PARISER e PARR, « Journ. Chem. Phys. », 21, 466, 767 (1953); POPLE e SCHOFIELD, « Proc. Roy. Soc. », A 223, 233, 241 (1955).

(6) Cfr. fra gli altri: COULSON, « Trans. Far. Soc. », 42, 106 (1946); HILL e SUTTON, « Journ. Chim. Phys. », 46, 244 (1949) e discussione; BROWN, « Journ. Chem. Soc. », 1951, 1955.

Probabilmente non si deve attribuire eccessiva importanza alla scelta dei parametri, dato che, come abbiamo ricordato, il metodo è troppo grossolano perché questa sia veramente significativa<sup>(\*)</sup>. Ciò naturalmente non vuol dire che non si possa fare una scelta migliore: per il nitrobenzolo, ad esempio, che costituisce un caso abbastanza vicino al nostro, Simonetta e Vaciago<sup>(7)</sup> hanno accuratamente studiato i parametri da adottare perché il momento elettrico risultante dal calcolo corrisponda a quello sperimentale. Bisogna però osservare che il momento e le altre grandezze sperimentali che in genere si hanno a disposizione (fatta eccezione per gli spettri elettronici, la cui interpretazione è tuttavia molto difficile) sono grandezze che riguardano la molecola complessivamente: ed il numero di effetti secondari che giuoca su di esse è così elevato che sembra sussistere, anche nei calcoli più accurati, un ampio margine di arbitrarietà. D'altro canto, se si volesse fare una migliore scelta dei parametri, si dovrebbe inevitabilmente fare una scelta diversa da molecola a molecola, il che renderebbe del tutto privi di significato quei confronti che oggi sembrano la più lecita applicazione del metodo.

*Calcolo sull'ossido di benzonitrile.* - Il calcolo variazionale relativo all'ossido di benzonitrile ha condotto ai diagrammi molecolari indicati nelle figg. 1 e 2. Alla struttura classica corrisponde un'energia di legame di  $14\alpha + 20\beta$ , laddove quella trovata risulta di  $14\alpha + 23,382\beta$ . L'energia di risonanza complessiva risulta dunque di  $3,382\beta$ . Se consideriamo il gruppo —CNO isolato (figg. 3 e 4) l'energia di risonanza ascende a  $0,928\beta$ , cosicché l'energia di interazione con il fenile si può valutare in  $0,454\beta$ . Il momento associato con la distribuzione di cariche di fig. 1 si può calcolare ove si facciano opportune ipotesi sulle distanze di legame. A questo scopo ci è sembrato la cosa migliore basarci sulle distanze di legame per il benzonitrile<sup>(8)</sup>. Poiché gli indici di legame nel benzonitrile e nel benzonitrilossido non sono molto diversi (figg. 2 e 6) abbiamo adottato le stesse distanze del primo; in più, tenuto conto dell'indice di legame ottenuto per il legame N→O abbiamo adottato come valore della sua lunghezza  $1,26\text{ \AA}$ .<sup>(9)</sup> In queste ipotesi, il momento  $\pi$  trovato è di  $8,9\text{ D}$ .

*Calcoli sul benzonitrile.* - Il risultato del calcolo è mostrato nelle figg. 5 e 6. I valori dell'energia per la formula usuale, per la distribuzione trovata col calcolo, e di interazione con il fenile sono rispettivamente  $10\alpha + 12\beta$ ,

(\*) A questo proposito, ci siamo preoccupati di eseguire i calcoli per il benzonitrilossido anche con altri parametri, variando in particolare i valori di  $\alpha_N$  e  $\alpha_O$ . I risultati sono stati di poco diversi da quelli qui presentati, la cui validità semiquantitativa resta perciò confermata.

(7) SIMONETTA e VACIAGO, «Nuovo Cimento», **II**, 596 (1954); cfr. anche FAVINI e CARRÀ, «Gazz. Chim. It.», **85**, 1029 (1955).

(8) LIDE, op. cit. nella nota (4).

(9) Un valore molto accurato della distanza N→O non è richiesto dai nostri scopi. Per una eventuale discussione cfr. fra gli altri BLASINA, COSTA e SARTORI, «Gazz. Chim. It.», **85**, 1085 (1955), oltre al lavoro, citato alla nota (7), di SIMONETTA e VACIAGO.

$10\alpha + 14,937\beta$ ,  $0,465\beta$ . Nel passaggio dal benzonitrile al benzonitrilossido si ha invece una depressione dell'energia pari a  $0,445\beta$ , che si può attribuire all'intervento del legame N-ossidico. Un calcolo analogo a quello fatto per il benzonitrilossido porta ad un momento  $\pi$  di  $7,7\text{ D}$ .

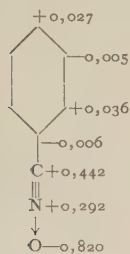


fig. 1

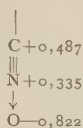


fig. 3

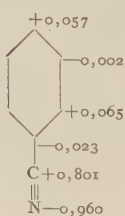


fig. 5

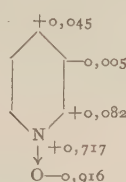


fig. 7

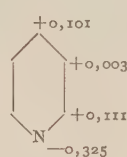


fig. 9

distribuzione delle cariche elettriche

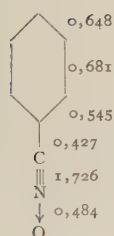


fig. 2

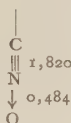


fig. 4.

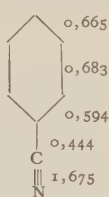


fig. 6

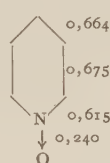


fig. 8

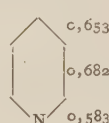


fig. 10

indici di legame

*Calcolo sull'ossido di piridina.* — Il diagramma molecolare ottenuto per l'ossido di piridina risulta dalle figg. 7 e 8. Il valore dell'energia per la formula usuale è di  $8\alpha + 11\beta$ ; dal calcolo risulta invece  $8\alpha + 13,425\beta$ , con energia di risonanza pari a  $2,425\beta$ . Poiché l'energia di risonanza per la piridina risulta con gli stessi parametri (ved. *infra*) di  $2,197\beta$ , la depressione dovuta al legame  $N \rightarrow O$  è per questo composto di  $0,228\beta$ . Il momento  $\pi$  associato alla distribuzione di fig. 7 è di  $6,9\text{ D}$ .

*Calcolo sulla piridina.* — Riportiamo anche i risultati del calcolo per la piridina, benché questo composto sia già stato molto studiato<sup>(10)</sup>, perché ci interessano i risultati ottenuti con gli stessi parametri adottati per gli altri composti. I diagrammi molecolari ottenuti sono riportati nelle figg. 9 e 10. Il momento  $\pi$  corrispondente risulta di  $2,1\text{ D}$ .

## DISCUSSIONE.

*Energie di risonanza.* — I risultati dei calcoli precedenti sono riassunti nella tabella II, nella quale sono compresi anche i momenti  $\pi$  calcolati e i momenti complessivi osservati. Per quanto riguarda le energie, si rileva che

(10) Cfr. fra gli altri LONGUET-HIGGINS e COULSON, « Journ. Chem. Soc. », 1949, 971, i cui risultati sono in ottimo accordo con i nostri.



il contributo portato all'energia di risonanza dal legame N-ossidico è piuttosto ridotto. La sua entità dipende naturalmene dalla scelta fatta per i parametri: è noto però che l'energia di risonanza non è molto sensibile alle variazioni dei parametri stessi e perciò si possono formulare le conclusioni seguenti. Nell'ossido di piridina la struttura a legame semipolare è senz'altro la più vicina a quella reale, come mostra anche il basso valore dell'indice del legame  $N \rightarrow O$  in questo composto <sup>(11)</sup>.

TABELLA II.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
piridina . . . . .	2,197 $\beta$	—	—	2,1 D	2,2 D
piridinossido . . . .	2,425 $\beta$	0,228 $\beta$	—	6,9 D	4,3 D
benzonitrile . . . . .	2,937 $\beta$	—	0,465 $\beta$	7,7 D	4,0 D
benzonitrilossido . . .	3,382 $\beta$	0,445 $\beta$	0,454 $\beta$	8,9 D	4,0 D

(a) energia di risonanza (\*);

(b) depressione dell'energia di risonanza dell'N-ossido rispetto al composto non ossidato;

(c) eccesso dell'energia di risonanza rispetto ai valori corrispondenti al benzolo e al sostituente;

(d) momento  $\pi$  calcolato;

(e) momento sperimentale.

(\*) La validità di un calcolo dell'energia di risonanza in presenza di eteroatomi è stata messa giustamente in discussione da ORCEL [«Trans. Far. Soc.», 47, 113, (1951)]. Tuttavia, quando è calcolata a partire dall'energia del legame  $\pi$  nell'etilene, riteniamo che essa possa avere, se non altro, un significato di semplice abbreviazione utile per la discussione.

Nel benzonitrilossido, la struttura a legame semipolare si può considerare ancora in discreto accordo con i risultati del calcolo; si deve però tener presente che tanto l'indice di legame quanto il contributo all'energia di risonanza sono più elevati. Ciò si può mettere in relazione con il fatto che in questo composto l'ossigeno interviene con due coppie  $\pi$ . Dalla valutazione dell'energia di interazione con il fenile nel benzonitrile e nel suo ossido, si trae una seconda importante conseguenza: essendo i due valori di tale energia 0,465  $\beta$  per il benzonitrile e 0,454  $\beta$  per il benzonitrilossido, si vede che l'effetto del legame N-ossidico è sostanzialmente limitato al gruppo  $-CNO$  e che, in ogni caso, esso è tale da ridurre l'accoppiamento con l'anello benzenico. Questa conclusione si può formulare altrimenti, osservando che nel benzonitrilossido possono aver luogo due effetti mesomeri contrarii, del tipo rappresentato nelle figg. 11 e 12:

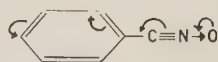


fig. 11

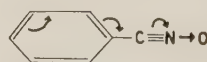


fig. 12

(11) Questo risultato è in accordo con le osservazioni di BLASINA, COSTA e SARTORI (op. cit. alla nota (9)).

D'altra parte, il calcolo porta alla conclusione che dei due effetti quello più importante è quello di fig. 12. Si può anche prevedere perciò che la sostituzione di gruppi metilici in opportune posizioni dell'anello benzenico esalterà il momento del nitrilossido più di quanto non esalti quello del nitrile, perché, oltre a favorire l'effetto  $+M$ , ostacolerà o addirittura inibirà l'effetto  $-M$ . (Ricerche in corso).

A parte tali effetti di secondo ordine, si può concludere che il gruppo  $-CNO$  presenta, nei confronti dell'anello benzenico, un comportamento essenzialmente simile a quello del gruppo nitrilico.

*Momenti elettrici.* — Abbiamo già ricordato che il valore apparente del momento del legame  $N \rightarrow O$  nel benzonitrilossido è praticamente nullo, laddove nell'ossido di piridina esso è di 2,1 D, e nel trimetilaminossido di 4,4 D. Ci poniamo la domanda se il calcolo giustifichi tali notevoli differenze.

La variazione del momento  $\pi$  dalla piridina all'ossido di piridina, dai calcoli precedenti, risulta di 4,5 D, la corrispondente variazione tra benzonitrile e benzonitrilossido è invece di soli 1,2 D. La variazione del momento apparente del legame  $N$ -ossidico tra i due  $N$ -ossidi studiati è dunque riprodotta dal calcolo. La si può perciò interpretare come dovuta soprattutto alla ripartizione degli elettroni  $\pi$ . Ora, per quanto riguarda i diagrammi delle cariche, la differenza sostanziale tra l'ossido di piridina e l'ossido di benzonitrile sta nella carica dell'azoto. Si deve ritenere perciò che la causa principale della differenza tra i momenti apparenti del legame  $N \rightarrow O$  nei due composti stia nel fatto che nel benzonitrilossido la carica dell'azoto si comunica al carbonio adiacente in misura notevole, determinando, rispetto al benzonitrile, una ridistribuzione di cariche tale da far svanire il momento proprio del gruppo  $-CN$ . Dunque, anche dal punto di vista elettrico, il gruppo  $-CNO$  nel suo insieme equivale al gruppo nitrilico. Questa conclusione, insieme a quella già ricavata dalla discussione sulle energie, si può esprimere attribuendo al legame  $N \rightarrow O$  due distinti effetti:

- 1° una parziale inibizione delle forme ioniche del gruppo nitrilico;
- 2° un effetto mesomero nei confronti dell'anello aromatico il cui risultato è quello di diminuirne la polarità.

Nell'ossido di piridina interviene solo il secondo effetto<sup>(12)</sup>, e questo spiega perché il momento di questo  $N$ -ossido si mantenga notevolmente superiore a quello della piridina<sup>(13)</sup>.

Queste considerazioni sono le uniche che si possono trarre dai diagrammi delle cariche e dai momenti calcolati. Il confronto effettuato non può dire

(12) I diagrammi ottenuti per l'ossido di piridina e le conclusioni qui esposte concordano pienamente con le osservazioni fatte nei lavori di COLONNA e coll. Vedi in particolare COLONNA, «Gazz. Chim. It.», 82, 503, (1952).

(13) È interessante osservare che clorobenzolo e fenilcloroacetilene presentano nei confronti del momento elettrico un comportamento analogo ai due  $N$ -ossidi in questione. Wilson e Wentzke osservano infatti che nel fenilcloroacetilene il legame  $C-Cl$  mostra una polarità molto inferiore a quella che mostra nel clorobenzolo (WILSON e WENTZKE, « Journ. Am. Chem. Soc. », 46, 2025 (1934)).

nulla, almeno direttamente, riguardo ai valori assoluti dei momenti. Si può tuttavia trarre qualche chiarimento in base alle seguenti considerazioni.

Il momento complessivo calcolato per la piridina (assumendo il momento del legame C—N pari a 0,45 D) è di 2,6 D, mentre quello del suo ossido si discosta dal valore sperimentale di 3,3 D, e risulta vicino al valore che si potrebbe calcolare addittivamente partendo dal momento del legame N—O nell'ossido di trimetilammina. Si osservi però che anche per il benzonitrile il momento calcolato è molto superiore al momento sperimentale.

È chiaro perciò che il momento calcolato per l'ossido di piridina va notevolmente ridotto in base a quelli che si possono genericamente chiamare «effetti di polarizzazione interna»<sup>(14)</sup>. Ora, tenendo conto del numero di elettroni mobili presenti nelle quattro molecole in istudio, ci si può render conto intuitivamente che l'eccesso del momento calcolato rispetto a quello sperimentale deve crescere nell'ordine: piridina, ossido di piridina, benzonitrile, benzonitrilossido. Si aggiunga poi la considerazione che i momenti in questione sono elevati, e quindi non sono trascurabili gli effetti dovuti alla polarizzazione degli elettroni  $\sigma$  e di nocciolo. Risulta perciò che le conclusioni precedenti giustificano anche i risultati sperimentali per l'ossido di piridina, e che, se si applicano opportuni fattori di riduzione ai valori calcolati, si ottiene anche un corretto ordine di grandezza per i momenti.

Delle precedenti considerazioni si potrebbe anche tener conto nel calcolo, almeno in parte. Difatti la scelta di parametri uguali per tutte e quattro le molecole studiate non è rigorosamente esatta. Tale scelta è stata però già giustificata, in base alla necessità di stabilire una base comune di calcolo per effettuare un utile confronto.

*Reattività.* — Benché questo argomento non interessi direttamente la presente ricerca, si può fare un accenno ad alcune interessanti conseguenze dei calcoli effettuati. È intanto evidente che, a parte la sua alta reattività, il gruppo ossinitrilico inibisce le reazioni sull'anello anche perché lo disattiva. Diversa è la situazione per l'ossido di piridina, le cui reazioni<sup>(12)</sup> concordano bene con i risultati qui ottenuti. Quanto al gruppo ossinitrilico, si nota che esso può reagire nelle due forme mesomere:



Dai valori delle cariche si dovrebbe arguire che la prima forma è più importante della seconda, anche se questa conclusione è da prendersi *cum grano salis*, sia per la grossolanità del metodo, sia perché notoriamente nelle reazioni non ha importanza soltanto la distribuzione statica delle cariche, ma anche la situazione che si presenta a seconda dell'ambiente e dei

(14) Per qualche considerazione relativa a questi effetti, si veda la discussione che segue il lavoro di HILL e SUTTON citato alla nota (6).

reattivi<sup>(15)</sup>. Qui ci limiteremo a osservare che in realtà si conoscono per il benzonitrilossido numerose reazioni di addizione a legami multipli<sup>(2)</sup>, nelle quali esso pare effettivamente reagire con meccanismo elettrofilo per attacco iniziale al carbonio: con un triplo legame  $\text{—C}\equiv\text{C—}$ , per esempio, si ottiene un nucleo isossazolico; con un doppio legame olefinico, derivati isossazolinici; con un nitrile, un nucleo di 1-oxa-2,4-diazolo. In base alle precedenti conclusioni sulla somiglianza tra il gruppo nitrilico e il gruppo ossinitrilico si deve presumere che il meccanismo elettrofilo in questione sia effettivamente quello corrispondente alla maggior parte delle reazioni del benzonitrilossido. Si può anche ritenere che l'azione dell'HCl anidro debba svolgersi invece con meccanismo nucleofilo, analogamente a quanto si suppone per il benzonitrile<sup>(16)</sup>. Si hanno indicazioni in questo senso.

Di più difficile interpretazione è il meccanismo della reazione di dimezzazione a fuossano, nella quale sembrerebbe invece intervenire un attacco iniziale all'atomo di azoto. Queste reazioni non sono state tuttavia studiate dal punto di vista cinetico, per cui è prematura un'accurata discussione del loro meccanismo.

CONCLUSIONE. — La presente ricerca si era prefissa come scopo precipuo di esaminare se le varie cause a cui si poteva attribuire il comportamento dei vari N-ossidi, e in particolare del benzonitrilossido, nei confronti del momento elettrico, trovassero una definizione attraverso l'applicazione del metodo degli orbitali molecolari nella sua forma più semplice. Si può dire che tale definizione è stata ottenuta, perché si è visto che il comportamento suddetto si può in massima parte attribuire ad effetti mesomeri da parte dell'ossigeno. Si è inoltre concluso che il gruppo ossinitrilico, che può presentare effetti opposti, per cui non si sa bene *a priori* se classificarlo fra i sostituenti di prima o di seconda specie, deve senz'altro ritenersi molto simile al gruppo nitrilico, e perciò appartiene a quest'ultima categoria.

Ringrazio il prof. H. C. Longuet-Higgins, per l'utile discussione avuta con lui sugli argomenti della presente ricerca. Ringrazio anche la sig.na Adriana Cantelmo per avere gentilmente riveduto alcuni calcoli.

(15) La letteratura sull'argomento è vastissima. Cfr. per esempio: COULSON, DAUDEL e DAUDEL, « Bull. Soc. Chim. France », 15, 1181 (1948).

(16) REMICK, *Electronic interpretations of Org. Chem.*, New York, 1950.



**Chimica.** — *Ricerche spettrofotometriche I.R. ed U.V. su una serie di esteri pirrolici* <sup>(\*)</sup>. Nota di MARISA SCROCCO e RODOLFO NICOLAUS, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

A proseguimento di precedenti ricerche su di una serie di acidi pirrolici <sup>(1)</sup>, sono stati presi in esame i corrispondenti esteri e sono state eseguite misure spettrofotometriche nell'infrarosso, nella zona di vibrazione dell'NH (2-3  $\mu$ ) e nell'U.V.

L'esterificazione dei composti si è resa necessaria per aumentare la solubilità di questi in solventi apolari utili nella zona spettrale in esame.

Si è tentato di eseguire su queste sostanze anche misure di  $pK_a$  dell'NH con il metodo di Rosenblatt già da noi usato, ma i dati sono, in genere, poco attendibili a causa della rapidità con cui questi esteri, specie quelli policarbonilici, vengono saponificati in ambiente fortemente alcalino.

Per questo nella discussione dei risultati vengono usati i valori della  $\Delta\nu$  tra frequenza libera ed associata, tenendo conto della relazione trovata tra questa ed il  $pK_a$  dell'NH <sup>(2)</sup>.

Prendiamo in esame per primi i termini più semplici della serie. Noi avevamo già riscontrato, nello studio infrarosso di vibrazione del C = O carbonilico di questi composti, che l'introduzione di un carbonile in  $\alpha$  o in  $\beta$  rispetto al gruppo imminico nell'anello pirrolico ha un valore diverso sulla distribuzione elettronica nella molecola.

Inoltre i dati U.V. ci avvertivano di una maggiore coniugazione del C = O da una sostituzione in  $\alpha$  che non in  $\beta$ .

Se ora esaminiamo le frequenze di vibrazione dell'NH negli esteri corrispondenti, possiamo vedere che la frequenza di vibrazione libera ha un valore più basso nell' $\alpha$  sostituito che non nel  $\beta$  sostituito e, questo, potrebbe essere in parte attribuito ad una chelazione intramolecolare, mentre, inversamente, la  $\Delta\nu$  tra vibrazione libera ed associata è di parecchio maggiore nel  $\beta$ . Questo dato appare in contraddizione con quanto detto sopra sul valore della coniugazione in funzione della posizione, ma può essere spiegato con l'accennata chelazione intramolecolare.

È necessario accennare che le due bande che qui chiamiamo « libera » ed « associata », a forte risoluzione (per queste misure è stato usato un apparecchio Perkin Elmer 112 doppio passo montato con prisma di LiF) appaiono quasi sempre costituite da un involuppo di bande poco esteso per la frequenza libera e più esteso, tanto da essere in qualche caso, difficilmente apprezzabile con esattezza, per la banda associata.

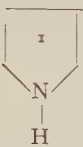
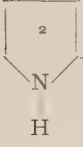
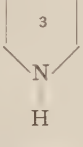
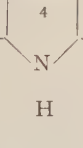
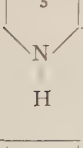
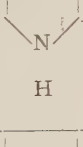
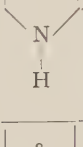
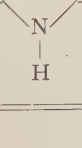
(\*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale ed Inorganica e di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XX, 795 (1956).

(2) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXI, 103 (1956).

TABELLA I.

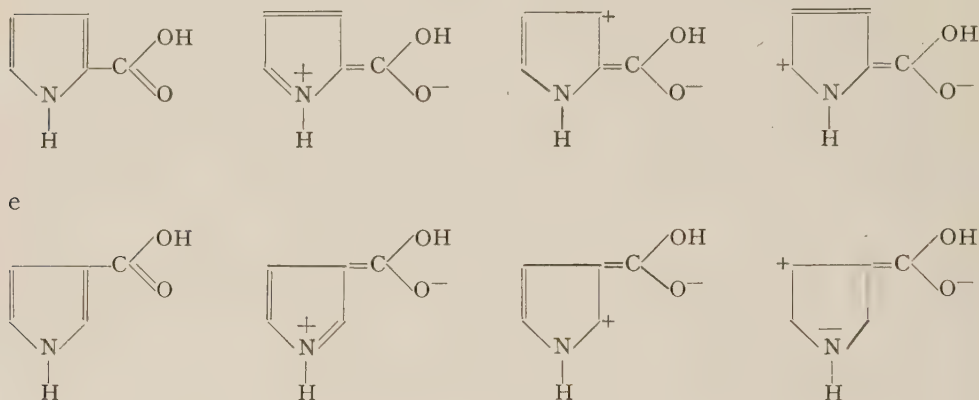
Sostanza	I.R. $\nu_{N-H}$	$\Delta\nu$	U.V. $\lambda$ max
 1	3490 3320	170	247
 2	3472 3326	146	267
 3	ins.	—	250
 4	3456 3286	170	277
 5	3456 3316	140	246 282
 6	3457 3295	162	267
 7	3454 3284	170	267
 8	{ 3456 3442 3430  3281 3265 3255	—	275

Per questo consideriamo i valori di  $\Delta\nu$  non come assoluti, ma come abbastanza approssimati per una discussione comparativa.

Proseguendo l'esame sulla serie degli esteri bicarbossilici, possiamo adottare gli stessi criteri che sono stati già usati per lo studio di un'altra serie acida del pirrolo metil-sostituita.

Consideriamo i composti in esame come una serie derivante, per esempio, dall'estere  $\alpha$ -pirrol-carbonico nel quale si è introdotto un nuovo carbossile nelle altre posizioni disponibili.

Se riprendiamo in esame gli schemi della teoria della risonanza già proposti per gli acidi monocarbossilici



si può vedere che, in ciascuna delle forme, solo per uno dei due carbossili è possibile la coniugazione con l'anello e, se nell'anello è occupata da uno dei due carbossili una posizione  $\alpha$ , possiamo, in base a quello che si è precedentemente accertato, pensare che sarà questo quello che preferenzialmente si coniugherà con l'anello e che saranno, quindi, le forme con la coniugazione in  $\alpha$  quelle che avranno il peso maggiore nella risonanza.

Esaminiamo ora le  $\Delta\nu$  dei vari isomeri bicarbossilici in confronto con la  $\Delta\nu$  dell'estere  $\alpha$ -pirrol-carbonico.

Per il composto VI si osserva un sensibile allargamento nella  $\Delta\nu$  che può essere considerato come una misura del contributo alla risonanza delle forme coniugate in  $\beta$ .

Il composto V, al contrario, presenta un raccorciamento nella distanza tra le due frequenze in esame e questa anomalia è imputabile, con ogni probabilità, ad un effetto di inibizione sterica per cui i gruppi sostituenti vengono ruotati fuori del piano dell'anello restando così diminuita la loro capacità di coniugazione.

Nel composto IV, che ha le due posizioni  $\alpha$  sostituite, si ha la maggiore  $\Delta\nu$ .

In questo caso, non esistendo una posizione preferenziale, si può supporre che la carica libera dell'azoto risuoni ugualmente tra i due carbossili e questa ipotesi trova conferma nello spettro I.R. del  $C=O$  che, per questo

composto, presenta il medesimo doppietto<sup>(3)</sup> dell'acido  $\alpha$ -pirrol-carbonico (i due  $C=O$  sono ugualmente polarizzati) ad una frequenza di vibrazione più alta ( $1730-1715\text{ cm}^{-1}$ ) che indica come i due  $C=O$  in posizione  $\alpha$  sono meno polarizzati che un unico  $C=O$  ugualmente in posizione  $\alpha$  ( $1690-1677\text{ cm}^{-1}$ ).

Per il composto sostituito in  $\beta$  e  $\beta'$ , data la sua insufficiente solubilità in  $CCl_4$ , non abbiamo dati infrarossi di  $\Delta\nu$  e non è quindi possibile farlo entrare in discussione.

Se si osservano gli effetti di posizione del sostituito sulla serie derivante dall'estere  $\alpha$  pirrol-carbonico, si può vedere che l'ordine di sostituzione per il quale si ha maggior effetto induttivo del sostituito è:  $3 < 4 < 5$ , mentre quello trovato per la serie metil sostituita risulta:  $4 < 3 < 5$ .

Questi ordini possono considerarsi equivalenti se si considera che l'inversione dei primi due termini può essere dovuta ad un effetto di inibizione sterica che risulta molto forte nel caso in cui i due sostituenti in orto sono due carbossili esterificati, mentre è trascurabile o addirittura nulla (lavoro sugli acidi metil-sostituiti) nel caso in cui uno dei sostituenti è un  $-CH_3$ .

Gli acidi tricarbossilici sono meno significativi, sia per la maggiore complessità dello spettro nel quale si osservano, per le bande fondamentali, degli involucri troppo estesi (sostanza VIII), sia perché è difficile farsi un'idea delle interazioni che entrano in gioco nella distribuzione degli elettroni.

#### PARTE SPERIMENTALE.

La letteratura riguardante la preparazione degli esteri di trova su «Gazzetta Chim. Ital.», 83, 239 (1953); 84, 230 (1954); 86, 358 (1956); 86, 757 (1956).

Gli esteri sono stati tutti ripreparati e purificati per sublimazione e successiva ricristallizzazione fino a punto di fusione costante. Le misure I.R. sono state eseguite su soluzioni in tetracloruro di carbonio con uno spettrofotometro Perkin - Elmer 112 montato con prisma di fluoruro di litio e quelle U.V. in soluzione acquosa con un Bekman D.U.

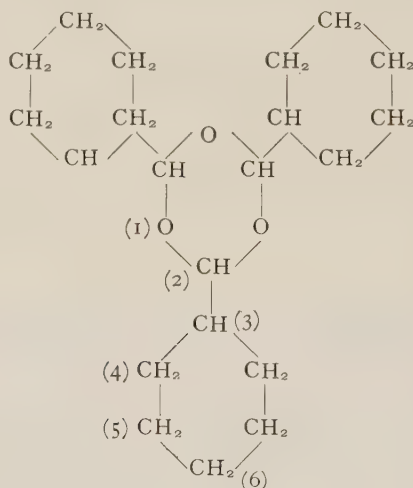
(3) Su questo sdoppiamento di banda osservabile a forti risoluzioni torneremo in un prossimo lavoro.



**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina del trimero della esaidrobenzaldeide.* Nota di PAOLO CORRADINI, presentata (\*) dal Socio G. NATTA.

Pochi lavori sono stati sinora eseguiti, da un punto di vista strutturistico, sulla natura dei prodotti ciclici di polimerizzazione delle aldeidi. Sono stati studiati coi raggi X da Moerman<sup>(1)</sup> il triossimetilene e da Pauling e Carpenter<sup>(2)</sup> il tetramero della aldeide acetica. Tali prodotti presentavano infatti particolari proprietà cristallochimiche da renderli atti ad una accurata determinazione strutturale. Con i raggi di elettroni è stato inoltre studiato<sup>(3)</sup> il trimero della aldeide acetica.

A noi è sembrato opportuno prendere in esame il trimero della esaidrobenzaldeide



sia per aggiungere altri dati relativi alla costituzione del nucleo centrale triossanico, sia perché da questo composto dovrebbe essere possibile ricavare ulteriori informazioni sulla configurazione dell'anello cicloesanoico. Lo studio di tale anello è stato sinora eseguito col metodo dell'atomo pesante, con sacrificio quindi nella determinazione accurata di angoli e distanze<sup>(4-7)</sup>.

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) N. F. MOERMANN, « Rec. trav. chim. Pays Bas », 56, 161 (1937).

(2) L. PAULING e D. C. CARPENTER, « J.A.C.S. », 58, 1274 (1936).

(3) Z. G. PINSKER, *Electron Diffraction*, p. 350, Butterworths Scientific Publications, London 1953.

(4) O. HASSEL ed E. W. LUND, « Acta Chem. Scand. », 3, 203 (1949).

(5) O. ELLEFSEN, O. HASSEL ed E. W. LUND, « Acta Chem. Scand. », 4, 1145 (1950).

(6) S. FURBERG ed O. HASSEL, « Acta Chem. Scand. », 4, 597 (1950).

(7) E. W. LUND, « Acta Chem. Scand. », 4, 1109 (1950).

Sono stati scelti per l'esame coi raggi X alcuni cristalli aghiformi, spon-  
taneamente formati in seno alla esaidrobenzaldeide. Dai fotogrammi oscil-  
latori e Weissenberg eseguiti col metodo dell'equinclinazione sono state cal-  
colate le costanti della cella elementare esagonale che risultano

$$a = b = 11.91 \pm 0.04 \text{ \AA} \quad c = 8.17 \pm 0.03 \text{ \AA}.$$

Dalla assenza sistematica dei riflessi  $h\bar{h}0l$  con  $l = 2n + 1$  ed avendo i  
cristalli simmetria di Laue  $D_{6h}$ , sono possibili gruppi spaziali  $D_{6h}(3)$ ,  $C_{6v}(3)$ ,  
 $D_{3h}(4)$ . Si possono scartare, da considerazioni sulla simmetria possibile della  
molecola e dalla densità sperimentale dei cristalli (1.14) i gruppi spaziali  
 $D_{6h}(3)$  e  $D_{3h}(4)$ .

Resta il gruppo spaziale  $C_{6v}(3)$ , che è polare e non centrosimmetrico.  
La proiezione del contenuto della cella è tuttavia centrosimmetrica sul piano  
 $a-b$ .

In una cella elementare debbono essere contenute due molecole.

La presenza di un riflesso 002 estremamente intenso e la geometria del  
cristallo portano immediatamente alla conclusione che le molecole giacciono  
stratificate nel piano ( $ab$ ) e che tali strati siano separati lungo l'asse  $c$  da di-  
stanze di Van der Waals di circa  $4 \text{ \AA} \left(\frac{1}{2}c\right)$ . Una conferma si ritrova nel  
fatto che, come risulta dai diagrammi rotatori intorno all'asse  $c$  e dai foto-  
grammi Weissenberg degli strati superiori, vale approssimativamente la  
relazione  $I_{hkl} = I_{hkl'}$  per  $l = 2n$ ,  $l' = 2m$ ,  $n$  e  $m$  interi.

E infatti il fattore di struttura, mancando il gruppo spaziale di un centro  
di simmetria, è dato da <sup>(8)</sup>

$$|F_{hkl}| = \sqrt{(\sum_n A_n)^2 + (\sum_n B_n)^2}$$

dove l'indice  $n$  si riferisce all' $n$ -simo atomo indipendente, con

$$A_n = 4f_n \cos 2\pi lz_n \{ \cos 2\pi i\xi_n \cos 2\pi(h-k)\eta_n + \cos 2\pi h\xi_n \cos 2\pi(k-i)\eta_n + \\ + \cos 2\pi k\xi_n \cos 2\pi(i-h)\eta_n \}$$

$$B_n = 4f_n \sin 2\pi lz_n \{ \cos 2\pi i\xi_n \cos 2\pi(h-k)\eta_n + \cos 2\pi h\xi_n \cos 2\pi(k-i)\eta_n + \\ + \cos 2\pi k\xi_n \cos 2\pi(i-h)\eta_n \}$$

con

$$\frac{x_n + y_n}{2} = \xi_n \quad \text{e} \quad \frac{x_n - y_n}{2} = \eta_n.$$

È perciò  $F_{hkl} = F_{hkl'}$  per  $l = 2n$ ,  $l' = 2m$ ,  $2n \neq 2m$  solo quando si  
ponga  $z_n = \text{cost}$  e cioè, essendo l'origine lungo l'asse  $z$  arbitraria, quando si  
ponga  $z = 0$ ; per tutti gli atomi di una molecola.

Dall'esame delle posizioni speciali e generali del gruppo spaziale cui appar-  
tengono i cristalli risulta evidente che gli atomi 1, 2, 3, 6 cadono in 6 ( $c$ )  
mentre gli atomi 4, 5 cadono in 12 ( $d$ ):

(8) *Intern. Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen*, Gebr. Bornträger Berlin 1935.

$$6(c) \quad x, o, z; o, x, z; \bar{x}, \bar{x}z; \bar{x}, o, \frac{1}{2} + z, o, \bar{x}, \frac{1}{2} + z; y, x, \frac{1}{2} + z$$

$$12(d) \quad x, y, z; y, x, z; \bar{y}, x - y, z; \bar{x}, y - x, z; y - x, \bar{x}, z;$$

$$x - y, \bar{y}, z; \bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2} + z; \bar{y}, \bar{x}, \frac{1}{2} + z; y, y - x, \frac{1}{2} + z;$$

$$x - y, x, \frac{1}{2} + z; y - x, y, \frac{1}{2} + z.$$

Se ne deduce che la molecola possiede un piano di simmetria passante per gli atomi contrassegnati coi numeri 2, 3, 6 e che quindi tanto il nucleo cicloesamico che quello triossanico non possono avere che una configurazione a seggiola con gli atomi a tre a tre in piani molto vicini e perpendicolari a  $c$ .

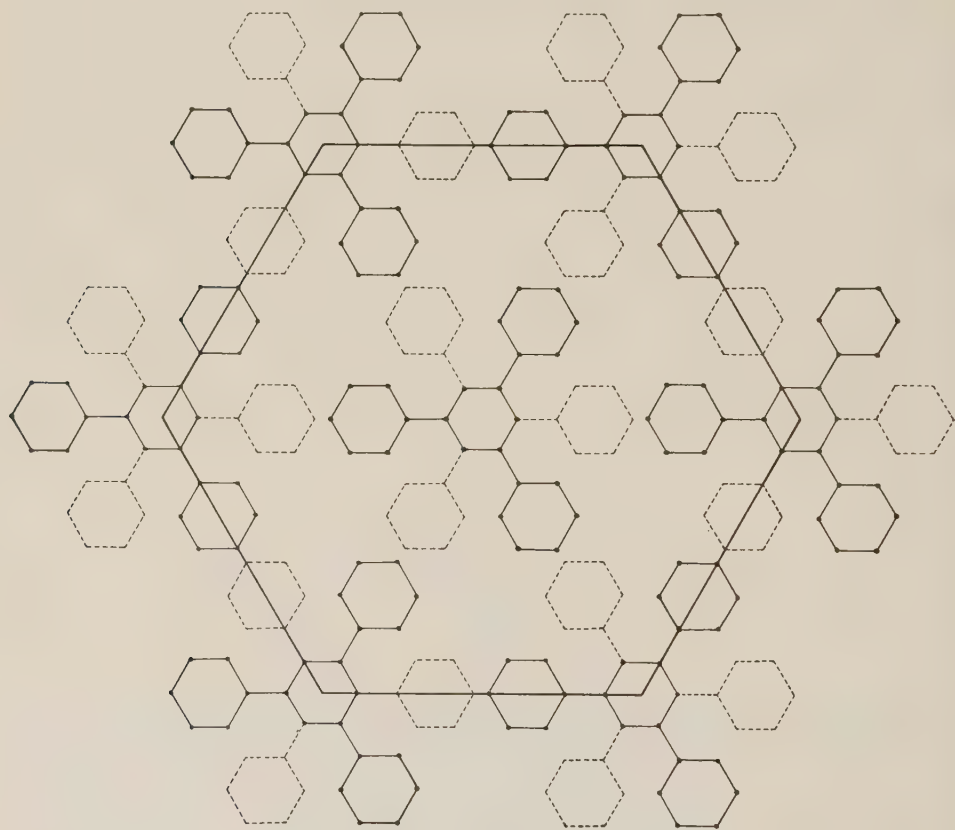


Fig. 1. - Modello dell'impacchettamento delle molecole sul piano  $a-b$ . Lo strato di molecole a tratto pieno è sfalsato lungo  $c$  di circa  $4 \text{ \AA}$  rispetto allo strato di molecole tratteggiate.

Il modello dell'impacchettamento delle molecole risulta pertanto quello di fig. 1. A uno strato di molecole segnate a tratto pieno succede a circa  $4 \text{ \AA}$  di distanza uno strato di molecole disegnate a tratteggio. Le distanze tra gli atomi a contatto di Van der Waals superano tutte i  $4 \text{ \AA}$  tra atomi di carbonio diversi, sia nel piano  $a-b$  che lungo  $c$ , mentre la polarità della struttura si manifesta particolarmente bene nella serie di contatti realiz-

zati tra gli idrogeni assiali di una molecola sottostante con gli ossigeni della molecola soprastante (fig. 2).

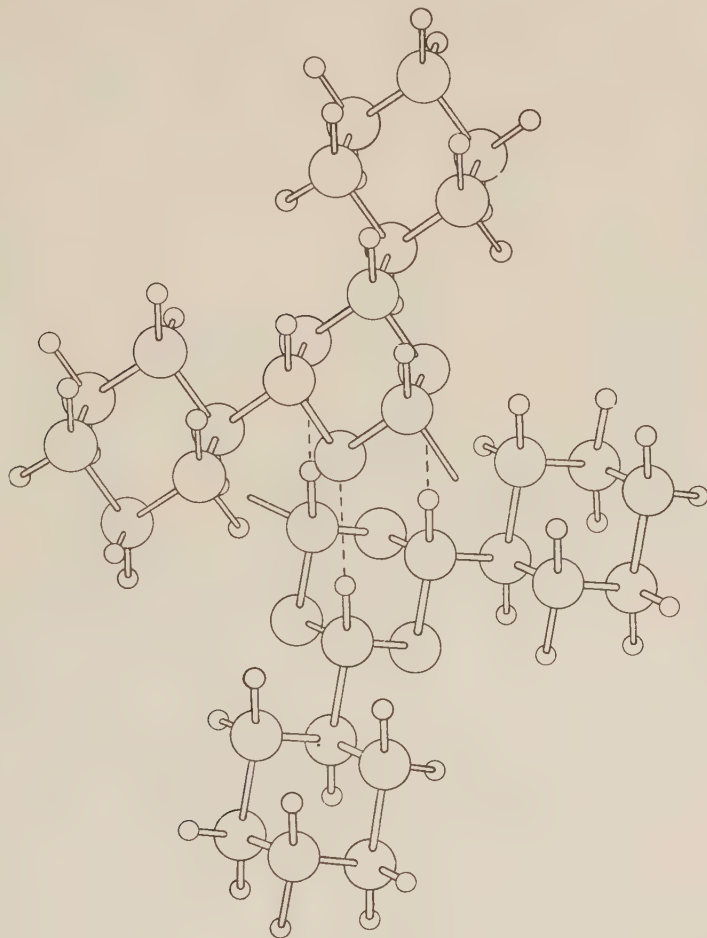


Fig. 2. — Modello schematico del modo di realizzazione dei contatti di Van der Waals tra nuclei triossanici lungo  $c$ .

TABELLA I.

*Coordinate usate nel calcolo dei fattori di struttura.*

	$\xi = \frac{x+y}{2}$	$\eta = \frac{x-y}{2}$
O . . . . .	.0566	.0566
C <sub>1</sub> . . . . .	.1132	.0000
C <sub>2</sub> . . . . .	.2351	.0000
C <sub>3</sub> . . . . .	.4789	.0000
C <sub>4</sub> (2) . . . . .	.2960	.0609
C <sub>5</sub> (2) . . . . .	.4179	.0609



L'accordo migliore sul piano equatoriale tra fattori di struttura calcolati e sperimentali si ottiene ponendo  $\widehat{C-O-C} = \widehat{C-C-C} = 109^\circ 30'$ ;  $C-C = 1,54 \text{ \AA}$ ;  $C-O = 1,43 \text{ \AA}$ . Riteniamo che questi valori siano approssimati entro  $30'$  e  $0,02 \text{ \AA}$  rispettivamente, in quanto i calcoli si dimostrano molto sensibili per la particolare geometria della molecola, a piccole variazioni di questi parametri.

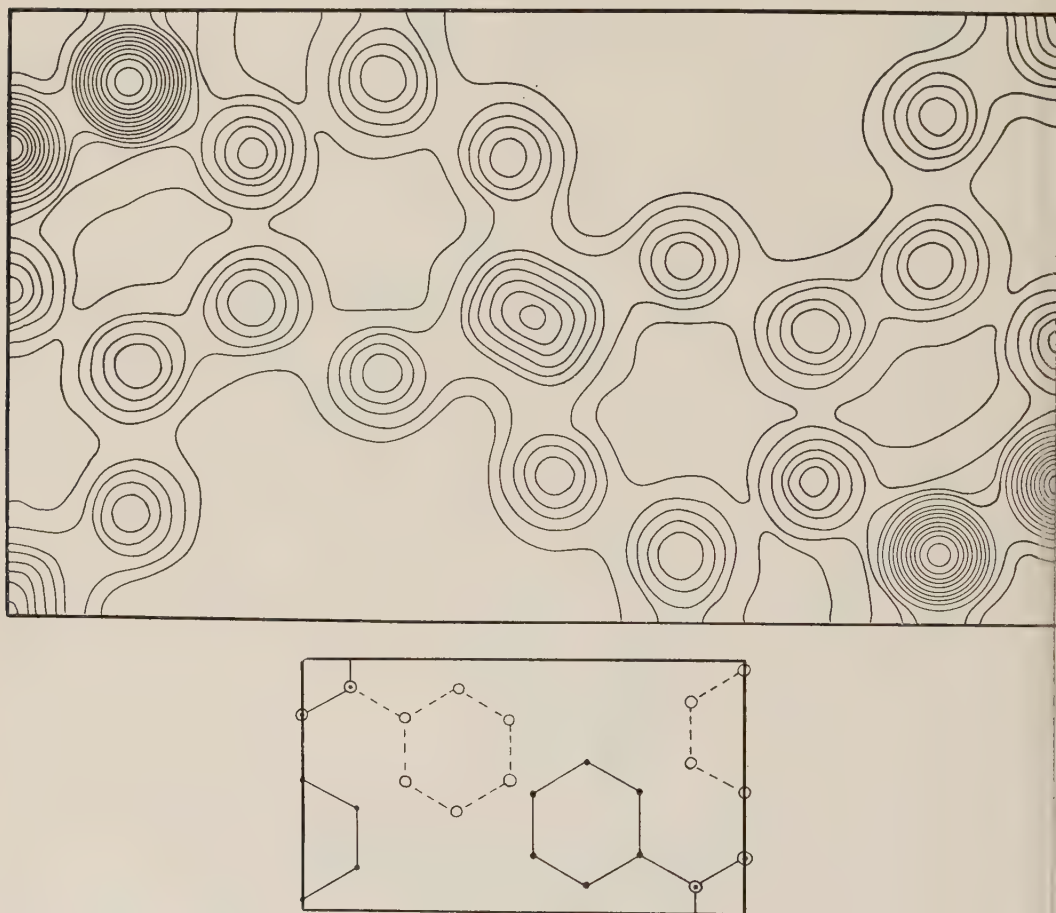


Fig. 3. - Proiezione della densità elettronica sul piano  $a-b$  ( $1/2$  cella). Contorni di 2, 3, 4, ecc. elettroni per  $\text{\AA}^2$ .

Nella tabella II è mostrato il tipo d'accordo ottenuto tra fattori di struttura calcolati e osservati sul piano  $hko$ , usando le coordinate tabulate nella tabella I. Il fattore di temperatura ricavato col metodo di Wilson risulta  $B = 4,1 \text{ \AA}^2$ .

L'indice di attendibilità  $R$  risulta così 0,14 includendo fattori di struttura osservati e non osservati.

La proiezione della densità elettronica presenta una ottima risoluzione (fig. 3), permettendo di confermare le coordinate degli atomi di carbonio e ossigeno ricavate per tentativi.

TABELLA II.

*Confronto fra i fattori di struttura osservati e calcolati.*

Indice	F <sub>oss</sub>	F <sub>calc</sub>	Indice	F <sub>oss</sub>	F <sub>calc</sub>	Indice	F <sub>oss</sub>	F <sub>calc</sub>
100	52	+ 55	730	—	+ 1	870	—	— 2
110	7	— 7	900	24	+ 26	960	—	+ 1
200	40	+ 44	820	4	+ 4	1220	3	— 3
210	8	+ 8	650	11	— 12			
300	18	— 17	910	—	+ 1			
220	10	+ 6	740	—	0			
310	4	— 4	830	—	+ 2			
400	5	— 5	1000	6	+ 4			
320	30	— 32	920	—	+ 4			
410	—	— 1	660	8	— 7			
500	12	— 12	750	—	— 1			
330	45	— 44	1010	4	+ 3			
420	8	— 9	840	—	0			
510	5	— 6	930	—	0			
600	16	+ 14	1100	—	+ 2			
430	4	— 4	1020	—	0			
520	3	— 3	760	—	— 2			
610	—	— 2	850	—	— 3			
440	—	— 1	1110	—	0			
700	—	— 3	940	—	0			
530	7	— 9	1030	—	0			
620	5	+ 9	1200	—	— 1			
710	—	0	1120	—	— 1			
540	4	— 3	770	—	— 2			
630	—	0	860	—	+ 1			
800	38	+ 44	950	—	— 1			
720	—	+ 1	1040	—	0			
810	16	+ 14	1210	—	+ 1			
550	—	— 3	1130	7	— 9			
640	—	+ 1	1300	—	— 1			

Un'analisi più dettagliata del prodotto potrebbe fornire certamente anche le coordinate degli idrogeni.

Da questo esame preliminare si può già sin d'ora tuttavia concludere che:

1° l'anello cicloesamico presenta una conformazione a seggiola, soddisfacente il principio del massimo allontanamento dei legami semplici con

$$\widehat{\text{C}-\text{C}-\text{C}} = 109^\circ 30' + 30'$$

$$\text{e } \text{C}-\text{C} = 1,54 \pm 0,02 \text{ \AA}$$

2° l'anello triossanico presenta pure una conformazione a seggiola, con legami tetraedrici anche per l'atomo di ossigeno e una distanza  $\text{C}-\text{O} = 1,43 \pm 0,02 \text{ \AA}$ .

Non è improbabile che il prodotto oleoso che si forma insieme a quello cristallino per polimerizzazione dall'aldeide esaidrobenzoica sia un isomero di costellazione con un anello cicloesamico uscente assialmente rispetto all'anello triossanico. La scarsa simmetria ne impedirebbe un efficiente impacchettamento, prevenendone quindi la possibilità di cristallizzazione.

**Chimica.** — *L'acido benzimidazol-N-acetico e la sua azione auxinica* (\*). Nota di FULVIO CACACE, RAFFAELE GIULIANO e INAMUL-HAQ, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. GIACOMELLO.

Alla ben nota azione auxinica dell'acido indol-3-acetico vanno ricollegate le vaste ricerche eseguite per la preparazione di composti di sostituzione dell'acido acetico con nuclei aromatici o eterociclici. Numerosi prodotti di questo tipo sono riportati nella rassegna sulle sostanze ad azione auxinica fatta da Gandini (1); in essa infatti sono compresi acidi acetici portanti il nucleo del benzene, della naftalina, dell'antracene, dell'indene, del fluorene, dell'acenaftene, del benzofurano, del benzotiofene, i quali risultano tutti dotati di attività auxinica.

Nella stessa nota vengono messe in evidenza alcune caratteristiche strutturali che debbono considerarsi come fondamento per la comparsa della attività auxinica.

Sempre in relazione allo studio di tale attività, Gilman e Avakian (2) hanno sintetizzato alcuni acidi acetici aventi il nucleo del dibenzofurano, del dibenzotiofene, del carbazolo.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) A. GANDINI, « Il Farmaco », 1, 426 (1946).

(2) H. GILMAN e S. AVAKIAN, « J. Am. Chem. Soc. », 68, 2104 (1946).

Con medesimi intendimenti Borghero e Finsterle<sup>(3)</sup> hanno recentemente eseguito la sintesi di due acidi benzoindol-3-acetici e di un acido naftoindol-3-acetico<sup>(4)</sup>.

Acidi fenantren-acetici sono stati preparati da Price e Halpern<sup>(5)</sup> e presentati come attivatori della crescita delle piante anche se in grado inferiore nei confronti dell'acido indol-3-acetico.

Risulta da quanto precede che i nuclei più disparati sono stati oggetto di studio come sostituti del nucleo indolico presente nella classica eteroauxina. Nessuna notizia invece si trova in letteratura sull'acido benzimidazol-N-acetico, eppure il nucleo del benzimidazolo è quello che per motivi di iso-

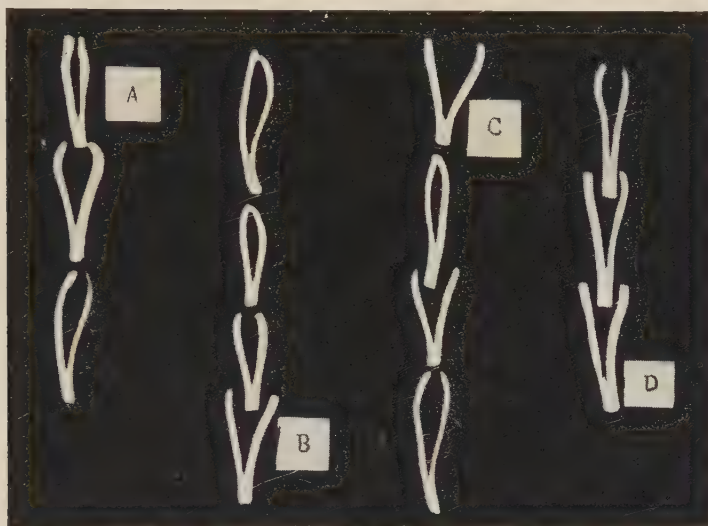


Fig. 1.

- A = acido indol-3-acetico sol. 0,0002 M.  
 B = acido benzimidazol-N-acetico sol. 0,0002 M.  
 C = estere etilico di B sol. 0,0002 M.  
 D = ammidi di B sol. 0,0002 M.

steria deve essere considerato il più affine a quello dell'indolo. Sulla base di questa considerazione abbiamo effettuato la preparazione dell'acido benzimidazol-N-acetico e di parecchi derivati, di cui viene riferito nella parte sperimentale.

Per la verifica dell'attività auxinica abbiamo eseguito il saggio di Went su germogli di pisello, di cui viene trattato da Gandini nella nota citata. Per il momento il saggio è stato applicato solamente a soluzioni contenenti l'acido benzimidazol-N-acetico, il suo estere etilico e la sua ammidi, riservandoci di proseguire in queste indagini con gli altri composti già preparati e descritti in questa nota e con altri ancora che hanno sostituenti nel nucleo.

(3) S. BORGHERO e O. FINSTERLE, « Gazz. », 85, 651 (1955).

(4) O. FINSTERLE, « Il Farmaco », Ed. Sc., 10, 432 (1955).

(5) C. C. PRICE e B. D. HALPERN, « J. Am. Chem. Soc. », 73, 818 (1951).



Le tre sostanze sopra indicate si sono dimostrate fornite di attività auxinica in grado diverso con un massimo per l'acido, come risulta dalla tabella fotografica qui annessa, in cui figurano anche le concentrazioni adoperate.

#### PARTE SPERIMENTALE.

##### *Estere etilico dell'acido benzimidazol-N-acetico.*

5 g di benzimidazolo ben secco vengono aggiunti ad una soluzione di 1 g di sodio in 100 cc di alcool etilico anidro. A questo miscuglio si aggiungono g 5,8 di cloroacetato di etile e il tutto si fa bollire a ricadere per 24 ore. Dopo raffreddamento si filtra il cloruro di sodio che si è separato e la soluzione alcoolica viene privata dell'alcool per distillazione. Rimane un residuo sciropposo che viene disciolto in acqua bollente; la soluzione, purificata con carbone animale, lascia separare per lento raffreddamento cristalli aghiformi in quantità di g 3,5. Ricristallizzato da acqua il prodotto fonde a 62-63°. Il prodotto grezzo sciropposo si può purificare rapidamente per distillazione nel vuoto; a 0,6 mm passa alla temperatura di 190°.

Analisi:

per $C_{11}H_{12}O_2N_2$	trov. %	C 64,95	H 5,95	N 13,52
	calc.	64,69	H 5,92	13,72.

##### *Acido benzimidazol-N-acetico.*

Si ottiene per saponificazione dell'estere precedente con 10 volte il peso di acido cloridrico 2 N facendo bollire per 6 ore. La soluzione cloridrica viene evaporata a secchezza su bagno maria ed il residuo viene cristallizzato da alcool etilico. Si ottiene così il cloridrato dell'acido sotto forma microcristallina con p. f. 202°.

Analisi:

per $C_9H_8O_2N_2 \cdot HCl$	trov. %	C 50,70	H 4,55	N 13,53	Cl 16,53
	calc.	50,84	H 4,26	13,17	16,67.

##### *Ammide dell'acido benzimidazol-N-acetico.*

Si riscaldano a 125° per 12 ore in tubo chiuso g 4 di estere con 20 cc di ammoniacca alcoolica al 4%. Si evapora completamente la soluzione ed il residuo si cristallizza da benzolo. Si ottiene così una polvere cristallina con p. f. 190°.

Analisi:

per $C_9H_9ON_3$	trov. %	N 23,84
	calc.	23,99.

*Metil-ammide dell'acido benzimidazol-N-acetico.*

Nelle condizioni del caso precedente si fanno reagire g 2 di estere con 6 cc di soluzione alcoolica al 33 % di metilammina. Dopo evaporazione della soluzione il residuo viene cristallizzato da una miscela di cloroformio ed etere di petrolio. Il composto si presenta sotto forma di cristalli a p. f. 165–166°.

Analisi:

per $C_{10}H_{11}ON_3$	trov. %	N 21,91
	calc.	22,21.

*Etil-ammide dell'acido benzimidazol-N-acetico.*

Nelle condizioni già indicate si fanno reagire g 5 di estere con 7 cc di soluzione alcoolica di etilammina al 25 %. Si distilla ed il residuo si cristallizza da acqua; la sostanza cristallina fonde a 169°.

Analisi:

per $C_{11}H_{13}ON_3$	trov. %	N 20,69
	calc.	20,68

*Benzil-ammide dell'acido benzimidazol-N-acetico.*

Si ottiene in condizioni analoghe a quelle per le altre ammidi sostituite. Cristallizzata da acqua fonde a 170–171°.

Analisi:

per $C_{16}H_{15}ON_3$	trov. %	N. 16,17
	calc.	15,84

*Etanol-ammide dell'acido benzimidazol-N-acetico.*

Dalla soluzione alcoolica proveniente dalla reazione condotta analogamente alle precedenti, la sostanza precipita per aggiunta di etere e viene cristallizzata da alcool etilico assoluto; p. f. 205–206°.

Analisi:

per $C_{11}H_{13}O_2N_3$	trov. %	N. 19,42
	calc.	19,15.

**Chimica delle fermentazioni.** — *Riduzione «in vitro» della colesterina ad opera di «Escherichia coli»*<sup>(\*)</sup>. Nota di ROSA GHIRINGHELLI e SANDRA CARINI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio L. CAMBI.

A fianco delle ricerche intorno al metabolismo ossidativo degli steroidi ad opera di microrganismi, che da tempo sono condotte in questo Centro<sup>(1) (2)</sup>, abbiamo avviato indagini volte a valutare eventuali processi microbici riduttivi sovra la colesterina. Autori diversi<sup>(3-9)</sup> hanno da tempo avanzato l'ipotesi che il coprosterolo presente nelle feci dei mammiferi si formi dalla colesterina per azione di microrganismi intestinali, senza tuttavia darne una dimostrazione sperimentale diretta, dimostrazione che può basarsi soltanto su determinazione *in vitro* della riduzione mediante microbi provenienti dall'intestino degli animali considerati.

Ultimamente da altri Autori<sup>(10)</sup> è stata ottenuta *in vitro* la produzione di steroli saturi da sospensioni di cervello, ricche di colesterina, e seminate con feci o con schizomiceti anaerobi isolati dalle feci. Per controllare questi risultati e per isolare eventuali microrganismi capaci di operare la trasformazione della colesterina pura *in vitro*, si cercarono le condizioni che facilitano la riduzione stessa *in vivo* e si dimostrò che una dieta esclusivamente proteica favorisce la riduzione a coprosterolo della colesterina somministrata giornalmente ad un cane<sup>(11)</sup>. Inoltre, come è già stato riferito al IX Congresso di Microbiologia di Palermo (aprile 1956)<sup>(12)</sup>, mediante colture di arricchimento, allestite con terreno minerale e colesterina, seminate con feci fresche di cane ad alimentazione proteica, si era potuto ottenere *in vitro* la riduzione della colesterina.

(\*) Lavoro eseguito nella Sezione Microbiologica del Centro di Studio per la Chimica e la Microbiologia delle Fermentazioni, Consiglio Nazionale delle Ricerche, (Direttore: Prof. C. Arnaudi).

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) C. ARNAUDI, «Applied Microbiology», 2, n. 5 (1954).

(2) C. COLLA, «Annali di Microbiologia», 5, III-VI (1953).

(3) S. BONDZYNSKI, V. HUMNUCKI, «Z. physiol. Chem.», 22, p. 396 (1896).

(4) R. SCHOENHEIMER e Coll., «Z. physiol. Chem.», 192, 73 (1930).

(5) H. DAM, «Biochem. J.», 28, 821 (1934).

(6) R. SCHOENHEIMER, W. M. SPERRY, «J. Biol. Chem.», 107, 1 (1934).

(7) M. ANCHEL, R. SCHOENHEIMER, «J. Biol. Chem.», 125, 25 (1938).

(8) R. S. ROSENFELD, D. K. FAKUSHIMA, L. HELLMANN, T. F. GALLAGHER, «J. Biol. Chem.», 211, 301 (1954).

(9) O. ROSENHEIM, T. A. WEBSTER, «Biochem. J.», 35, 8 (1941).

(10) A. SNOG-KJAER, I. FRANGE, H. DAM, «J. of Gen. Microbiology», 14, n. 2, 256 (1956).

(11) C. ARNAUDI, R. GHIRINGHELLI CANONICA, «Boll. Soc. Ital. Biol. Sper.», vol. XXXI, fasc. 9-10 (1955).

(12) R. GHIRINGHELLI, S. CARINI, «Atti Congresso Naz. Microbiologia», Palermo (1956).

Da successive subcolture di tali arricchimenti si è potuto isolare un batterio Gram-negativo, capace di metabolizzare la colesterina in condizioni di anaerobiosi.

Il microrganismo isolato presenta i seguenti caratteri generali: aerobio facoltativo, con odore fecale, produce su agar brodo di carne colonie bianco-giallastre, lisce, lucide, con bordi regolari lisci, intorbida uniformemente il brodo, non liquefa la gelatina, acidifica il latte tornasolato con produzione di un coagulo spugnoso, produce indolo, dà reazione positiva in terreno al rosso di metile, non utilizza l'acido citrico come fonte di C, dà negativa la reazione di Voges Poskauer, produce  $H_2S$ . Esso è pertanto identificabile con la specie *Escherichia coli*.

La metabolizzazione anaerobica della colesterina prodotta da tale batterio portava alla formazione di un prodotto che, cromatografato su carta, dà un  $R_f$  diverso ed inferiore a quello della colesterina e del coprosterolo.

Non fu possibile identificare subito tale prodotto per gli esigui quantitativi che se ne formarono e per la impossibilità di separarlo dalla colesterina mediante cromatografia su colonna di  $Al_2O_3$ .

A seguito di tali risultati, le ricerche furono indirizzate all'isolamento ed alla caratterizzazione di tale composto. Prove preliminari dimostrarono che con il metodo di Schoenheimer era possibile separare i due steroli in miscela, ma le quantità ottenute furono così esigue da non consentire una cristallizzazione ed un p. f.

Si allestirono allora colture di 10 litri ognuna con un terreno minerale + 0,1 ‰ di colesterina, + 10 ‰ di lattosio, + 2,5 ‰ di  $CaCO_3$ , + 1 ‰ di cisteina, in bottiglioni chiusi con valvole all'acido solforico ed ove le condizioni iniziali di anaerobiosi furono create per passaggio di una corrente di  $N$  puro; successivamente era la  $CO_2$  stessa del  $CaCO_3$  che andava a neutralizzare l'acido formatosi, a mantenere le condizioni anaerobiche. Dopo incubazione a 37° C si analizzarono gli estratti eterei di 50 litri di coltura che, saponificati, bromurati (secondo Schoenheimer), precipitati come digitonidi, cromatografati su colonna di allumina neutra, cristallizzati da alcool, portavano alla separazione di mg. 120 di una sostanza steroidica bianca, cristallina, che alla cromatografia su carta (solv. metanolo, carta impregnata con Quilon, svil. ac. silicotungstico) presenta un  $R_f$  uguale a quello della diidrocolesterina di sintesi, con p. f. 140-141° C., immutato anche in miscela col prodotto di sintesi.

È da tener presente che le 5 colture da 10 litri furono mantenute in incubazione per tempi diversi, e precisamente la prima e la seconda 9, la terza e la quarta 16, la quinta 22 giorni, e che si separarono quantità di steroli saturi scalarmente decrescenti (mg. 260 dalle prime due colture, mg. 150 dalla terza e quarta ed infine solo 5 mg. dalla quinta).

Le nostre esperienze dimostrarono la possibilità della riduzione *in vitro* a diidrocolesterina direttamente dalla colesterina ad opera di un microrganismo abitualmente presente nell'intestino dei mammiferi.



**Enzimologia.** — *L'anello tiazolico della cocarbossilasi identificato quale gruppo attivo cocarboligasico*<sup>(\*)</sup>. Nota di C. ANTONIANI e G. A. LANZANI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio F. GIORDANI.

La condensazione acetoinica è da tempo considerata da uno di noi<sup>(1)</sup> come un equilibrio ossidoriduttivo correlato all'aggruppamento tiazolico del tiaminpirofosfato. Nella molecola della cocarbossilasi si avrebbero cioè due gruppi, coenzimaticamente attivi, ben distinti: il gruppo  $-\text{NH}_2$  dell'anello pirimidinico attivante la decarbossilazione dell' $\alpha$ -chetoacido (Langenbeck) ed il gruppo tiazolico attivante il processo di condensazione acetoinica (Antoniani).

Riportiamo qui alcuni dati sperimentali che riteniamo definitivi per la conoscenza del problema.

#### METODI.

*Preparazione del derivato tiolico dell'aneurinpirofosfato.* — Abbiamo sostanzialmente usato il metodo di O. Zima e R. R. Williams<sup>(2)</sup>, leggermente modificato: 0,250 g di HCl-cocarbossilasi vennero addizionati di 25 ml di etilato sodico al 5 % in alcool assoluto. Entro pallone di vetro ermeticamente chiuso (Temp.  $-5^\circ\text{C}$ ) la sospensione venne mantenuta in agitazione mediante agitatore a valvola di mercurio e gradualmente addizionata di  $\text{H}_2\text{O}$  sino al totale viraggio da bianco a giallo del colore della sospensione (2,0 ml di  $\text{H}_2\text{O}$ ). Dopo ulteriore agitazione per 10' il derivato tiolico passa per la maggior parte in soluzione. Esso venne decantato, trasferito in beuta e poi gradualmente addizionato di etere etilico sino a completa flocculazione. Il flocculato venne sottoposto a centrifugazione; il sedimento venne risospeso in alcol etilico, addizionato ancora di etere etilico sino a completa flocculazione e nuovamente centrifugato. L'operazione di purificazione venne ripetuta due volte. Lavaggio finale con etere etilico. Essiccamento su  $\text{CaCl}_2$  sotto vuoto a temperatura ambiente. Il derivato tiolico così ottenuto si mantiene attivo per circa tre giorni.

*Preparazione del derivato tiolico idratato.* — Si operò come sopra, addizionando però 7,0 ml di  $\text{H}_2\text{O}$ , cioè oltrepassando di parecchio il punto-limite di idrolisi dell'anello tiazolico. Della sospensione in alcol etilico, dopo centrifugazione, venne utilizzata la sola parte disciolta, della quale si procedette alla purificazione come già detto per il derivato tiolico.

*Preparazione del disolfuro.* — Abbiamo seguito il metodo di P. Karrer e M. Viscontini<sup>(3)</sup> 0,100 g di derivato tiolico vennero sciolti nella minor quantità possibile di  $\text{H}_2\text{O}$ . Gradualmente, e agitando, si aggiunse goccia goccia una soluzione alcolica N/100 di J sino a reazione positiva della carta amido-jodurata. Il precipitato ottenuto venne separato per centrifugazione, lavato due volte con alcol etilico, una volta con etere etilico, quindi essiccato sotto vuoto su  $\text{CaCl}_2$  a temperatura ambiente. Punto di decomposizione  $168^\circ\text{C}$ .

(\*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Chimica e Microbiologia delle Fermentazioni del C.N.R. - Sezione Chimica - Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) C. ANTONIANI, « Riv. Biol. », XXXVII, 122 (1944-45).

(2) O. ZIMA e R. R. WILLIAMS, « B. », 73, 941 (1940).

(3) P. KARRER e M. VISCONTINI, « Helv. Chim. Acta », 26, 1981 (1946).



dopo addizione di apocarbossilasi, abbiamo invece registrato una attività decarbossilante ben netta, se pur inferiore a quella della cocarbossilasi normale. *Esso non ha però dato luogo a condensazione acetoinica, ed è questa la constatazione di maggior rilievo.*

Tale comportamento conferma da un lato le vedute del Langenbeck, cioè che il processo di decarbossilazione è attivato dal gruppo  $-\text{NH}_2$ . D'altra parte esso dimostra come il passaggio dalla forma tiolica (A) al disolfuro (C) abbia come effetto la scomparsa di ogni attività carboligasica.

4. L'aggiunta di cisteina al disolfuro (C) aumenta l'attività decarbossilante di questo. Essa, inoltre, rende ancora manifesto, se pur in piccola misura, il processo di condensazione acetoinica.

5. L'aggiunta di leuco-bleu di metilene al derivato tiolico (A) lascia inalterata l'entità del processo di decarbossilazione. Essa però attenua l'entità del processo di condensazione acetoinica.

TABELLA DEI RISULTATI.

COENZIMA	CO <sub>2</sub> (1)	Attività carboligasica (2)		
		AMC	BG	AMC + BG
0. HC-Ic carbossilasi. . . . .	52,0	126	104	230
1. Cocarbossilasi tiolica (A) . . .	51,4	392	208	600
2. Cocarbossilasi tiolica idratata (B)	49,6	112	84	196
3. Disolfuro-cocarbossilasi (C) . .	31,2	tr.	tr.	tr.
4. (C) + cisteina . . . . .	42,1	69	33	102
5. (A) + leuco-metilenbleu . . .	48,0	113	50	163

Composizione della miscela reagente: 12,5 mg Na piruvato; 0,8 mg coenzima sciolti in 2 ml di sospensione di apoenzima; apoenzima, 100 mg, sospesi in 2 ml di tampone fosfatico 0,1 M (pH = 6,2). Volume totale 6 ml distribuito in parti uguali in due vaschette del Warburg. T 28° C.

Nella prova 4) furono aggiunti 0,6 ml di sol. di cisteina (1 mg per ml).

Nella prova 5) 0,1 ml di sol. di leucometilenbleu (1 mg per 10 ml).

(1)  $\mu\text{l}$  in 3 ml dopo 30'.

(2)  $\gamma$  in 3 ml dopo 60'.

## CONCLUSIONI.

Il fatto dell'esistenza nella molecola del tiaminpirofosfato di due ben distinti gruppi attivi, l'uno cocarbossilasico e l'altro cocarboligasico, trova conferma in questi fatti da noi sperimentalmente accertati. Il gruppo cocarbossilasico risiede nell'amino gruppo dell'anello pirimidinico. Il gruppo cocarboligasico appare invece costituito dalle due funzioni adiacenti  $-\text{CHO}$  e  $-\text{SH}$ , in equilibrio con l'anello tiazolico.

Queste due funzioni, oltre che contigue, sembrano interagenti con le loro orbite elettroniche. Di ciò parlano a favore:

1° Il fatto che con la *cocarbossilasi tiolica idratata* (caratterizzata da irrigidimento del gruppo  $-\text{CHO}$ ) risulta depressa l'attività cocarboligasica.

2° Secondo P. Nesbitt e P. Sykes <sup>(7)</sup> il gruppo  $-\text{SH}$ , per l'intervento di una ossidazione mono-elettronica, darebbe origine al radicale  $-\text{S}\cdot$ ; ed è logico ammettere che allo stesso radicale si giunga con l'ossidazione aerobica mono-elettronica attivata dal metilenbleu. Si fa di fatto che l'aggiunta di leucometilenbleu alla miscela reagente, ha per effetto un indebolimento dell'attività cocarboligasica.

3° Col derivato disolfurico, nel quale in conseguenza della ossidazione a due elettroni si ha il passaggio da  $-\text{SH}$  a  $-\text{S}-\text{S}-$ , l'attività cocarboligasica risulta praticamente eliminata per intero.

Ci troviamo, comunque, sicuramente di fronte ad un coenzima *bivalente*. Proponiamo che alla  $\alpha$ -cheto-cocarbossilasi venga attribuito il nome di  *$\alpha$ -cheto-cocarbossi-aldoligasi*.

**Mineralogia.** — *Un nuovo minerale fra i prodotti boriferi di Larderello* <sup>(\*)</sup>. Nota di CURZIO CIPRIANI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. CAROBBI.

La mineralogia dei prodotti delle esalazioni della zona borifera di Larderello ha sempre richiamato l'attenzione degli studiosi. In particolare dei borati si sono occupati il Mascagni, il Bechi, i D'Achiardi e lo Schaller [8] identificando due borati di ammonio, larderellite e ammonioborite, ed uno di calcio, ginorite.

Tuttavia nuove ricerche appaiono necessarie specialmente per la conoscenza mineralogica dei prodotti dei soffioni artificiali.

Fra i numerosi campioni prelevati in varie riprese a Larderello da incrostazioni formatesi nei tubi di imbrigliamento dei soffioni, i due campioni n. 9 e n. 10 si sono dimostrati molto interessanti per la loro composizione.

Essi sono costituiti da borati e solfati di sodio e gli spettrogrammi a raggi X hanno mostrato la presenza di thenardite, del borace, mai riscontrato con sicurezza come prodotto naturale in Italia, e del pentaborato sodico decaidrato, composto finora mai rinvenuto in natura.

Questo nuovo minerale è il componente principale del campione 10, mentre è presente in quantità subordinata nell'altro.

Entrambe le incrostazioni studiate sono state generate dal soffionissimo n. 1 di Larderello esploso nel marzo 1930 e esauritosi nel marzo 1931 dopo aver

(7) P. NESBITT e P. SYKES, « J. Chem. Soc. », 4585 (1954).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della Università di Firenze. Centro di studio per la Geochimica e la Mineralogia del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.



erogato nel periodo di massima attività 51.000 Kg/h di vapore ad una pressione di circa 5 atmosfere e ad una temperatura di 180°-200°.

Il campione n. 9 è parte dell'incrostazione rinvenuta nella sonda che si trovava ad una profondità di m. 256. L'aspetto è quello di una massa di forma irregolare, compatta, di colore bruno-violaceo ricoperta in superficie da efflorescenze bianche facilmente asportabili con uno spazzolino. Il campione n. 10 proviene dalle incrostazioni portate a giorno nel 1948 durante la ripulitura con trivella per il recupero della sonda da una profondità da m. 104 a m. 140. Si presenta come una massa bianca in superficie con delle efflorescenze e leggermente colorata in giallo internamente; in parte porosa, in parte liscia, ma sempre fragile.

Per l'analisi chimica, dopo fusione con carbonato sodico, si è filtrata la soluzione acquosa e sul residuo si sono determinati i cationi, alcali esclusi, nel modo consueto, dopo aver eliminato il boro presente con ripetuti trattamenti con alcool metilico ed acido cloridrico.

La soluzione acquosa, previo trattamento con carbonato ammonico per eliminare la silice solubile, è servita per la determinazione dello ione solforico.

Il dosaggio della silice è stato effettuato col normale trattamento acido dopo fusione alcalina, mentre la determinazione dei solfati è stata controllata anche su una porzione separata in soluzione cloridrica per precipitazione con cloruro di bario.

Gli alcali sono stati determinati allo spettrofotometro di fiamma [3], mentre l'acqua a 110° è stata determinata per perdita di peso in stufa e quella totale per titolazione secondo Karl Fischer dopo riscaldamento in forno a 400° [1].

Poiché tutto il boro presente è sotto forma di borati alcalini solubili in acqua (il residuo insolubile non contiene boro), il dosaggio di questo è stato effettuato con il metodo proposto dal Thomson [17]. Secondo tale metodo, collaudato da numerosi autori, si titola la soluzione acquosa del borato con HCl N/10 in presenza di metilarancio determinando così la base presente (nel nostro caso  $\text{Na}_2\text{O}$ ) e quindi, dopo aver eliminato l'eventuale anidride carbonica per ebollizione sotto refrigerante a ricadere per un minuto, si dosa l'acido borico spostato dal borato per titolazione con NaOH N/10 in presenza di mannite con fenolftaleina come indicatore.

Le piccole quantità di cloro presenti sono state dosate in porzione separata per titolazione della soluzione nitrica secondo Volhard.

I risultati ottenuti sono i seguenti:

	n. 9	n. 10
$\text{SiO}_2$ . . . . .	7,03 %	2,88 %
$\text{Al}_2\text{O}_3$ . . . . .	0,62	} 0,51
$\text{Fe}_2\text{O}_3$ . . . . .	2,82	
$\text{CaO}$ . . . . .	5,21	1,97
$\text{MgO}$ . . . . .	0,16	tr
$\text{Na}_2\text{O}$ . . . . .	17,55	16,30
$\text{K}_2\text{O}$ . . . . .	0,83	0,46
$\text{SO}_3$ . . . . .	17,64	10,61
$\text{B}_2\text{O}_3$ . . . . .	25,15	38,83
$\text{Cl}$ . . . . .	0,94	1,60
$\text{H}_2\text{O}$ — . . . .	18,03	21,87
$\text{H}_2\text{O} +$ . . . .	5,05	5,08
	<hr/>	<hr/>
	101,03	100,11
O per $\text{Cl}_2$ . . .	0,21	0,36
	<hr/>	<hr/>
	100,82	99,75

La media di tre determinazioni ha dato per i borati di sodio presenti nei miscugli analizzati i seguenti valori (assegnando ai borati tutta l'acqua dosata):

Campione n. 9			
	%	R.M.	
Na <sub>2</sub> O . . . .	7,05	0,1137	1,00
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . .	25,15	0,3611	3,17
H <sub>2</sub> O . . . .	23,08	1,2777	11,20

Campione n. 10			
Na <sub>2</sub> O . . . .	9,07	0,1463	1,00
B <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . .	38,83	0,5576	3,81
H <sub>2</sub> O . . . .	26,95	1,4944	10,21

Un valore così alto per il contenuto in boro ha fatto subito sospettare la presenza di un sale con più boro del borace. A parte ipotetici triborati e tetraborati idrati riportati nella vecchia letteratura [2, 15], si conosce fra i sali a forte contenuto in boro, attraverso lo studio del sistema ternario Na<sub>2</sub>O — B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> — H<sub>2</sub>O dello Sborgi e collaboratori [5, 9, 10, 11, 12, 13, 14], solo il pentaborato decaidrato Na<sub>2</sub>O · 5 B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> · 10 H<sub>2</sub>O, stabile fra, circa, 20° e 100°. Di questo pentaborato preparato artificialmente sono state determinate le proprietà fisiche dato che il minerale non era isolabile allo stato puro a causa anche della estrema piccolezza dei granuli nei miscugli naturali.

Si sono effettuate numerose preparazioni del pentaborato per cristallizzazione in termostato a 50° da soluzioni contenenti varie proporzioni di borace ed acido borico purissimi. Si è ottenuto pentaborato da soluzioni nelle quali il rapporto molare Na<sub>2</sub>O/B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> era compreso fra 1/3,78 e 1/6,67. I cristalli ottenuti da soluzione a più basso tenore in boro erano impuri per borace, mentre dalle soluzioni con più alta percentuale di boro si avevano prodotti contenenti anche acido borico.

I cristalli di pentaborato scelti per le varie determinazioni furono ottenuti da una soluzione ricavata sciogliendo in 100 cc d'acqua g 21,3 di borace e g 24,4 di acido borico, con un rapporto molare Na<sub>2</sub>O/B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> di 1/5,56. Si ottennero cristalli con dimensioni di anche 1 cm. nella direzione di allungamento e di 0,4 cm normalmente ad essa.

Tali cristalli non sono misurabili al goniometro in quanto le facce sono malformate e spesso assolutamente non riflettenti. Alcune misure orientative porterebbero a concludere che il pentaborato è triclino.

Se sarà possibile ottenere cristalli migliori saranno eseguite ricerche cristallografiche e strutturalistiche. Esse formeranno oggetto di una eventuale nota successiva tanto più che i dati goniometrici non possono servire alla identificazione del nuovo minerale che si presenta in cristallini estremamente piccoli.

Il peso specifico del pentaborato artificiale, determinato col metodo della bilancia idrostatica, usando come liquido il benzolo, è risultato uguale a 1,713.

Dal punto di vista ottico i cristallini artificiali, incolori, sono birifrangenti biassici, otticamente positivi.

Su una laminetta cristallina, dalla quale emerge normalmente la bisettrice acuta, si sono potuti misurare, per la luce gialla (filtro Lifa n. 395) col metodo dell'immersione, usando miscele di acetato di isoamile ed anetolo, gli indici:

$$\alpha = 1,431 \quad \beta = 1,438$$

e, secondo il metodo di Mallard con un oculare micrometrico a filo mobile, l'angolo degli assi ottici  $2V\gamma = 35^\circ$ .

Non avendo sezioni adatte, la determinazione di  $\gamma$  non si è potuta effettuare. Nella misura degli indici di numerosi frammenti di cristalli il più alto valore riscontrato è stato 1,509, in buon accordo col valore calcolato dalla birifrangenza e dall'angolo degli assi ottici  $\gamma = 1,507$ .

L'analisi microscopica dei prodotti naturali ha mostrato che nei miscugli, oltre al borace ed alla thenardite, sono presenti granuli di un composto con  $\alpha' = 1,435$  ed un  $\gamma'$  variabile fra 1,450 e 1,460.

Tali granuli sono da riferire al pentaborato, ma la precisa identificazione di questo composto nei miscugli naturali è meglio dimostrata dai diagrammi del diffrattometro.

Su cristalli del composto artificiale scelti al microscopio è stata eseguita l'analisi chimica, secondo il metodo già descritto, per doppia titolazione con HCl ed NaOH calcolando l'acqua per differenza.

Nella seguente tabella sono confrontati i valori calcolati dalla formula  $\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$  con i dati ottenuti dai cristalli artificiali:

	I	II	media	calcolato
	%	%	%	R.M. %
$\text{Na}_2\text{O}$ . . . . .	10,61	10,54	10,57	1,00 10,50
$\text{B}_2\text{O}_3$ . . . . .	58,84	59,01	58,93	4,96 58,98
$\text{H}_2\text{O}$ . . . . .	30,55	30,45	30,50	9,93 30,52

Questi valori mostrano che i cristalli artificiali sono veramente di pentaborato decaidrato.

La prova della identità di questi cristalli con quelli ritrovati nei miscugli naturali è stata fornita dagli spettrogrammi ottenuti al diffrattometro General Electric XRD-5.

Le condizioni di ripresa erano le seguenti:

Radiazione      Cu/Ni       $\lambda = 1,5405 \text{ \AA}$       38 kV 19 mA

Goniometro      velocità  $2^\circ$  al minuto

Potenziometro      costante di tempo  $3''$

sensibilità 500 c.p.s. (prodotti naturali)

1000 c.p.s. (prodotti artificiali).

Nella tabella I sono riportate, limitatamente all'intervallo da  $8^\circ$  a  $50^\circ$ , le distanze reticolari con le relative intensità per i prodotti naturali e per i tre componenti principali di essi: pentaborato, borace e thenardite.

TABELLA I.

Campione 9		Campione 10		Pentaborato		Borace		Thenardite	
d	i	d	i	d	i	d	i	d	i
9,18	14								
8,54	12	8,58	23	8,62	18				
8,13	29	8,21	22	8,22	24				
7,79	11	7,79	11			7,71	22		
7,63	9								
7,15	15	7,14	16			7,11	22		
6,89	14	6,84	19	6,88	36				
						6,27	6		
6,21	15	6,23	19	6,24	13				
				6,12	9				
5,99	16	5,97	11			5,92	22		
5,65	26	5,69	29			5,68	92		
		5,37	9						
5,31	13					5,29	19		
5,14	11	5,15	8			5,16	16		
		5,11	10	5,10	12				
4,83	38	4,84	52	4,81	8	4,82	10		
4,66	20	4,59	98	4,60	100			4,66	73
		4,34	18	4,35	17				
4,28	18	4,28	31	4,29	30				
4,10	7	4,09	10	4,11	13				
4,03	7								
3,90	54	3,93	24	3,90	4	3,92	36		
3,84	10	3,83	17					3,84	18
3,73	21	3,73	37	3,74	22				
3,62	12								
3,55	19	3,55	28	3,56	38	3,57	13		
3,51	21	3,52	35	3,54	36				
						3,48	7		
3,45	33	3,44	14						
3,34	19	3,34	14	3,35	15				
						3,32	12		
3,29	36	3,29	77	3,30	77				
3,18	58	3,18	73	3,20	76	3,18	10	3,18	51
		3,13	18	3,13	9				
3,08	31	3,07	45			3,08	5	3,07	47
3,03	33	3,04	28	3,04	17				
2,97	27					2,97	38		
		2,94	22	2,95	14				
2,93	24	2,92	30	2,93	16	2,92	8		
				2,865	17				
2,822	98	2,827	43			2,823	45		
2,787	66	2,784	50					2,783	100
						2,734	4		
2,725	55								
		2,669	14	2,676	16				
						2,659	9		
2,638	44	2,646	31					2,646	48
						2,629	6		
2,560	64	2,564	50	2,572	39	2,560	63		
				2,512	3	2,513	15		
2,455	13					2,452	45		
		2,406	10	2,409	8				
				2,367	5	2,380	7		
				2,350	10				
2,338	19	2,329	22			2,336	17	2,329	21
				2,274	6				



Segue: TABELLA I.

Campione 9		Campione 10		Pentaborato		Borace		Thenardite	
d	i	d	i	d	i	d	i	d	i
2,263	19								
2,213	14	2,253	14	2,253	9				
		2,210	16	2,215	15	2,211	10	2,211	5
						2,195	8		
		2,173	12	2,177	8				
				2,169	8	2,169	8	2,169	7
2,150	39					2,153	8		
		2,140	16	2,139	14	2,135	8		
		2,085	7	2,090	7	2,082	12		
2,070	8	2,073	9						
		2,064	8						
		2,037	10	2,038	5				
2,032	13			2,025	18	2,029	13		
2,003	12					2,010	7		
		1,989	10	1,990	3	1,982	6		
1,943	25	1,943	12	1,939	10	1,946	10		
1,919	7	1,919	13	1,924	9				
						1,910	6		
1,892	15	1,890	10			1,897	16		
1,863	16	1,865	18			1,856	10	1,864	31
1,846	27			1,846	9	1,850	10	1,841	6
		1,832	18	1,834	10				

Le intensità per i prodotti naturali sono su scala arbitraria, essendo misurate in mm sul diagramma, mentre per i prodotti artificiali, come di consueto, le intensità sono relative, posta uguale a 100 l'intensità della riga più forte.

I valori per la thenardite sono stati desunti da Swanson e Fuyat [16].

Dalla tabella si può osservare come la grande maggioranza delle righe relative ai miscugli naturali può essere attribuita al borace o alla thenardite o al pentaborato.

La riga  $d = 2,822$  nel campione 9 ( $2,827$  nel campione 10), piuttosto forte, si può eventualmente spiegare come data dalla sovrapposizione della riga analoga del borace e della riga più intensa del cloruro di sodio ( $2,821$ ), identificato al microscopio sotto forma di rarissimi granuli monorifrangenti con  $n = 1,540$ .

Occorre qui avvertire che borace e pentaborato, probabilmente a causa della presenza di piani di sfaldature, producono al diffrattometro spettrogrammi spesso con valori di intensità notevolmente diversi da spettro a spettro.

Per ovviare l'inconveniente dell'orientazione preferita è stata proposta da Mc Creery [7] l'adozione di lastrine « forate ». Effettivamente con tale sistema le variazioni di intensità da spettro a spettro sono ridotte anche se non scompaiono completamente.

I dati riportati nella tabella sono appunto stati desunti da spettrogrammi ripresi con lastrine forate.

Sulla base dei risultati sopra esposti si può pertanto considerare dimostrata la presenza nei miscugli studiati del pentaborato sodico decaidrato  $\text{Na}_2\text{O} \cdot 5\text{B}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ , nuovo minerale per il quale si propone il nome di *sbor-gite* per onorare la memoria del chimico prof. Umberto Sborgi (1883-1955).

che si occupò attivamente di ricerche sui gas dei soffioni e che, attraverso lo studio di numerosi sistemi, ha portato un importante contributo alla conoscenza dei borati alcalini.

Dai sistemi  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$  dello Sborgi e collaboratori risulta che il pentaborato si forma al di sopra di  $20^\circ$  ed il borace al di sotto di  $60^\circ$ , mentre nel sistema  $\text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{CaSO}_4 - \text{H}_2\text{O}$  di Hill e Wills (6) la thenardite è presente come fase stabile sopra  $32^\circ$ .

La coesistenza dei tre minerali negli stessi campioni indicherebbe pertanto una temperatura di formazione compresa fra  $32^\circ$  e  $60^\circ$ , se fosse dimostrabile la contemporaneità della loro genesi.

Naturalmente questi limiti varrebbero per cristallizzazione da soluzioni acquose pure a pressione ordinaria, mentre non è nota l'influenza che su tali valori di temperatura ha la pressione e la presenza di altre sostanze.

Forse è lecito supporre che le incrostazioni delle quali fanno parte i campioni studiati si siano formate in un periodo successivo all'emissione violenta del vapore.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BERNARDINI G. e CIPRIANI C., *La determinazione dell'acqua per titolazione col reattivo di Karl Fischer* (in preparazione).
- [2] BOLLEY P., *Ueber eine neue Verbindung von Borsäure mit Natron und die wahrscheinliche Bildungsweise der natürlichen Borsäure*, « Ann. Chem. u. Pharm. », 68, 122 (1848).
- [3] COCCO G., CORADOSSI N. e TONANI F., *La determinazione degli alcali col fotometro di fiamma* (in corso di pubblicazione).
- [4] D'ACHIARDI G., *Acido borico e borati dei soffioni e lagoni boriferi della Toscana*, Pisa 1900.
- [5] DUKELSKY M., *Ueber Borate*, « Zeit. anorg. Chem. », 50, 38 (1906).
- [6] HILL R. e WILLS S., *Ternary system  $\text{Na}_2\text{SO}_4 - \text{CaSO}_4 - \text{H}_2\text{O}$* , « J. Amer. Chem. Soc. », 60, 1647 (1938).
- [7] MCCREERY in KLUG H. e ALEXANDER L., *X-Ray diffraction procedures*, New York 1954.
- [8] PALACHE C., BERMAN H. e FRONDEL C., *Dana's system of mineralogy*, vol. II, New York 1951.
- [9] SBORGI U., *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$ . Isoterme a  $35^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $0^\circ$  e diagramma politermico*, « Gazz. Chim. It. », 62, 3 (1932).
- [10] SBORGI U., *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$  a  $90^\circ$* , « Atti Soc. Tosc. Sci. Nat. », 35, 46 (1926).
- [11] SBORGI U. e AMELOTTI L., *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$  a  $45^\circ$* , « Gazz. Chim. It. », 60, 468 (1930).
- [12] SBORGI U. e MECACCI F., *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$  a  $60^\circ$  (nota I)*, « Atti R. Acc. Lincei » (V), 24 (I), 443 (1915).
- [13] SBORGI U. e MECACCI F., *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$  a  $60^\circ$  (nota II)*, « Atti R. Acc. Lincei » (V), 25 (I), 327 (1916).
- [14] SBORGI U. e MECACCI F., *Sui borati. Sistema  $\text{Na}_2\text{O} - \text{B}_2\text{O}_3 - \text{H}_2\text{O}$  a  $60^\circ$  (nota III)*, « Atti R. Acc. Lincei » (V), 25 (II), 445 (1916).
- [15] SPIEGEL L., *Ueber anormal zusammengesetzten Borax (Natriumtriborat)*, « Chemik. Zeit. », 28, 750 (1904).
- [16] SWANSON H. e FUYAT R., *Standard X-ray Diffraction Powder Patterns*, U. S. National Bureau Stand., circ. 439, vol. II.
- [17] THOMSON in SUTTON F., *A systematic Handbook of volumetric analysis*, p. 152, XIII ed., Londra 1955.

**Zoologia.** — *Angiostrongylus chabaudi* n. sp., *parassita del cuore e dei vasi polmonari del gatto selvatico* (*Felis silvestris*)<sup>(\*)</sup>. Nota di ETTORE BIOCCA, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio V. PUNTONI.

Durante gli scorsi anni abbiamo avuto occasione di esaminare 7 gatti selvatici (*Felis silvestris*), catturati nei boschi della provincia di Roma e di Grosseto.

In sei di questi animali abbiamo trovato nel cuore destro o nei polmoni (vasi polmonari) numerosi esemplari di un nematode appartenente al genere *Angiostrongylus*. (In 3 casi nel cuore destro e nei polmoni contemporaneamente, in 2 casi solo nei polmoni, in 1 caso solo nel cuore destro).

Nello stesso periodo abbiamo studiato oltre 200 gatti (*Felis domestica*) e alcune centinaia di cani, sacrificati nel Canile Comunale di Roma, che vivevano allo stato randagio nella zona di Roma, senza mai rinvenire tali nematodi nel cuore o nei polmoni.

Ugualmente negative per *Angiostrongylus* sono state le ricerche eseguite su alcune decine di volpi (*Vulpes vulpes*) e di tassi (*Meles meles*) catturati negli stessi boschi da cui provenivano i gatti selvatici (*Felis silvestris*).

Poiché non ci è stato possibile classificare il parassita in alcuna delle specie note nel genere *Angiostrongylus*, riteniamo che si tratti di una specie nuova, per la quale proponiamo il nome *Angiostrongylus chabaudi* n. sp., in onore del valoroso elmintologo e amico A. Chabaud dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Parigi.

*Angiostrongylus chabaudi* n. sp.

Ospite: *Felis silvestris*.

Localizzazione: cuore destro e polmoni (vasi polmonari).

Distribuzione geografica: Italia Centrale.

Esemplari tipo e cotipi depositati presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

MORFOLOGIA. Figg. 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Corpo cilindrico piuttosto sottile, leggermente attenuato nei due sessi all'estremità anteriore. L'estremità posteriore della femmina termina arrotondata e alquanto ricurva in avanti; l'estremità posteriore del maschio descrive un giro di spira e termina con una piccola borsa caudale rivolta in avanti. La cuticola possiede numerose striature longitudinali e in genere, soprattutto

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma. (Direttore: E. Biocca.

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

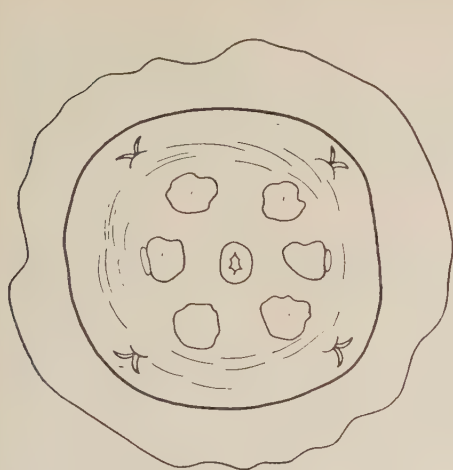


Fig. 1. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp.  
Estremità anteriore vista apicalmente.



Fig. 2. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp.  
Estremità anteriore vista subventralmente.

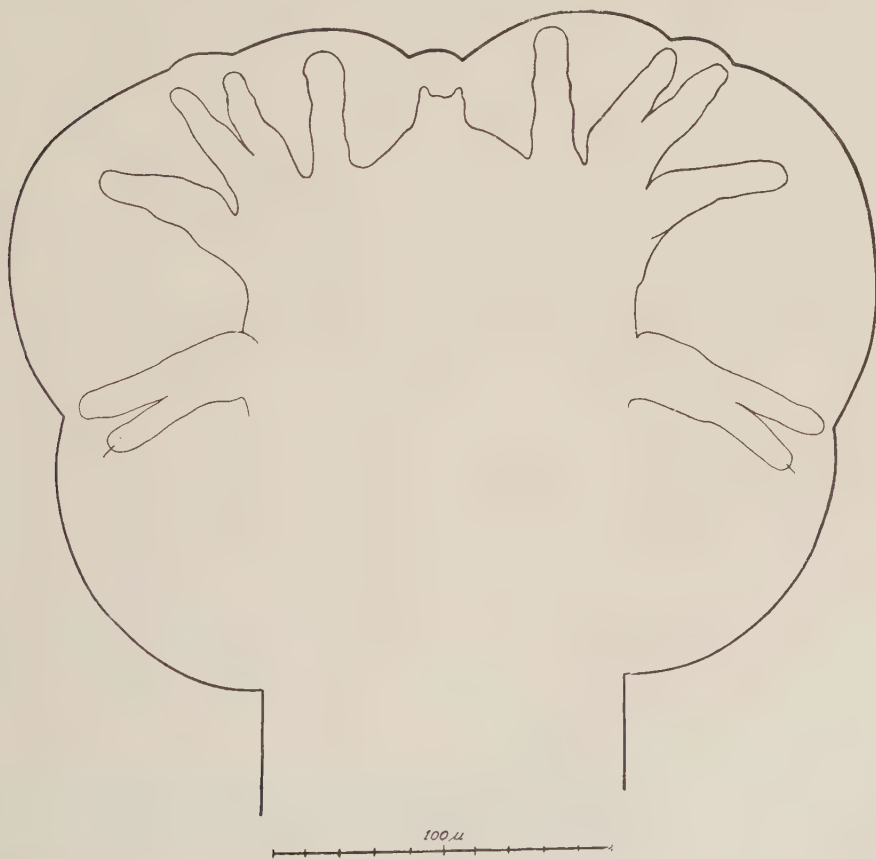


Fig. 3. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp. Borsa caudale del maschio vista ventralmente.



negli esemplari fissati, si allontana alquanto dal corpo in corrispondenza dell'estremità anteriore.

Apertura orale terminale, irregolarmente ovale, allungata nel senso anteroposteriore e circondata da sei espansioni simili a piccole labbra o « perityls », secondo il termine proposto da Gerichter (1949); in posizione late-

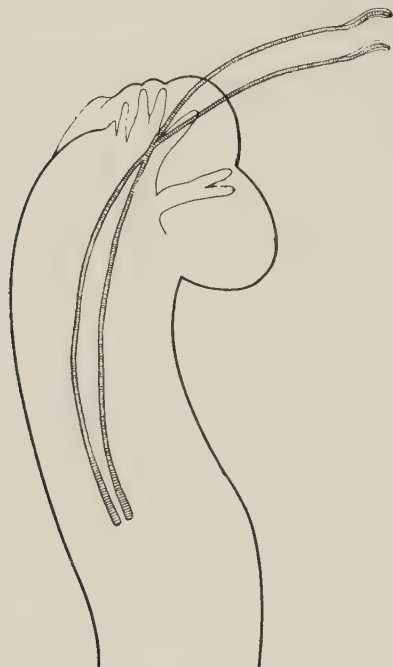


Fig. 4. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp. Borsa caudale del maschio vista lateralmente.

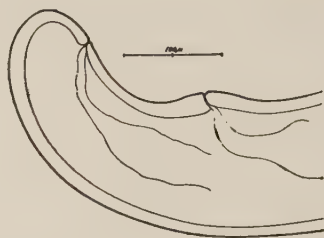


Fig. 5. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp. Estremità distale della femmina (ano e vulva).

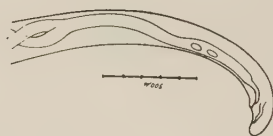


Fig. 6. - *Angiostrongylus chabaudi* n. sp. Estremità distale della femmina (ovieiettore).

rale e posteriormente alle espansioni, sono visibili gli anfi. Ancora più posteriormente e ai quattro angoli di un quadrato che idealmente includa l'estremità anteriore, si osservano quattro formazioni sensoriali simmetriche riunite in due ventrali e due dorsali. Queste formazioni sensoriali sono rappresentate ognuna da due protuberanze coniche, di cui l'una leggermente più grande dell'altra. Osservando il verme in posizione laterale queste formazioni sensoriali si vedono retrocesse di circa 20  $\mu$  dall'estremità anteriore del corpo e molto probabilmente corrispondono alle papille medio-mediane e latero-mediane del ciclo esterno.

Esofago relativamente corto; il primo quarto dell'esofago appare di forma quasi cilindrica e di diametro leggermente inferiore ai tre quarti posteriori che aumentano molto lievemente di diametro dall'avanti all'indietro, senza assumere una forma chiaramente clavata.

Anello nervoso in genere circonda l'esofago in posizione posteriore alla metà dell'esofago; dieridi non chiaramente apprezzabili; poro escretore situato in prossimità e quasi sempre posteriormente alla fine dell'esofago.

#### ESEMPLARE TIPO.

*Maschio.* – Lunghezza mm 14,9; larghezza massima mm 0,215. Esofago lungo mm 0,335; anello nervoso distante dall'estremità anteriore mm 0,205; poro escretore distante dall'estremità anteriore mm 0,365.

Spicoli lunghi mm 0,540, apparentemente uguali, ben chitinizzati e striati trasversalmente, di colorito bruno giallastro. La loro estremità prossimale è leggermente dilatata, mentre l'estremità distale è ondulata a forma di S e termina con una leggera espansione ialina non striata, che circonda una parte centrale bruno-giallastra striata trasversalmente. Gubernaculum assente.

Borsa caudale. – Lobo dorsale rudimentale; lobi laterali abbastanza ampi. Il margine della borsa descrive due lievi rientranze in corrispondenza delle costole postero e mediolaterale e una rientranza ben evidente in corrispondenza della costola ventro-laterale. La costola dorsale è corta e tozza e continua la linea dell'estremità posteriore del corpo; essa è abbastanza larga e corta e termina con due brevi digitazioni in corrispondenza dei suoi due margini laterali. La costola dorsale esterna prende origine lontano dalla costola dorsale, strettamente ravvicinata alle costole laterali; ha un decorso diritto in senso anteroposteriore ed è più lunga della costola dorsale. Le costole laterali hanno origine da un tronco comune cortissimo e ben largo. La costola laterale posteriore e laterale media divergono alquanto nella loro parte distale, terminando ambedue vicine al margine della borsa che, come abbiamo detto, rientra leggermente in direzione delle due costole. La costola laterale esterna è robusta più lunga e in genere più spessa delle altre due, dalle quali si allontana alquanto e termina a maggior distanza dal margine della borsa che non le altre due costole laterali. Le costole ventrali hanno un lungo tronco comune; la ventro-laterale continua la direzione del tronco comune e termina vicino al margine della borsa, che rientra chiaramente verso la costola ventrale stessa. La costola ventro-ventrale invece diverge ventralmente terminando a una certa distanza dal margine della borsa. Una lunga setola fuoriesce dall'estremità della costola ventroventrale e si dirige verso il margine della borsa; questa setola è ben visibile soprattutto negli esemplari freschi.

*Femmina.* – Lunghezza mm 23,1; larghezza mm 0,298; esofago lungo mm 0,380; anello nervoso distante dall'estremità anteriore mm 0,240; poro escretore distante dall'estremità anteriore mm 0,445.

Vulva situata vicino all'estremità posteriore, dista dall'estremità posteriore mm 0,190. Parte impari dell'ovietettore lunga mm 0,980, si biforca successivamente in due uteri diretti verso l'avanti. Il primo tratto, in prossimità della vulva, è muscolare e spesso. L'ano dista dall'estremità posteriore mm 0,070. L'estremità posteriore del corpo è arrotondata e ricurva alquanto in avanti.

Uova ellittiche, trasparenti, misurate nell'utero di mm 0,036-0,040 per 0,064-0,068.

Le misure prese su 10 maschi e 10 femmine, provenienti da 2 ospiti diversi hanno dato in millimetri le seguenti oscillazioni.

TABELLA.

	♂	♀
Lunghezza . . . . .	14,6 - 16,3	19,8 - 24,1
Larghezza . . . . .	0,185 - 0,225	0,245 - 0,298
Esofago . . . . .	0,300 - 0,345	0,345 - 0,380
Anello nervoso, estremità anteriore . .	0,185 - 0,230	0,210 - 0,240
Poro escretore, estremità anteriore . .	0,335 - 0,405	0,395 - 0,470
Spicoli . . . . .	0,510 - 0,555	
Vulva punta coda . . . . .		0,170 - 0,210
Ano punta coda . . . . .		0,162 - 0,175
Uova . . . . .	0,34 - 0,44 × 0,58 - 0,68	

## DIAGNOSI DIFFERENZIALE.

Nel 1866 Baillet (1866) descriveva col nome *Strongylus vasorum* un nuovo nematode rinvenuto nel cuore destro e nell'arteria polmonare di un cane morto nella scuola veterinaria di Tolosa. Lo stesso parassita fu rinvenuto successivamente in un altro cane proveniente dalla stessa zona, da Railliet e Cadiot (1892). La parassitosi, sebbene segnalata sporadicamente in varie parti di Europa, compresa l'Italia, in cui nel 1871 il Bossi (1871) descrisse una «cardite verminosa» del cane, riferibile quasi certamente allo stesso parassita, è senza dubbio da considerare malattia rara tra i cani. Non è stata finora mai osservata nel gatto o in altri felini.

Nel 1907 Railliet e Henry (1907) proponevano di chiamare *Haemostrongylus vasorum* lo *Strongylus vasorum* di Baillet, ma due anni prima Kamenisky (1905) aveva già indicato col nome *Angiostrongylus vasorum* il parassita del cuore e delle arterie polmonari del cane, per cui il nome dato dagli autori francesi è stato considerato sinonimo.

La specie da noi descritta appartiene senza dubbio alcuno al genere *Angiostrongylus*, sia che si voglia seguire lo schema di classificazione proposto da Daugherty (1946), sia quello seguito nell'*Opredelitel parasiticeskikh nematod* redatto da Skrjabin e coll. (1952). Non esiste possibilità di confusione tra la nostra specie e *Angiostrongylus tateronae*, *ten* e *soricis* (1953) né con le specie *A. cantonensis*, *ondatrae* e *gubernaculatus*, che il Daugherty include nel genere *Angiostrongylus*, mentre Skrjabin e coll. (1952) includono rispettivamente nei generi *Rattostrongylus*, *Rodentocaulus* e *Angiocaulus*, generi tutti appartenenti alla sottofamiglia *Angiostrongylinae*.

Le uniche specie con le quali esistono somiglianze morfologiche sono *A. vasorum*, parassita del cane e *A. raillieti* descritto da Travassos (1927)

in un canide americano *Dasicyon azarae*. Quest'ultima specie, secondo Daugherty, potrebbe essere identica ad *A. vasorum*.

La specie *Angiostrongylus chabaudi* si differenzia da *A. vasorum* per la lunghezza degli spicoli, che in *A. vasorum* sono di mm 0,360–0,400, mentre in *A. chabaudi* oscillano tra mm 0,510–0,555. La distribuzione delle costole nella borsa caudale dei due parassiti è notevolmente diversa. Secondo la descrizione originale del Baillet, i lobi laterali sono sostenuti in *A. vasorum* « par 4 côtes, la côte antérieure bifide, la seconde simple, la troisième bifide et la dernière courte et simple ». Evidentemente anche in base al disegno del Baillet, la costola anteriore bifida corrisponde alle costole ventrali che prendono origine da un tronco comune. La seconda semplice corrisponde alla laterale esterna, la terza bifida alle due laterali posteriore e media; l'ultima corta e semplice, alla dorsale esterna. Manca quindi la descrizione della costola dorsale. A differenza di *A. vasorum*, la costola laterale esterna in *A. chabaudi*, non è semplice ma prende origine da un tronco comune con le altre due laterali <sup>(1)</sup>. Inoltre la costola dorsale esterna, che il Baillet indica in *A. vasorum* come corta, è, nella nostra specie, particolarmente lunga. Così pure nella femmina la distanza dalla vulva alla punta della coda è maggiore in *A. vasorum* (mm 0,300–0,320) che in *A. chabaudi* (0,170–0,210) come sono chiaramente maggiori le dimensioni delle uova di *A. vasorum*.

*A. chabaudi* differisce da *A. raillieti* per avere l'esofago più grande e non claviforme, gli spicoli più lunghi e non saldati nella metà distale da una lamina di chitina striata trasversalmente. Nella borsa caudale le costole hanno una distribuzione alquanto diversa. Le costole ventrali hanno in *A. raillieti* un decorso quasi parallelo, mentre in *A. chabaudi* la ventroventrale termina con una setola e si allontana decisamente dalla ventro-laterale; la laterale esterna è, in *A. chabaudi* chiaramente più lunga e meno divergente che in *A. raillieti* dove la costola è chiaramente più corta della laterale media dalla quale si allontana descrivendo quasi un angolo retto; le dorsali esterne sono in *A. chabaudi* più allontanate dalla dorsale e più ravvicinate al gruppo delle laterali. Le uova di *A. chabaudi* sono più voluminose. Ci sembra infine opportuno insistere su alcuni particolari caratteri morfologici della nuova specie.

L'estremità anteriore di *A. chabaudi* possiede, come abbiamo ricordato, quattro coppie di papille setoliformi disposte simmetricamente, nella regione corrispondente all'inizio dell'esofago, il quale è chiaramente diviso in due parti, una anteriore di minor diametro e cilindrica e una posteriore più allargata; l'estremità posteriore del maschio descrive un giro di spira. Tutti questi caratteri, presenti in *A. chabaudi*, non sono stati descritti in *A. vasorum* e *A. raillieti*.

(1) A questo proposito riteniamo opportuno segnalare che nell'*Opredelitel parasiticeskikh nematod* (vol. 3, p. 728) si afferma che nel genere *Angiostrongylus* « la costola laterale esterna nasce lontana dalle altre due laterali », a differenza del genere *Rattostrongylus* in cui avrebbe una origine comune con le altre due. È nostra opinione che il carattere non possa essere preso in considerazione nella diagnosi differenziale dei generi.



Dal punto di vista biologico è utile ricordare che *A. vasorum* e *raillieti* sono parassiti di canidi, mentre *A. chabaudi* è parassita di un felino (*Felis silvestris*) e che le volpi e i cani randagi catturati nelle stesse zone o in vicinanza delle zone di cattura dei gatti selvatici, mai avevano infestazioni da angiostrongili, mentre i gatti selvatici erano quasi costantemente (sei volte su sette) parassitati dalla specie di *Angiostrongylus* che abbiamo descritta.

Viene descritta una nuova specie del genere *Angiostrongylus*, parassita del cuore e dei polmoni (vasi polmonari) dei gatti selvatici (*Felis silvestris*) catturati in Italia Centrale, per la quale viene proposto il nome *Angiostrongylus chabaudi* n. sp. Sono discussi i caratteri differenziali tra la nuova specie, parassita di *Felis silvestris*, e le specie vicine, *A. vasorum* e *A. raillieti* parassite di canidi.

#### AUTORI CITATI.

- [1] BAILLET C. (1886), *Histoire naturelle des helminthes des principaux mammifères domestiques*. 172 pp. Ed. P. Asselin, Paris.
- [2] BOSSI (1871), cit. DAUGHERTY (1946), RAILLET et CADIOT (1892).
- [3] DAUGHERTY E. C. (1946), *The genus Aelurostrongylus* Cameron, 1927. (*Nematoda: Metastrongylidae*) and its relatives; with descriptions of *Parafilaroides*, gen. nov. and *Angiostrongylus gubernaculatus* sp. nov. « Proc. Helm. Soc. of Wash. », 13, 16-26.
- [4] GERICHTER CH. B. (1949), *Studies on the nematodes parasitic in the lungs of Felidae in Palestine*, « Parasitol. », 30, 251-262.
- [5] KAMENSKY S. N. (1905), *Sistematiches-Kocpolozhenie radov i Metastrongylus Wost. i Protostrongylus g. n. sredi drugikh Strongylidae*, « Sborn Trud. Karkov. Vet. Inst. », 7, 17-50 cit. SKRJABIN.
- [6] RAILLIET A. et CADIOT (1892), *Strongylose du cœur et du poumon chez un chien*. « C. R. Soc. Biol. », 28 maggio, 1-5 (estratto).
- [7] RAILLIET A. et HENRY A. (1907), *Sur les variations des strongles de l'appareil respiratoire des mammifères*. « C. R. S. Biol. », 21 dicembre, 1-3 (estratto).
- [8] SKRJABIN A. e Coll. (1952), « *Opredelitel parasiticeskik nematod.* », 3, 726-738. Ed. Acc. Scienze Mosca.
- [9] SOLBYS A. (1953) *Helmintofauna ryjowkowatych (Soricidae) Bialowieskiego Parku Narodowego*, « Acta Parasitologica Polonica », 1, 353-402.
- [10] TRAVASSOS L. (1927), *Nematodeos novos*, « Bol. Biol. », 52-61, São Paulo.

**Zoologia.** — *La cromatina sessuale in elementi somatici di un Crostaceo decapode.* Nota <sup>(\*)</sup> di GIORGIO M. BAFFONI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. COTRONEI.

In recenti osservazioni sulla spermatogenesi di *Potamon (Telphusa) fluviatile* Latr. (Crust. Decap.) ho dimostrato che il «corpo cromatoide» descritto dalla Delpino in questi animali deve essere considerato un eterocromosoma; l'esame del suo comportamento, inoltre, mi ha indotto a ritenere che in *Potamon* il sesso eterogametico sia quello maschile, con una digametia di tipo *Protenor* (XX nelle femmine e XO nei maschi) <sup>(1)</sup>. Ho anche accennato che alla diversa situazione dei cromosomi sessuali nei due sessi si accompagna un diverso aspetto morfologico dei nuclei intercinetici nelle cellule somatiche: infatti le cellule follicolari degli ovociti e quelle connettivali che rivestono la gonade femminile, presentano una marcata zolla di cromatina aderente alla membrana nucleare (fig. 2) che nelle cellule connettivali della gonade maschile è assente (fig. 1).

Questa osservazione mi ha spinto ad estendere l'esame ai tessuti somatici, nei quali di norma ho potuto riscontrare, conforme alle mie aspettative, una zolla di cromatina che differenzia morfologicamente gli elementi somatici di sesso femminile da quelli di sesso maschile.

La presente Nota ha lo scopo di documentare la situazione della cromatina sessuale (*sex-chromatin* degli Autori americani) in *Potamon fluviatile* e di descriverne gli aspetti in alcuni tipi di cellule somatiche. L'interesse del reperto è costituito dal fatto che esso rappresenta il primo caso in letteratura del rinvenimento di una differenza morfologica tra nuclei di cellule somatiche dei due sessi in un Crostaceo; inoltre la presenza della cromatina sessuale costituisce una conferma riguardo il tipo di digametia (XO) da me stabilito in seguito all'esame della spermatogenesi di *Potamon* <sup>(1)</sup>.

Ricordo che in un insetto emittero (*Gerris lateralis*) il quale presenta una digametia di tipo *Protenor*, Geitler (1937) <sup>(2)</sup> ha rinvenuto una zolla di cromatina (o più zolle in elementi poliploidi) che contrassegnava le cellule somatiche di individui di sesso femminile e che l'Autore ha messo in rapporto con i fenomeni di eteropicnosi somatica degli eterocromosomi. Più di recente è stato descritto da Barr e Bertram <sup>(3)</sup> un cariosoma che distingue morfologicamente le cellule somatiche di sesso femminile da quelle di sesso maschile, che ne sono prive, in Mammiferi che presentano una digametia

(\*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. VIII), vol. 22, p. 200 (1957).

(2) L. GEITLER, «Zeitschr. Zellforsch. mikr. Anat.», vol. 26, p. 641 (1957).

(3) M. L. BARR & E. G. BERTRAM, «Nature», vol. 163, p. 676 (1949).

di tipo *Protenor*, o anche di tipo *Lygaeus* (femmine XX e maschi XY), ma dove il cromosoma Y è molto minuto (*Carnivora*, *Primates*, *Artiodactyla*); una simile differenza, invece, non è stata riscontrata in Mammiferi con digametia di tipo *Lygaeus* nei quali il cromosoma Y presenta dimensioni simili al cromosoma X, ovvero in quelli i cui eterocromosomi sono molto piccoli o non presentano vasti tratti eteropicnotici (*Lagomorpha*, *Rodentia*)<sup>(4)</sup>.

La possibilità di distinguere nel nucleo di elementi cellulari somatici una differenza morfologica tra i due sessi assume un notevole interesse per il riconoscimento del sesso genetico in individui fenotipicamente ermafroditi e di recente è stata applicata alla diagnosi prenatale del sesso nell'uomo<sup>(5)</sup>. A ciò va aggiunto che nel nucleo di alcune cellule somatiche al termine del differenziamento è stata osservata una migrazione della cromatina sessuale dalla membrana nucleare verso il nucleolo, e pertanto la posizione della cromatina sessuale può rappresentare un criterio sussidiario per distinguere gli elementi indifferenziati da quelli differenziati<sup>(6)</sup>.

Per gli intenti che hanno motivato la presente ricerca, ho fissato separatamente, in liquido di Sanfelice e di Helly, pezzi di organi varî prelevati da *Potamon fluviatile* rispettivamente di sesso maschile e di sesso femminile; i pezzi sono stati inclusi in celloidina-paraffina e le sezioni seriali (5  $\mu$  di spessore) sono state trattate con il reattivo di Schiff secondo il metodo di Feulgen-Rossenbeck standardizzato da Stowell<sup>(7)</sup>; alcune sezioni sono state colorate con il metodo di Mallory-Azan secondo Heidenhain onde riconoscere i diversi tipi cellulari di un organo. Ho scelto il metodo di Feulgen, rispetto a quelli usualmente impiegati per mettere in evidenza la cromatina sessuale (cresil-violetto, bleu di toluidina o di tionina, Giemsa), poichè esso, per quanto offra immagini meno marcate di questi, evita la possibilità di confondere strutture cromatiniche con eventuali formazioni basofile di natura diversa.

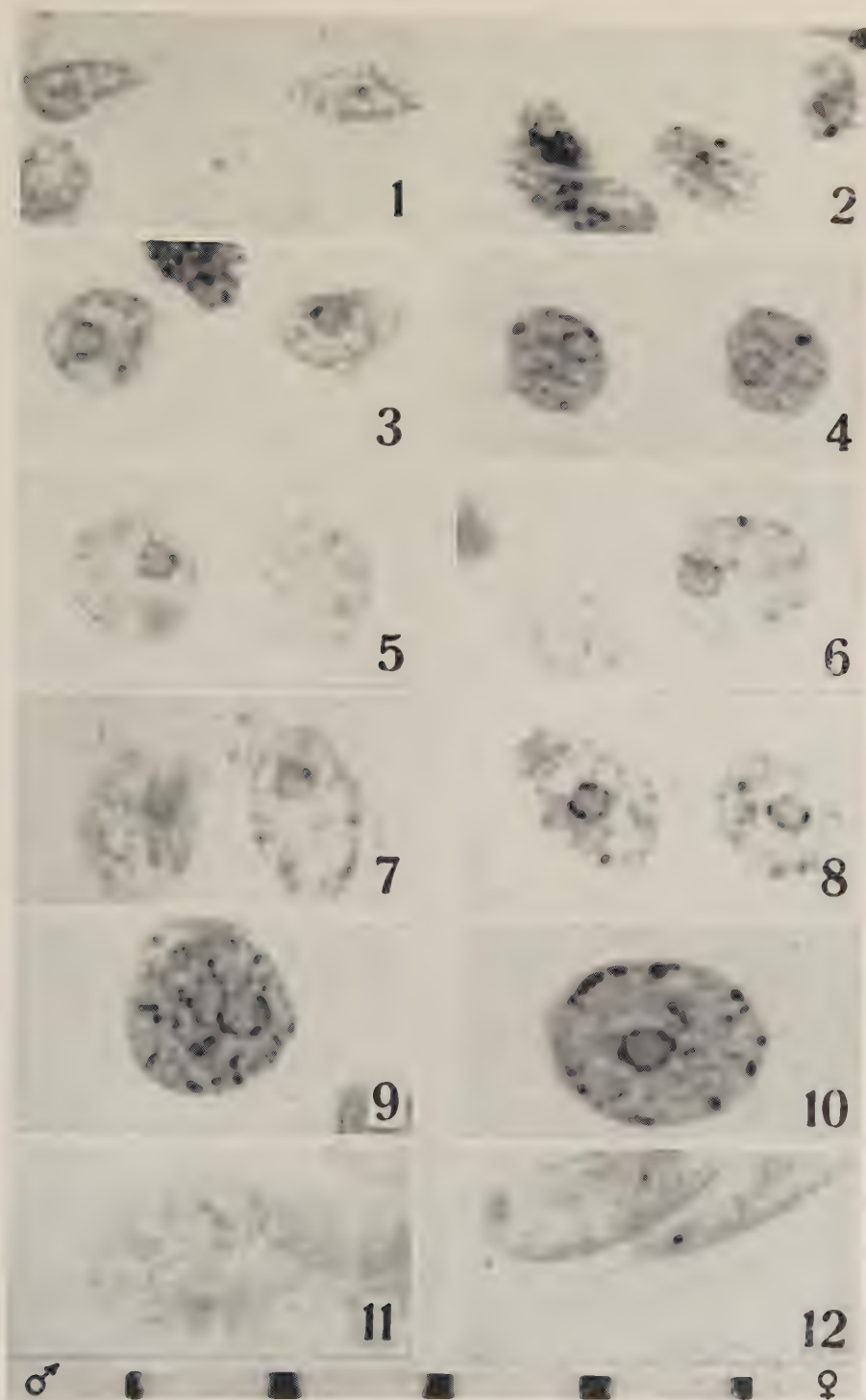
In questa Nota mi limiterò a descrivere i primi risultati raggiunti dalla osservazione di cellule somatiche dell'apparato digerente (intestino ed epatopancreas), riservando al lavoro *in extenso* la documentazione del fenomeno, in altri tessuti dei quali ho in osservazione i preparati istologici. Ho preferito iniziare le osservazioni sull'apparato digerente poichè in questo sono presenti elementi di diversa natura (di rivestimento, ghiandolari e connettivali) e di origine diversa (ectodermica, endodermica e mesodermica).

(4) K. L. MOORE & M. L. BARR, « Journ. Comp. Neurol. », vol. 98, p. 213 (1953); ho osservato la cromatina sessuale anche nelle cellule nervose di una femmina di *Perissodactylus* (*Equus caballus*).

(5) F. FUCHS & P. RIIS, « Nature », vol. 177, p. 330 (1956).

(6) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), vol. 17, p. 70 (1954); *ibidem*, vol. 20, p. 125 (1956); « Arch. Zool. Ital. », vol. 41, p. 1 (1956); un simile comportamento, oltre che in numerosi tessuti di un Carnivoro (Op. cit. p. 70), l'ho verificato anche in cellule dello strato granuloso dell'epidermide di femmine della specie umana.

(7) R. E. STOWELL, « Stain Technol. », vol. 20, p. 45 (1945).



Cellule connettivali (1-2) dell'epatopancreas (3-10) e dell'epitelio intestinale (11-12)  
di *Potamon fluviatile* di sesso maschile (a sinistra) e femminile (a destra).

(Fiss. di Sanfelice; met. di Feulgen;  $\times 1140$ . Ogni intervallo della scala micrometrica in calce = 10  $\mu$ ).





Nel *connettivo* dell'intestino e dell'*epatopancreas* mi sono soffermato su tre diversi tipi di elementi:

1° cellule di dimensioni simili a quelle osservate nello stroma connettivale delle gonadi; esse presentano nuclei relativamente voluminosi (da 9 a 7  $\mu$  di diametro medio), polimorfi, più o meno allungati, con materiale Feulgen-positivo disposto come un sottile rivestimento attorno al nucleolo ribonucleico (plasmosoma) ed il resto di aspetto reticolare aderente internamente alla membrana nucleare (carioteca); negli individui di sesso femminile appare una grossa zolla nodale (come nella fig. 2) che non si mette in evidenza in quelli di sesso maschile (come nella fig. 1);

2° cellule che si rinvenivano generalmente in piccoli gruppi anche nei vasi (amebociti?); presentano nuclei più piccoli (da 7 a 5  $\mu$  di diametro), rotondeggianti o lobati, con cromatina aderente alla membrana nucleare di aspetto granulare, qualche minuto granulo nel cariotoplasma (nuclei torbidi) ed attorno al piccolo nucleolo ribonucleico (cromatina nucleolo-associata); tra i granuli disposti contro la membrana nucleare se ne distingue uno più grosso e marcato nei tessuti provenienti da individui di sesso femminile;

3° elementi particolarmente abbondanti nella tonaca intestinale, con nuclei molto piccoli (da 5 a 3  $\mu$  di diametro), di forma irregolare, spesso allungata; essi presentano una cromatina così compatta da non permettere l'identificazione di eventuali differenze morfologiche tra tessuti di individui di sesso maschile e di sesso femminile.

Nell'epitelio dei tubuli che costituiscono l'*epatopancreas*, ho distinto quattro diversi tipi di elementi:

1° cellule prismatiche, con citoplasma chiaro contenente granuli neutrofili e qualche granulo acidofilo, che rappresentano gli elementi più numerosi delle pareti del tubulo; presentano nucleo piccolo (7,3  $\mu$  di diametro), sferoidale, torbido, con cromatina aderente alla membrana nucleare di aspetto granulare, delicate granulazioni diffuse nel cariotoplasma e più fitte attorno al nucleolo ove costituiscono un sottile rivestimento (figg. 3 e 4); nei preparati prelevati da individui di sesso femminile si osserva una voluminosa zolla sferoidale aderente alla membrana (fig. 4) che non si distingue, almeno con la stessa evidenza, nei nuclei di sesso maschile (fig. 3);

2° cellule prismatiche più voluminose, talora utricolari, con citoplasma di aspetto alveolare, frequenti perlopiù sul fondo del tubulo ghiandolare; esse presentano un nucleo più voluminoso (8,3  $\mu$  di diametro) rispetto a quello precedentemente descritto, di aspetto vescicoloso e con cromatina in parte contro la membrana nucleare, come un delicato reticolo con granuli nodali, ed in parte intorno al nucleolo, come un rivestimento sottile ed ispessito da alcune zolle o minuti granuli (figg. 5 e 6); il nucleolo di questi elementi è eccentrico e spesso in intimo contatto con la membrana nucleare (fig. 6); gli elementi appartenenti ad individui di sesso femminile si distinguono da quelli di sesso maschile per la presenza di una grossa zolla aderente alla membrana nucleare (fig. 6), che nei maschi è assente (fig. 5);

3° cellule di forma piramidale, comprese tra le altre della ghiandola ed addossate alla parete esterna dell'epitelio ghiandolare, con citoplasma finemente granulare e basofilo; probabilmente sono elementi indifferenziati; essi presentano nuclei ellittici (diametri:  $12 \times 7 \mu$ ) con parte della cromatina aderente alla membrana nucleare sotto forma di reticolo a maglie larghe ed a travate relativamente robuste e parte attorno al nucleolo come un rivestimento sottile ed ispessito da 2-4 zolle (figg. 7 e 8); nei preparati prelevati da individui di sesso femminile è sempre evidente una grossa zolla cromatinica aderente alla membrana nucleare (fig. 8) che in quelli di sesso maschile fa difetto o si confonde con i granuli che costituiscono l'apparente reticolo (fig. 7);

4° grossi elementi, particolarmente frequenti in certi tratti del tubulo e che manifestano i quadri del ciclo secretorio olocrino (citoplasma inizialmente basofilo, quindi con ammassi di sostanza acidofila e PAS-positiva che si versa tutta insieme all'esterno; modificazioni degenerative dei nuclei al termine della secrezione); presentano nuclei molto voluminosi (fino a  $12 \times 12 \mu$  di diametro), sferoidali, con numerosi granuli di cromatina: i più grossi contro la membrana nucleare ed i più minuti nel karioplasma, più fitti a ridosso del nucleolo ribonucleico ove costituiscono un rivestimento di aspetto granulare (figg. 9 e 10); nonostante la presenza di un unico nucleolo, sia per le dimensioni che per la notevole quantità di cromatina ritengo che tali nuclei siano poliploidi; nelle ghiandole prelevate da individui di sesso femminile, aderenti alla membrana nucleare di questi elementi, si osservano numerose zolle voluminose (in numero variabile: da 6 a 16), molto simili per grandezza ed aspetto a quelle riscontrate negli altri elementi dell'epatopancreas e del connettivo in individui di sesso femminile (fig. 10); però alcune zolle voluminose, seppure non così grandi come nelle femmine, si osservano anche nel nucleo di cellule maschili (fig. 9), per cui la valutazione obbiettiva delle differenze tra i due sessi in base a questi elementi è difficoltosa; mi riprometto di tornare sull'argomento, adoperando tecniche più appropriate (preparati per schiacciamento), per un'analisi adeguata di questi nuclei e poiché il loro studio si prospetta molto interessante per indagare l'entità della poliploidia somatica di *Potamon*; ricordo in proposito che Geitler <sup>(2)</sup>, enumerando le grosse zolle di nuclei dello stesso aspetto in elementi somatici di *Gerris lateralis* femmine, è risalito al loro grado di poliploidia.

L'intestino dei Crostacei decapodi, come è noto, è costituito da una breve porzione di origine endodermica (intestino medio) e da una cospicua porzione di origine ectodermica (intestino posteriore o retto) che internamente presenta un rivestimento chitinoso; tutti gli elementi dell'epitelio intestinale, nonostante la loro diversa origine, presentano un'aspetto uniforme: sono cellule clavate o cilindriche con nucleo molto voluminoso e di forma ellissoidale (fino a  $16 \times 10 \mu$  di diametro) la cui cromatina si presenta distribuita in parte preponderante contro la membrana nucleare a costituire allineamenti di granuli minuti che sembrano anastomizzarsi formando uno sfumato

reticolo, ed in parte attorno al nucleolo (in proporzione poco voluminoso) a costituire un sottile rivestimento ispessito da 2-3 granuli (figg. 11 e 12); negli individui di sesso femminile i nuclei presentano una zolla cromatinica, intensamente Feulgen-positiva, ma a margini meno netti che nelle altre cellule con nuclei di aspetto diploide, e che aderisce alla membrana nucleare (fig. 12).

In base a questi dati, come è evidente dalla comparazione di nuclei dello stesso tipo, provenienti rispettivamente da individui di sesso *maschile* (figure *dispari* della Tavola) e da individui di sesso femminile (figure *pari* della Tavola), risulta che cellule somatiche, sia di diversa origine (ectodermica, mesodermica, endodermica), sia di uno stesso organo, ma in elementi con attività funzionale ed aspetto morfologico differenti, presentano una struttura Feulgen-positiva che contrassegna la loro appartenenza ad uno dei due sessi (quello femminile). Tale struttura è di natura cromatinica: essa infatti è positiva al reattivo di Schiff solo nei preparati sottoposti ad idrolisi cloridrica, si colora anche con la pironina del metodo di Brachet (secondo Gerola e Vannini<sup>(8)</sup>, a pH 6) e perciò contiene anche pentosonucleotidi, è PAS-negativa, ma possiede una notevole affinità al reattivo per le proteine (metodo dell'Hg-Bleu di bromofenolo); cioè si comporta esattamente come la cromatina di cellule somatiche postcinetiche di Vertebrati<sup>(6-9)</sup>.

La marcata e voluminosa zolla di cromatina, che è presente nei tessuti dell'apparato digerente da me esaminati in *Potamon* di sesso femminile, non può provenire dagli autosomi, i quali sono quantitativamente eguali nei due sessi, ma va imputata alla diversa situazione degli eterocromosomi contenuti nelle cellule somatiche: queste infatti posseggono due cromosomi sessuali nelle femmine ed uno solo nei maschi; analogamente a quanto è stato supposto per *Gerris* e per i Mammiferi, anche per *Potamon* si deve ammettere che la cromatina dei due eterocromosomi nella femmina si rende manifesta per il fatto che tali cromosomi presentano lunghi tratti eteropicnotici, i quali cioè possiedono una notevole resistenza alla despiralizzazione, conservando per questo i propri acidi nucleici anche nel nucleo a riposo; ricordo che la forte eteropicnosi degli eterocromosomi è stata osservata nei Mammiferi (Weiman<sup>(10)</sup>, Painter<sup>(11)</sup>, Greenwood<sup>(12)</sup>, Tobias<sup>(13)</sup>), è stata illustrata in Ortotteri (White<sup>(14)</sup>) e descritta da me in *Potamon fluviatile* durante la pro-fase meiotica<sup>(1)</sup>.

(8) F. M. GEROLA e E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), vol. 5, p. 77 (1948).

(9) G. M. BAFFONI, « La Ricerca Scientifica », vol. 26, p. 2593 (1956); « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), vol. 21, p. 491 (1956).

(10) H. L. WEIMAN, « Amer. Journ. Anat. », vol. 21, p. 1 (1917).

(11) T. S. PAINTER « Journ. Experim. Zool. » vol. 39, p. 197, p. 229, p. 433 (1924).

(12) A. W. GREENWOOD, « Quart. Journ. Micr. Sci. », vol. 67, p. 203 (1923).

(13) P. V. TOBIAS, *Chromosomes, Sex-cells and Evolution in a Mammal*, London 1956.

(14) M. J. D. WHITE, « Journ. of Genetics », vol. 40, p. 67 (1940).



Rimane a questo punto da spiegare perché le zone eteropicnotiche dei due eterocromosomi non appaiono come due masse distinte nel nucleo intercinetico delle cellule somatiche femminili, ma si fondano in un unico cariosoma; una indagine cariologica del fenomeno, attualmente sconosciuto, si prospetta del massimo interesse per i problemi riguardanti la persistenza ed il comportamento dei cromosomi nel nucleo intercinetico.

L'esame da me compiuto su altri Crostacei decapodi (*Callianassa*, *Eupagurus*, *Lysmata*, *Leander*) non è riuscito a mettere in evidenza le differenze morfologiche tra nuclei di cellule somatiche dei due sessi che si verificano in *Potamon*; da ciò arguisco che una condizione di digametia simile a quella descritta in *Potamon fluviatile*<sup>(1)</sup> non deve essere un fenomeno comune nei Decapodi. Ad ogni modo le presenti osservazioni costituiscono la conferma dell'esattezza degli argomenti mediante i quali ho sostenuto che in *Potamon* vi sia un'eterogametia maschile di tipo *Protenor*; se infatti il cromosoma da me interpretato come X fosse stato da considerarsi un cromosoma Y o un gruppo di cromosomi accessori (come ha ritenuto la Delpino), o non avrei dovuto verificare alcuna differenza tra cellule somatiche dei due sessi, oppure avrei dovuto rinvenire la eventuale cromatina sessuale nelle cellule dei maschi invece che delle femmine<sup>(15)</sup>.

Ulteriori osservazioni sono in corso al fine di precisare se anche nei Crostacei, come ho constatato nei Vertebrati<sup>(6)</sup>, la cromatina sessuale presenti un particolare comportamento negli elementi somatici postcinetici differenziati.

*Concludendo:* in *Potamon fluviatile* i tessuti somatici di individui appartenenti al sesso femminile di norma si possono distinguere morfologicamente da quelli di sesso maschile per la presenza di una marcata zolla di cromatina nel loro nucleo; la manifestazione di questa struttura, come delle formazioni analoghe che vanno sotto la denominazione di «cromatina sessuale», va ritenuta effetto della eteropicnosi dei due eterocromosomi presenti nelle cellule delle femmine. Perciò in *Potamon* le cellule somatiche presentano una differenza morfologica dal cui esame è possibile risalire al sesso genetico dell'individuo.

(15) Nel nucleo di cellule somatiche del sesso eterogametico (femminile) di *Bombyx mori* e di altri Lepidotteri, infatti, sono stati descritti cariosomi, assenti nel sesso omogametico (maschile), che sono stati interpretati come dovuti all'eteropicnosi del cromosoma Y (ved.: E. KAWAGUKI, 1933, «Cytologia», vol. 4, p. 339; S. G. SMITH, 1945, «Journ. of Heredity», vol. 36, p. 195; G. FRIZZI, 1948, «La Ricerca Scientifica», vol. 18, p. 119).

**Zoologia.** — *Sopra alcuni esemplari femmine di anchilostoma, riportabile ad «A. iperodontatum», parassita di «Caracal nubicus» (\*)*.  
Nota di EGIDIO LIPPARONI, presentata (\*\*) dal Socio V. PUNTONI.

Dall'intestino tenue di una lince (*Caracal nubicus*), catturata in Somalia nella regione del Medio Uebi Scebeli presso il Villaggio Duca degli Abruzzi (in somalo «Giohar») l'11 luglio 1951, sono stati raccolti 4 nematodi femmine appartenenti tutte ad una stessa specie del genere *Ancylostoma*.

Poiché non erano stati prima segnalati anchilostomi in *Caracal nubicus* e poiché nel vicino genere *Lynx* è stato segnalato solamente *A. caninum*, da cui i nostri esemplari chiaramente si differenziano, ci sembra utile fornire una breve descrizione del parassita, secondo noi riportabile alla specie *A. iperodontatum* Le Roux e Biocca 1957, di cui finora era conosciuto solamente il maschio.

#### MORFOLOGIA.

Femmine (4 esemplari).

Vermi cilindrici di colorito avorio, chiaramente attenuati alla estremità posteriore, lievemente attenuati all'estremità anteriore rivolta alquanto dorsalmente. Lunghezza da 9 a 14,5 mm; larghezza massima da 0,620 a 0,638 mm. Cuticola striata trasversalmente; la distanza da una stria all'altra è da 9 a 10  $\mu$ .

Papille cervicali, anello nervoso e polo escretore a livello circa della metà dell'esofago: la distanza delle papille dall'estremità anteriore è da 398 a 406  $\mu$ ; la distanza del poro escretore dall'estremità anteriore è da 370 a 380  $\mu$ ; la distanza dell'anello nervoso dall'estremità anteriore è da 352 a 365  $\mu$ .

Capsula boccale fornita di tre robuste paia di denti ventrali, di cui il paio mediano è il più voluminoso. Il margine latero-dorsale dell'apertura boccale, a differenza delle altre specie del genere, eccettuato *A. pluri-dentatum* e *A. iperodontatum*, presenta tre paia di evidenti puntine chitinee (o denti dorsali).

Nella profondità della capsula boccale si osservano le due lancette chitinee faringee.

Esofago, leggermente clavato nel suo terzo posteriore, è lungo da 0,837 a 0,855 mm con larghezza massima di mm. 0,210.

Vulva situata in prossimità dell'unione del terzo medio col terzo posteriore del corpo. I tubuli genitali descrivono numerose circonvoluzioni e si estendono anteriormente sino in vicinanza del margine posteriore dell'esofago.

Uova con guscio sottile, trasparente, alcune con inizio di segmentazione: misurate nell'utero sono da 58 a 76  $\mu$  di lunghezza e da 39 a 48  $\mu$  di larghezza.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

L'ano dista dall'estremità posteriore del corpo da mm 0,155 a 0,160. La coda è appiattita nel senso antero-posteriore e termina con un breve filamento.

Carattere fondamentale dei nostri parassiti è quello di possedere 3 paia di puntine chitinee dorsali della capsula boccale, caratteri conosciuti solo per le specie *A. pluridentatum* e *A. iperodontatum*.

Da *A. pluridentatum*, parassita di felini americani mai segnalato in Africa, la nostra specie può essere facilmente differenziata perché possiede tre paia di voluminosi denti ventrali, al posto di un voluminoso paio esterno ed un paio interno rudimentale posseduti da *A. pluridentatum*.

Al contrario nessun carattere differenziale esiste fra le capsule boccali dei parassiti da noi ritrovati e quanto descritto per *A. iperodontatum*, ritrovato in un felino africano, *Acinonyx jubatus*. Poiché non è conosciuta la femmina della specie *A. iperodontatum* riteniamo che la nostra descrizione sia la prima che si riferisca appunto alla femmina di questa specie, la cui presenza viene così confermata in alcuni felini africani.

**Fisiologia.** — *Caratteri dell'attività elettrica unitaria dei neuroni corticocerebellari* (\*). Nota di PAOLO CREPAX, ALDO NIGRO e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

L'elettrogramma derivato nel Gatto decerebrato mediante elettrodi di piccole dimensioni ( $\simeq 15 \mu$ ) infissi nella corteccia cerebellare è caratterizzato da oscillazioni di potenziale assai rapide (*spikes*) che sono state considerate l'espressione dell'attività « tutto o nulla » delle unità corticocerebellari [Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(1,2)</sup>].

Esponiamo nella presente Nota alcune osservazioni che concernono l'aspetto dei fenomeni bioelettrici anzidetti: tali osservazioni abbiamo avuto agio di fare indagando le modificazioni che l'attività della corteccia cerebellare, derivata mediante microelettrodi <sup>(3)</sup>, presenta in diverse condizioni sperimentali.

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI e R. S. SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIII, 465 (1950).

(2) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI e R. S. SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIV, 181 (1951).

(3) BUSER [*Analyse des réponses électriques du lobe optique à la stimulation de la voie visuelle chez quelques vertébrés inférieurs*, Paris, Masson (1955)] riserva la qualifica di micro-elettrodi a micropipette di vetro, le cui dimensioni alla punta sono dell'ordine del micron. Secondo l'uso finora generalmente adottato, noi impiegheremo la denominazione stessa con criteri meno restrittivi: ciò che contraddistingue la derivazione microelettrodica, è la possibilità di registrare un'attività unitaria ossia conforme nelle sue manifestazioni alla legge del « tutto o nulla ». Senza dubbio, tale possibilità dipende in primo luogo dalle dimensioni dell'elettrodo, le quali vanno tuttavia considerate relativamente a quelle degli elementi nervosi esplorati; soprattutto per questo, una classificazione dei microelettrodi fondata sulle loro dimensioni presenta motivi d'incertezza.

Gli esperimenti sono stati eseguiti in Gatti, che 2 h avanti l'inizio delle registrazioni erano stati decerebrati in narcosi eterica a livello intercollicolare o retrocollicolare. Le registrazioni sono state effettuate nella grandissima parte dei casi dal lobulo V [Larsell <sup>(4)</sup>].

La derivazione dei potenziali elettrici corticocerebellari era effettuata col metodo monopolare: come elettrodo attivo era usato nel più dei casi un filo di platino del diametro di  $20\ \mu$ , inguainato fino in prossimità della punta da un sottilissimo strato di vetro, il quale assicurava al conduttore metallico la rigidità necessaria per poter agevolmente guidare l'elettrodo stesso nella profondità dei tessuti; il che veniva fatto mediante un micromanipolatore che consente spostamenti graduati al micron. Oppure ci servivamo di un filo flessibile di acciaio del diametro di  $12,5\ \mu$ , che veniva guidato manualmente nella profondità della corteccia. Come elettrodo indifferente era utilizzata una sfera di Ag-AgCl, del diametro di 1 mm ca., che veniva posta sulla superficie cauterizzata del M. temporale.

I potenziali erano amplificati mediante un preamplificatore Grass P4, rivelati con un oscillografo Du Mont 322 e registrati con un fotochimografo Grass. Per migliorare la registrazione fotografica delle oscillazioni di potenziale assai rapide che caratterizzano il tracciato microelettrodoico, ci siamo quasi sempre serviti del modulatore di brillantezza ideato da Bonferroni e Mollica <sup>(5)</sup>.

Dalla superficie del cervelletto mediante un elettrodo di piccole dimensioni ( $12,5$ – $20\ \mu$ ) si deriva un tracciato costituito da onde difasiche [*waves* secondo la terminologia di Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(1)</sup>], dell'ampiezza di  $50$ – $200\ \mu\text{V}$ , le quali si succedono in modo continuo e con frequenza elevata ( $200$ – $300\ \text{Hz}$ ); ossia un tracciato del tutto simile a quello derivabile dalla superficie stessa mediante macroelettrodi.

Approfondando cautamente nel tessuto la punta dell'elettrodo, un elettrogramma avente caratteristiche analoghe si deriva in modo continuo in tutti i punti della corteccia cerebellare che la punta stessa viene attraversando; inoltre si nota che alle onde descritte si sovrappongono di quando in quando <sup>(6)</sup> oscillazioni di potenziale monofasiche, positive o negative <sup>(7)</sup>, assai rapide (*spikes*: la durata è dell'ordine di 1 msec) e di notevole ampiezza ( $200$ – $400\ \mu\text{V}$ ), che si succedono con frequenza molto variabile.

(4) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953).

(5) P. L. BONFERRONI e A. MOLLIKA, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXX, 733 (1954).

(6) Varia da preparato a preparato la densità dei punti della corteccia cerebellare dai quali possono derivarsi *spikes*. Tale forma di attività è stata da noi osservata nel 95 % degli animali.

(7) La denominazione si riferisce alla deflessione che presenta uno sviluppo preminente. Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(1)</sup> descrivono gli *spikes* che noi chiameremo monofasici negativi come « difasic, initially negative, with a small positive potential following », caratteri che corrispondono in ogni dettaglio a quelli da noi osservati in registrazioni effettuate a grande velocità (fig. 3). Circa al significato della deflessione positiva, Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(1)</sup> sospettano che « a part of this exaggerated after positivity... is due to instrumental distortion of spike contour ». A ogni modo, qualunque sia la spiegazione del fenomeno, la denominazione di *spike* difasico andrebbe riservata [V. E. AMASSIAN, « EEG clin. Neurophysiol. », V, 415 (1953)] alla oscillazione che abbia all'incirca una stessa ampiezza nelle due fasi di segno opposto.



Tali oscillazioni compaiono nell'elettrogramma cerebellare quando la punta dell'elettrodo si trova nello strato dei corpi delle cellule di Purkinje o in quello dei granuli (fig. 1 B e C), mentre esse risultano costantemente assenti quando si deriva dallo strato molecolare (fig. 1 A).

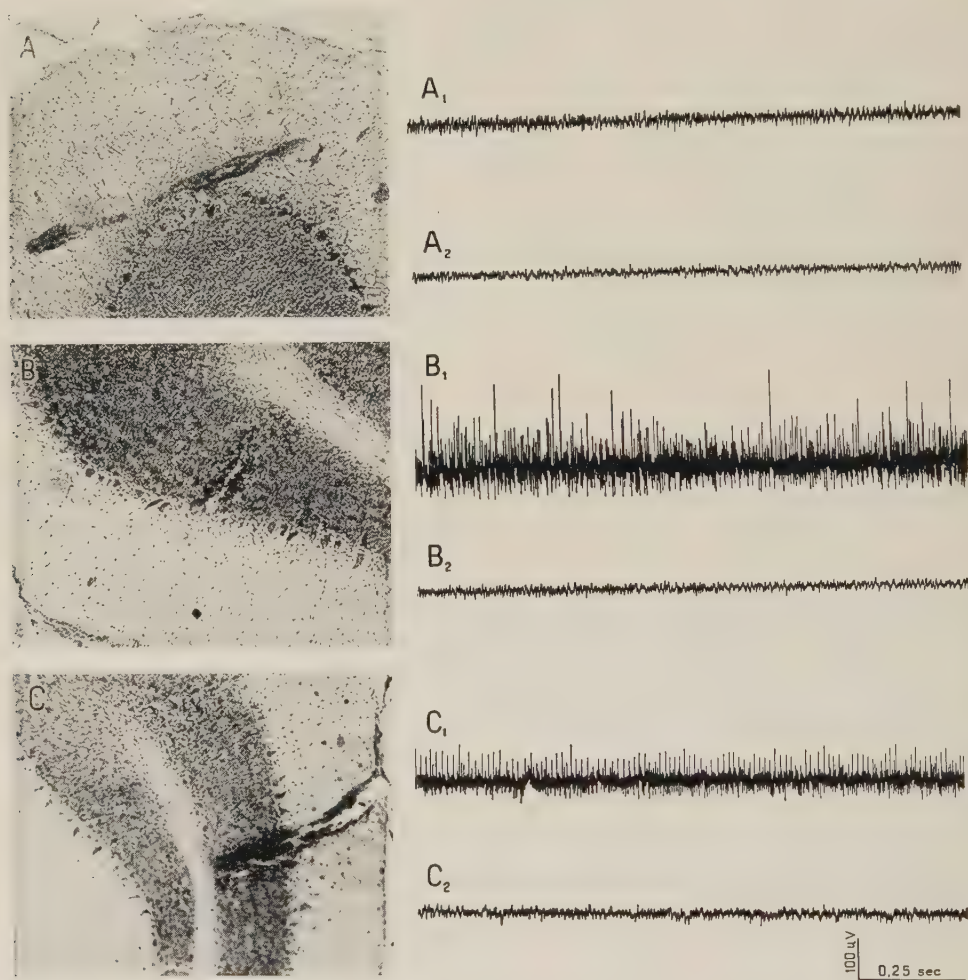


Fig. 1. - Attività elettrica registrata in diversi strati della corteccia cerebellare prima e dopo la microelettrolisi degli elementi immediatamente adiacenti alla punta dell'elettrodo.

A. La punta dell'elettrodo derivante si trova nello strato molecolare e non registra *spikes* ( $A_1$ ); dopo elettrolisi ( $A_2$ ) l'elettrogramma cerebellare non è sostanzialmente modificato. B. La punta dell'elettrodo si trova nello strato dei corpi delle cellule di Purkinje e deriva un elettrogramma costituito da *spikes* ( $B_1$ ) che scompaiono dopo microelettrolisi ( $B_2$ ). C. La punta dell'elettrodo si trova nello strato dei granuli e deriva un elettrogramma ( $C_1$ ) non diverso da quello registrabile dallo strato delle cellule di Purkinje (a parte il voltaggio generalmente minore); dopo microelettrolisi, gli *spikes* scompaiono ( $C_2$ ).

Colorazione col metodo di Nissl; 100  $\times$ .

La frequenza degli *spikes* in ciascun focoloiaio è particolarmente elevata subito dopo che la punta dell'elettrodo ha raggiunto il focoloiaio stesso (*injury discharge*); successivamente, per 1-4 min gli *spikes* diminuiscono di frequenza e la diminuzione concerne in principal modo gli *spikes* positivi, la cui presenza

caratterizza tipicamente il periodo iniziale dell'attività di ciascun preparato (fig. 2). Al termine di 5 min gli effetti irritativi immediati del microelettrodo possono considerarsi estinti.

Come si è già rammentato <sup>(7)</sup>, lo *spike* monofasico negativo è seguito in parecchi casi da una piccola deflessione positiva (fig. 3), la cui ampiezza non è superiore a 1/5-1/10 di quella della deflessione di segno opposto che la precede. In rari casi la deflessione positiva che segue quella negativa, è di ampiezza eguale o di poco minore rispetto a quest'ultima (si veda il primo grafico della fig. 3 C) e l'aspetto della oscillazione complessa che ne risulta è quello di uno *spike* difasico a fase iniziale negativa; l'oscillazione positiva può anche



Fig. 2. — Attività elettrica unitaria derivata da un lembo di corteccia cerebellare, le cui connessioni estrinseche sono state recise; le registrazioni sono state iniziate subito dopo l'approfondamento dell'elettrodo e mostrano i caratteri dell'attività del focolaio durante la *injury discharge* e le loro successive modificazioni.

A: 3 min dopo approfondamento dell'elettrodo. B: 4 min dopo A. C: 2 min dopo B.

precedere quella negativa, come si osserva nel secondo e nel terzo grafico della fig. 3 C.

Non si può escludere che le oscillazioni difasiche ora descritte siano la conseguenza dell'occasionale associarsi di uno *spike* monofasico positivo e di uno negativo, tanto più che quest'ultimo tipo di manifestazione bioelettrica si osserva in quasi tutti i focolai, oltre che nei primi 5 min, per tutto il tempo in cui la loro attività viene seguita. A ogni modo, il numero degli *spikes* monofasici positivi è sempre scarso (1 ogni 2-3 sec), assai inferiore a quello rilevabile durante la *injury discharge*, e aumenta solo di poco quando la frequenza degli *spikes* monofasici negativi si accresce grandemente.

Nella metà circa dei focolai esplorati, gli *spikes* si succedono in modo discontinuo e assai irregolare: quando il ritmo pulsatorio si fa più elevato (oltre 80 al sec), si raccolgono in gruppi (scariche o *bursts*) più o meno folti <sup>(8)</sup>. Negli altri casi gli *spikes* si presentano in modo continuo e discretamente uniformi e la regolarità del ritmo pulsatorio permette di prevedere, entro certi limiti, il tempo durante il quale il ritmo stesso si manterrà invariato: nei fo-

(8) La frequenza degli *spikes* che costituiscono una scarica, spesso è uniforme; talora gli *spikes* si addensano maggiormente nella fase iniziale o finale.

colai che manifestano una frequenza di scarica assai regolare, il ritmo pulsatorio può mantenersi uniforme per 20-25 min; quando invece i focolai pulsano meno regolarmente, come accade nel più dei casi, il ritmo stesso si conserva regolare per durate minori (4-6 min). I ritmi pulsatori uniformi sono contraddistinti, senza eccezioni, da frequenze comprese tra 20 e 40 al sec; né le frequenze inferiori a tali valori, né quelle superiori costituiscono di solito un aspetto duraturo dell'attività di un focolaio.

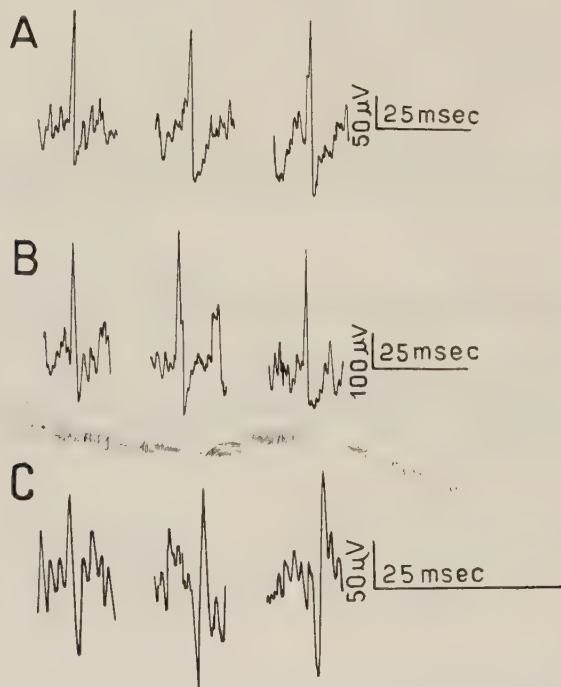


Fig. 3. - Attività elettrica unitaria derivata dalla corteccia cerebellare del Gatto decerebrato.

A e B: *spikes* monofasici negativi. C: *spike* difasico a fase iniziale negativa, nel primo elettrogramma; *spikes* difasici a fase iniziale positiva, nei due successivi tracciati.

Dobbiamo ora esaminare brevemente il problema dell'origine dei diversi tipi di oscillazioni rapide da noi registrate e inoltre cercare di stabilire se le manifestazioni bioelettriche descritte siano l'espressione di un'attività normale degli elementi corticocerebellari ovvero la conseguenza di una lesione inferta dal microelettrodo agli elementi stessi.

Gli *spikes* monofasici negativi derivati dalla corteccia cerebellare, originano quasi certamente dal soma neuronico. Impiegando elettrodi di calibro superiore a  $4\mu$ , oscillazioni analoghe sono state derivate anche dalla sostanza bianca [Amassian<sup>(9)</sup>, Marshall<sup>(10)</sup>]; ma in tal caso le oscillazioni medesime si presentano costantemente raggruppate in *bursts* e sono manifeste solo per breve tempo, il che fa ritenere che debbano riguardarsi come l'espressione di una lesione inferta alle fibre.

(9) V. E. AMASSIAN, « EEG clin. Neurophysiol. », V, 415 (1953).

(10) V. H. MARSHALL, « J. Neurophysiol. », IV, 25 (1941).



Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(2)</sup> lasciano aperta la questione della identificazione degli elementi da cui prendono origine gli *spikes* monofasici negativi e solo affermano che tali elementi sono rappresentati dalle strutture contenute negli strati delle cellule di Purkinje e dei granuli. A nostro giudizio, vi è ragione di ritenere che l'elemento di origine sia rappresentato dal soma delle cellule di Purkinje ovvero di altre cellule di dimensioni poco inferiori, mentre ci sembra difficile ammettere che le deflessioni stesse originino dai granuli. A tale conclusione conducono implicitamente le ammissioni stesse di Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(2)</sup>, secondo i quali gli *spikes* monofasici negativi raggruppati in *bursts* di elevata frequenza possono ripetere una genesi irritativa: date le dimensioni relativamente cospicue degli elettrodi di derivazione, sembra naturale pensare che le lesioni da essi inferte agli elementi cellulari possano risultare compatibili con la sopravvivenza relativamente prolungata degli elementi colpiti, nel solo caso che questi abbiano un certo volume.

Gli *spikes* monofasici positivi, registrati in gran numero subito dopo l'approfondamento dell'elettrodo, originano verosimilmente anch'essi dai somi neuronici e sono espressione della grave lesione prodotta dall'elettrodo; la loro natura irritativa è del resto dimostrata dal breve tempo durante il quale gli *spikes* positivi sono manifesti e inoltre dalla loro frequenza elevata e assai irregolare.

Più difficile è stabilire il significato degli *spikes* monofasici positivi che dalla corteccia cerebellare possono derivarsi, sia pure in scarso numero, per lungo tempo dopo il periodo irritativo iniziale (*injury discharge*) e che si succedono con ritmo regolare e raro. Fenomeni oscillatori aventi caratteristiche analoghe sono stati derivati dalla sostanza bianca degli emisferi cerebrali [Marshall <sup>(10)</sup>] e si è ritenuto che essi traggano origine da fibre nervose sezionate dall'elettrodo medesimo (*killed end recording*), la cui estremità derivante si trova nel punto stesso della sezione, punto che « never becomes a sink » [Marshall <sup>(10)</sup>; cfr. anche Amassian <sup>(9)</sup>]. Gli *spikes* monofasici positivi derivabili dalla corteccia cerebellare nel periodo successivo alla *injury discharge* non possono riguardarsi come potenziali assonici di fibre afferenti: abbiamo infatti osservato in successive ricerche <sup>(11)</sup> che essi sono manifesti in lembi di corteccia privati di ogni connessione nervosa estrinseca. Non si può in via assoluta escludere che si tratti di potenziali di assoni delle cellule di Purkinje, ma tale interpretazione ci sembra nell'insieme meno convincente <sup>(12)</sup> che attribuire agli *spikes* un'origine somatica, sul fondamento delle considerazioni che appresso esponiamo.

(11) P. CREPAX, A. NIGRO e P. L. PARMEGGIANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

(12) L'elettrodo raggiungerebbe gli assoni nel tratto compreso nello strato dei granuli, dove gli assoni stessi decorrono isolati e non raccolti in fasci. Inoltre se si trattasse di impulsi di origine purkinjana, tra la frequenza degli *spikes* monofasici negativi e quella degli *spikes* monofasici positivi dovrebbe rilevarsi una correlazione assai più stretta di quella che di fatto si rileva.



Lo *spike* positivo, quando venga derivato con elettrodi di grosse dimensioni è sempre espressione di una lesione<sup>(13)</sup> e generalmente si ammette che lesioni provocate da elettrodi di dimensioni superiori a  $4\ \mu$  siano in ogni caso troppo cospicue, perché la vitalità di una cellula non risulti compromessa in breve tempo, come appunto nel caso degli *spikes* positivi registrabili durante la *injury discharge*. È molto verosimile che nella maggior parte dei casi sia effettivamente così, ma non ci sembra che si possa escludere che un elettrodo di dimensioni superiori a  $4\ \mu$ , possa in singoli casi provocare lesioni del soma cellulare, compatibili con la sopravvivenza delle cellule. L'esistenza di tali lesioni viene considerata, per esempio, da Brookhart, Moruzzi e Snider<sup>(1)</sup> come una possibile causa dell'elevata frequenza degli *spikes* monofasici negativi, e non vi è ragione di rifiutare un'analogia spiegazione per gli *spikes* monofasici positivi. La differenza tra i due casi consisterebbe semplicemente nella posizione della punta del microelettrodo rispetto alla lesione: la negatività della deflessione sta infatti ad indicare la integrità del punto della superficie cellulare da cui il microelettrodo deriva, il che per altro non esclude che una lesione possa esistere in un altro punto (per esempio nei dendriti, il cui intreccio l'elettrodo ha attraversato per accostarsi al pirenoforo).

Si è fatto presente come in rari casi i fenomeni oscillatori derivabili dalla corteccia cerebellare assumano l'aspetto di *spikes* bifasici a fase iniziale negativa o positiva. *Spikes* bifasici a fase iniziale positiva sono stati registrati, con elettrodi di dimensioni comprese tra 1 e  $4\ \mu$ , dalla corteccia cerebrale di Gatto e di Scimmia [Amassian<sup>(10)</sup>]: la fase positiva è da riferire al fatto che la estremità dell'elettrodo attivo corrisponde a un punto della superficie del soma che è positivo rispetto alla zona di depolarizzazione provocata in un altro punto da un impulso nervoso cellulipeto, mentre la fase negativa è la conseguenza dell'estendersi della depolarizzazione al punto in cui è situata la estremità dell'elettrodo<sup>(14)</sup>. Quando l'elettrodo stesso superi un dato calibro, esso non può certo rilevare le differenze di polarizzazione esistenti nei diversi punti della superficie del soma, ma solo la condizione di totale depolarizzazione della superficie stessa. Quale sia il valore massimo del diametro dell'elettrodo che consente di registrare selettivamente il livello di polarizzazione di vari punti della superficie cellulare, non è possibile dire anche per la ragione che le dimensioni dell'elettrodo vanno considerate relativamente a quelle del soma

(13) Derivando con elettrodi assai piccoli ( $< 1\ \mu$ ), lo *spike* positivo è espressione della penetrazione della punta del microelettrodo nell'interno della cellula. Le conseguenze di tale fatto sono assai diverse secondo le cellule nervose esplorate: per esempio, la sopravvivenza è assai lunga nel caso dei motoneuroni spinali di Gatto [Brooks, Coombs e Eccles, « J. Physiol. », CXVII, 431 (1952)], mentre è invece brevissima per le cellule della corteccia cerebrale di Coniglio [Albe-Fessard e Buser, « J. Physiologie », XLV, 14 (1954)].

(14) La durata complessiva dello *spike* e l'importanza della fase negativa permettono di stabilire se l'elettrodo si trova in corrispondenza del soma e dei grossi dendriti (*spikes* brevi a fase negativa ben sviluppata) ovvero delle fini ramificazioni dendritiche [*spikes* di lunga durata e forte riduzione della fase negativa, a causa della lunga durata della depolarizzazione dei dendriti: cfr. Lloyd, « J. gen. Physiol. », XXXV, 255 (1951); Tasaki, Polley e Orrego, « J. Neurophysiol. », XVII, 454 (1954)].

neurónico esplorato e alla ricchezza di espansioni dendritiche. *Spikes* difasici a fase iniziale negativa sono riprodotti, sebbene raramente, nella iconografia che correda i lavori concernenti l'esplorazione microelettrodica di aggregati neuronici centrali [cfr. per esempio la fig. 4 del lavoro di Tasaki, Polley e Orrego <sup>(15)</sup>], ma non abbiamo trovato tentativi d'interpretazione. Il che probabilmente è da mettere in relazione con la rarità della manifestazione bioelettrica considerata, giacché sul fondamento dello schema riportato da Tasaki, Polley e Orrego <sup>(15)</sup> non è difficile prospettare il possibile meccanismo. Per esempio, si può pensare che l'elettrodo situato in corrispondenza del soma neurónico ne registri prima la depolarizzazione globale e successivamente la condizione di *source* rispetto all'assone o ai dendriti invasi dall'onda di eccitamento: la difficoltà di accettare nel nostro caso tale interpretazione, analoga a quanto si è detto riguardo agli *spikes* a fase iniziale positiva, deriva dal fatto che la possibilità di registrare selettivamente il livello di polarizzazione dei diversi punti della superficie somatica è verosimilmente limitata a microelettrodi di una ristretta gamma di dimensioni, essendo per altro difficile nei singoli casi stabilire quali siano tali dimensioni.

**Microbiologia.** — *Sulla metodologia di studio della parete cellulare dei batteri.* Nota di GIULIO BOSCO, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio V. PUNTONI.

Le ricerche compiute in questo ultimo decennio con l'ausilio di nuovi e sempre più perfezionati mezzi di indagine, hanno dimostrato nella cellula batterica una organizzazione strutturale di notevole complessità: a tale insieme di acquisizioni hanno contribuito in ugual misura ricerche a carattere morfologico, biochimico e immunitario.

In particolare appaiono di grande interesse le indagini riguardanti l'analisi chimica delle differenti strutture che concorrono a costituire la cellula batterica. Infatti, come osserva Knaysi [36], «the chief purpose of studying the composition of the cell as a whole by macrochemical means is to isolate these cellular substances and to determine their chemical nature, their molecular structure, and their other physical and chemical properties in the hope of discovering a relation between molecular properties and biological function».

Convieni a questo proposito tener presente che, se è facile avvicinarsi con i metodi correnti alla composizione chimica elementare (e cioè — per esempio — stabilire il contenuto percentuale dei lipidi, glicidi, protidi e sali minerali che si trovano nella cellula), è invece difficile fissare con esattezza la quantità, la distribuzione e la localizzazione di una specifica sostanza: «it is not often possible to determine with accuracy particular compounds

(15) J. TASAKI, E. H. POLLEY a. F. ORREGO, «J. Neurophysiol.», XVII, 454 (1954).

(\*) Nella seduta del 9 febbraio 1957.

by methods assuring the collection of the natural constituent as it occurs in the cell (Lamanna e Mallette, 38) ». In più, come opportunamente scrive Knaysi, «in the native state, molecules of the various groups may be associated into larges entities, but the methods of extraction and purification, and other chemical or physical manipulations, may separate the components of a given entity and may further cause changes in the properties of these components. Intact entities have properties which may be distinct from those of their separate components in toxicity, antigenicity, certain staining properties, and physiological activity [35] ».

In ogni modo, tanto nel caso in cui le ricerche siano orientate verso lo studio della costituzione chimica delle singole strutture, quanto invece nel caso in cui si cerchi di determinare la distribuzione di particolari sostanze nell'interno della cellula, è bene tenere presente *quanto complesso sia già di per sé il problema della metodologia da attuare per la preventiva demolizione della cellula, allo scopo di dissociare le une dalle altre quelle strutture che si vogliono poi sottoporre separatamente ad analisi chimica.*

Per tale preventivo frazionamento possono essere utilizzati diversi accorgimenti tecnici atti a determinare il dissolvimento o la rottura della cellula stessa: e tra questi principalmente *a) la lisi*: autolisi oppure lisi indotta da agenti di varia natura, quali il batteriofago, il lisozima, il complemento, la glicina [21]; *b) la rottura per via meccanica della cellula microbica*. Questo ultimo procedimento appare senz'altro preferibile, quando possa attuarsi in condizioni sperimentali tali da non determinare contemporanee alterazioni di ordine chimico (Lamanna e Mallette).

La rottura per via meccanica della cellula microbica può per esempio ottenersi: *a)* mediante schiacciamento tra due vetrini [2] o mediante macinazione [5,32] o triturazione; *b)* per azione alterna di congelamento e scongelamento, oppure con iperpressioni e brusche decompressioni [29]; *c)* per mezzo di vibrazioni meccaniche di alta frequenza (ultrasuoni); *d)* mediante lunga agitazione insieme a particelle inerti di adatta grandezza [22].

La scelta di una adeguata metodologia sperimentale ai fini dell'isolamento delle singole strutture che costituiscono la cellula batterica, trova una sua specifica indicazione nel caso della parete cellulare (cell wall), e cioè dello strato che, seguendo la schematizzazione presentemente in uso presso i cultori di citologia batterica, si trova all'esterno della membrana citoplasmatica ed è a sua volta rivestito dallo strato mucoso (slime layer).

La parete cellulare, per il cui studio dettagliato rinviamo alle trattazioni speciali, è una struttura alla quale si ritiene in buona parte dovuta la forma esterna della cellula (« the morphology of a bacterium is, to a very considerable extent, that of its cell wall », Bisset [4]): appare come un involucro, un rivestimento relativamente rigido, caratteristico per ciascuna specie microbica, nel senso che, come scrive Van Iterson, il citoplasma batterico sembra indossare un abito non fabbricato in serie, ma piuttosto confezionato su misura: « it does not seem to be dressed in a « ready-made suit »,



but in one «made to order» [46]. La parete cellulare, come si rileva dalla letteratura, è stata già da lungo tempo oggetto di approfondite ricerche in rapporto a taluni sui caratteri specifici (morfologia, colorabilità, rigidità, elasticità ecc.), mentre è ancora relativamente poco conosciuta dal punto di vista della sua composizione chimica. Contributi importanti su questo problema sono stati portati in epoca molto recente da taluni ricercatori, [33, 34, 42, 43, 41]: e sopra tutto vogliamo ricordare le accurate e ormai notissime ricerche di Salton e Horne, per le quali rinviamo ai lavori originali.

Malgrado il notevole interesse delle acquisizioni derivate da tali indagini, si deve obbiettivamente rilevare come in genere i procedimenti di estrazione e purificazione utilizzati ai fini dello studio chimico dei componenti della parete cellulare si dimostrino particolarmente indaginosi e complessi, e siano in qualche caso tali da indurre a ritenere che nelle strutture, alla fine isolate, possano anche venirsi a trovare sia sostanze non derivanti dalla parete cellulare, sia sostanze certamente provenienti da tale struttura, ma ormai divenute prodotti di degradazione e di denaturazione in seguito ai preventivi trattamenti chimici e fisici subiti dal materiale di partenza ancora prima dell'analisi chimica vera e propria.

Tra i differenti mezzi di demolizione della cellula batterica indicati in precedenza appare di grande interesse l'impiego relativamente recente delle vibrazioni ultrasonore. È stato infatti accertato come con gli ultrasuoni, utilizzati con tecnica appropriata, si possa ledere per via meccanica la cellula microbica, sia ai fini di una azione unicamente battericida, sia per ottenere — attraverso lo scompaginamento della struttura cellulare — la liberazione di antigeni, enzimi e tossine in condizioni sperimentali particolarmente favorevoli, e cioè a bassa temperatura e in assenza di sostanze estranee chimicamente attive [11, 12, 16]. In particolare va ricordato l'impiego di tali vibrazioni per la produzione dei vaccini batterici, i quali — data la tecnica di allestimento — appaiono dotati di una più fine specificità immunochimica rispetto ai vaccini ottenuti ad esempio uccidendo i microbi per mezzo dell'acido fenico o ricorrendo all'azione combinata del formolo e del calore, [6, 7, 8, 9, 10]. In più l'impiego degli ultrasuoni si rivela di notevole utilità per gli studi di citologia batterica, come recentemente con un primo gruppo di ricerche noi stessi abbiamo potuto mettere in evidenza, sia — ad esempio — in rapporto allo studio delle formazioni nucleari durante la fase esponenziale [14], sia relativamente alle indagini su talune differenze di rigidità e di resistenza della parete cellulare riscontrabili in differenti specie microbiche [13, 15, 17].

In relazione a quanto in precedenza è stato descritto [11, 15, 17] riguardo al meccanismo d'azione degli ultrasuoni sulla cellula microbica, riteniamo opportuno presentare taluni reperti di microscopia elettronica ottenuti nel corso delle dette ricerche e utilizzabili ai fini dello studio dei costituenti chimici della parete cellulare.



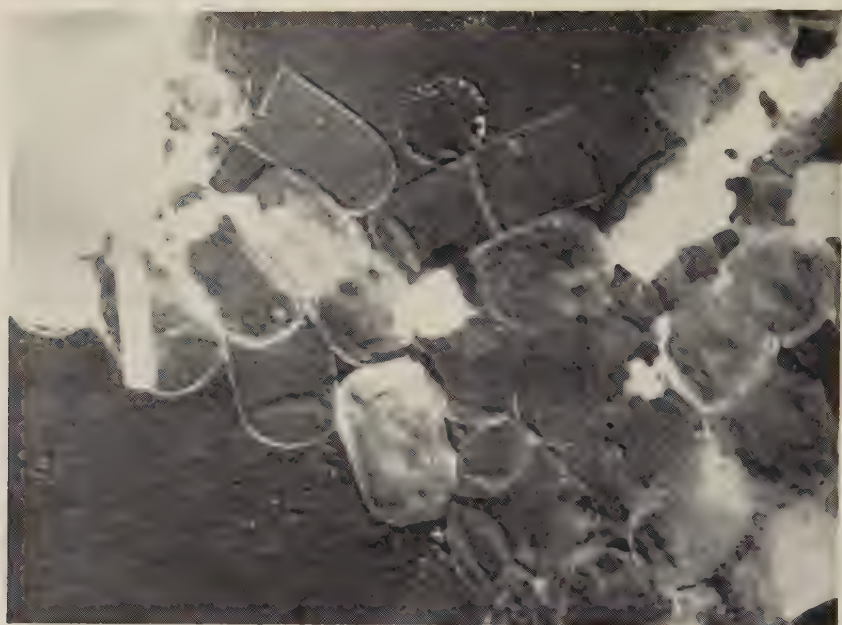


Fig. 1

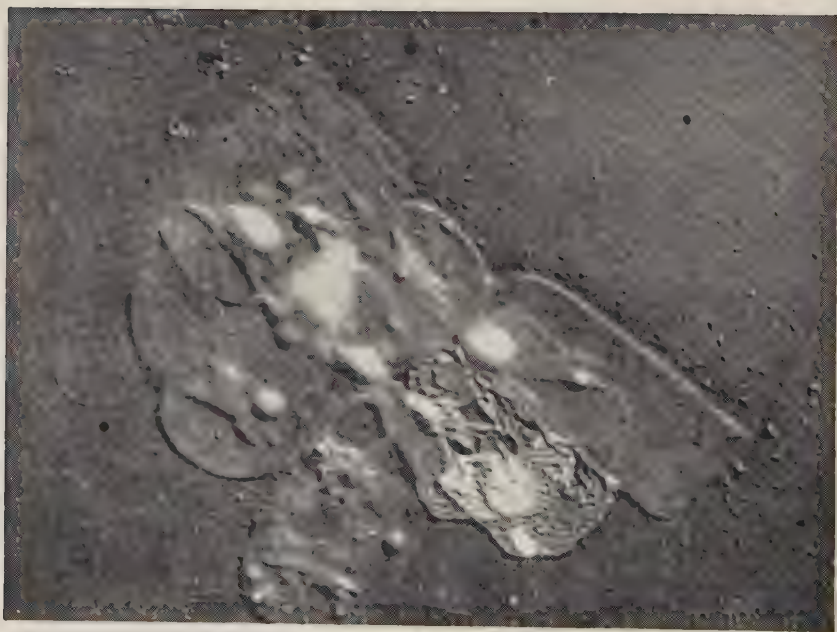


Fig. 2

Si è osservato che, facendo agire su una sospensione microbica un fascio di ultrasuoni di opportuna intensità e frequenza, si può avere una rapida azione battericida. Tale azione si esplica per via essenzialmente meccanica, in quanto nel liquido percorso dalle vibrazioni ultrasonore si verifica tra punti molto vicini un alternarsi rapidissimo di violenti urti e depressioni, con sbalzi di decine e anche centinaia di atmosfere [25]: le cellule microbiche vengono lacerate, scompaginate, frammentate. Si è anche constatato come in talune cellule si abbia la fuoriuscita totale del materiale endocellulare, residuandone soltanto la parete, simile a un sacco svuotato del suo contenuto. Tali reperti, che abbiamo documentato mediante fotografie prese al microscopio elettronico [15,17], si ottengono con trattamenti ultrasonori di grande intensità e di breve durata. Si vuole ora esaminare quello che avviene nella sospensione microbica, prolungando ulteriormente il trattamento ultrasonoro.

Per queste ricerche è stato utilizzato uno stipte di *B. mycoides* appartenente alla collezione di batteriologia dell'Istituto di Igiene e precedentemente studiato per quel che riguarda i caratteri morfologici, colturali e biochimici propri della specie. Sospensioni in soluzione fisiologica di tale stipte, coltivato per 6 ore a 37°C su agar inclinato, sono state esposte per 5 minuti, secondo le modalità già rese note nei sopra detti lavori, a vibrazioni ultrasonore ottenute nelle seguenti condizioni sperimentali: potenza 800 W, tensione 2.000 V. frequenza 400 kHz per secondo, intensità 100 mA. Alla fine del trattamento le sospensioni in esame sono state ripetutamente centrifugate, e il sedimento è stato esaminato con il microscopio elettronico. Tale sedimento appare totalmente costituito da pareti cellulari, come è bene evidente nelle figure 1 e 2 (ingrandimento rispettivamente 22.000 X e 40.000 X).

Si osserva pertanto come, attraverso un appropriato trattamento con vibrazioni ultrasonore, sia possibile ottenere rapidamente e con tecnica semplice la frammentazione delle cellule microbiche, con successivo distacco, per scuotimento, dei residui citoplasmatici rimasti eventualmente adesi alle pareti cellulari. E cioè tale trattamento meccanico – che si può agevolmente effettuare a bassa temperatura e in assenza di qualsiasi agente chimico estraneo – permette di avere a disposizione un materiale di partenza costituito da pareti cellulari già convenientemente purificate e tali pertanto da rendere più sicura la successiva analisi chimica dei loro costituenti.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BAKER J. R., « Quart. J. Micr. Sci. », 93, 157 (1952).
- [2] BENIANS T., « J. Path. Bact. », 17, 199 (1912).
- [3] BISSET K. A., *Bacterial cytology in International Review of cytology*, edited by G. H. BOURNE and J. F. DANIELLI, Acad. Press Publ., New York 1952, p. 93.
- [4] BISSET K. A., « VI Congr. Internaz. Microbiologia », Roma 1953, *Symposium of bacterial cytology*, p. 21.
- [5] BOOTH V. H., GREEN D. F., « Bioch. J. », 32, 855 (1938).
- [6] BOSCO G., « Annali di Igiene », 58, 175 (1948).
- [7] BOSCO G., « Rc. Ist. Sup. Sanità », Roma, 13, 57 (1950).

- [8] BOSCO G., «Giorn. Med. Milit.», 101, 343 (1951).
- [9] BOSCO G., «N. Ann. Ig. Microb.», 6, 116 (1955).
- [10] BOSCO G., *Considerazioni e ricerche sulla vaccino profilassi del colera*, Ed. P. Ganasini, Milano 1953.
- [11] BOSCO G., «Omnia Medica», 32, 249 (1954).
- [12] BOSCO G., «Rec. Progr. Med.», 12, 58 (1952).
- [13] BOSCO G., «N. Ann. Ig. Microb.», 5, 333 (1954).
- [14] BOSCO G., id., 6, 122 (1955).
- [15] BOSCO G., id., 5, 338 (1954).
- [16] BOSCO G., id., 6, 35 (1955).
- [17] BOSCO G., «Ingegneria Sanitaria», 2, 26 (1954).
- [18] CALIFANO L., *Lezioni di Microbiologia*, Libreria Scientifica Editrice, Napoli 1951.
- [19] CASSEL W. A., «J. Bact.», 62, 239 (1951).
- [20] CHU H. P., «Atti VI Congr. Internaz. Microbiologia», Roma 1953, vol. I, p. 179.
- [21] COWLES P. B., «Yale J. Biol. Med.», 19, 835 (1947).
- [22] CURRAN H. R. e coll., «J. Bact.», 43, 125 (1942).
- [23] CUTINELLI C., «Riv. I.S.I.», 29, 1 (1954).
- [24] DI MACCO G., «Arch. It. Med. Sper.», 2, 66 (1938).
- [25] DOGNON A., *Les ultrasons et leur applications* Presses Universitaires de France, Paris 1953.
- [26] DUBOS R. J., *The bacterial cell*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1955.
- [27] DUGUID J. P., «J. Path. Bact.», 60, 265 (1948).
- [28] DYAR M. T., «J. Bact.», 53, 498 (1947).
- [29] FRASER D., «Nature», 167, 33 (1951).
- [30] GALE E. F., *The chemical activities of bacteria*, Academic Press, N. Y. 1952.
- [31] GOOD M. G., «Atti VI Congr. Internaz. Microbiologia», Roma 1953, vol. I, p. 69.
- [32] HEDEN C. G., «Science», 113, 181 (1951).
- [33] HOLDSWORTH E. S., «Bioch. et Biophys. Acta», 8, 110 (1952) e 9, 19 (1952).
- [34] HURST H., «J. exp. Biol.», 29, 30 (1952).
- [35] KNAYSI G., *Chemistry of bacterial cell e Structure of the bacterial cell* in Bacterial physiology edited by C. H. WERKMAN e P. H. WILSON, Academic Press, N. Y. 1951.
- [36] KNAYSI G., *Elements of bacterial cytology*, Comstock Publ., Ithaca N. Y. 1951.
- [37] KNAYSI G., «Atti VI Congr. Internaz. Microbiologia», Roma 1953, vol. I, p. 65.
- [38] LAMANNA C., MALLETTE M. F., *Basic Bacteriology* Williams and Wilkins Co., Baltimore (1953).
- [39] LEWIS I. M., «Bact. Rev.», 5, 181 (1941).
- [40] MUDD S. e coll., «J. Bact.», 42, 251 (1941).
- [41] ROBINOW C. F. e coll., «Exp. Cell. Res.», 4, 390 (1953).
- [42] SALTON M. R. J., HORNE R. W., «Bioch. Biophys. Acta», 7, 177 (1951).
- [43] SALTON M. R. J., «Bioch. Biophys. Acta», 9, 334 (1952) e 19, 512 (1953).
- [44] SCANGA F., *La cellula batterica*, Ed. Pensiero Scientifico, Roma, 1954.
- [45] STANIER R. Y., *Some singular features of bacteria as dynamic systems* in Cellular metabolism and infections edited by E. RACKER, Academic Press, N. Y. 1954.
- [46] VAN ITERSON W., «VI Congr. Internaz. Microbiologia», Roma 1953, *Symposium of bacterial cytology*, p. 21.

**Biologia.** — *Bulinus (Physopsis) abyssinicus, ospite intermedio di Schistosoma haematobium in Somalia. Ricostruzione del ciclo di vita del parassita*<sup>(\*)</sup>. Nota di ENZO SOBRERO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio V. PUNTONI.

Le ricerche di Lipparoni <sup>(1)</sup> e Pellegrini <sup>(2)</sup> sulla schistosomiasi umana vescicale e bovina, compiute in collaborazione con l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma rispettivamente nelle regioni del Medio Uebi-Scebeli e del Giuba, sono le prime che indichino la presenza in quei fiumi di *Bulinus (Physopsis) abyssinicus*, quale unico mollusco appartenente a genere capace di trasmettere la schistosomiasi vescicale (*S. haematobium*) e animale (*S. bovis*).

Persuasi quindi che tale mollusco fosse il vettore delle schistosomiasi somale abbiamo, durante questi anni, proseguito le ricerche raccogliendo *Bulinus abyssinicus* e inviandoli vivi all'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma, nella speranza di ritrovare furcocercarie di schistosomi di mammiferi.

Le nostre raccolte sono state compiute nelle acque vicine a villaggi nei quali erano stati accertati casi di bilarziosi vescicale umana: precisamente a Eso, sulla destra del fiume Uebi-Scebeli, nell'azienda agricola del signor Lazero, ove era colpito di schistosomiasi vescicale il signor Anan Elio; sulla riva sinistra del fiume a Goluen, nell'azienda Pola, ove contrassero la malattia il signor Grella Ettore e numerosi somali; quindi a Genale, ove la schistosomiasi vescicale è presente in una alta percentuale della popolazione.

I molluschi *Bulinus (Physopsis) abyssinicus*, si trovavano soprattutto nelle acque limpide e non movimentate di infiltrazione dai bacini e dai canali di irrigazione ed era possibile vederli muovere nel fondo o aderenti a piante acquatiche o detriti vegetali, sia sommersi, sia galleggianti. (Figg. 1 e 2).

#### DIMOSTRAZIONE DELLE CERCARIE.

Poiché i vari sistemi comunemente raccomandati per ottenere cercarie da molluschi (esposizione alla luce solare, prova di scarti improvvisi della temperatura da 39°C a 28°C, riscaldamento del liquido ecc.) non avevano

(\*) Lavoro eseguito sotto la Direzione dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma (Direttore Prof. E. Biocca).

(\*\*) Nella seduta del 9 marzo 1957.

(1) E. LIPPARONI, *Presenza del « Bulinus abyssinicus »* (v. Martens) *nella zona del medio Uebi-Scebeli e rilievi sul suo habitat locale*, « Riv. Parass. », 13, 309-314, (1952).

(2) D. PELLEGRINI, *Alcune osservazioni sulla schistosomiasi bovina in Somalia e segnalazione del « Bulinus abyssinicus » nella regione del basso Giuba*, « Riv. Parass. », 14, 15-17, (1953).



dato risultati soddisfacenti, abbiamo proceduto al metodo dello schiacciamento del mollusco tra vetrini. Con questo semplicissimo metodo, ci è stato così possibile mettere in evidenza per la prima volta *Bulinus abyssinicus* infestati con furcocercarie di schistosomi. Le osservazioni positive si sono ripetute il giorno 3, 10, 30 dicembre 1956 da molluschi catturati sia a Genale che a Goluen e ancora il 5 e 8 gennaio 1957.

*Morfologia delle cercarie.* - Le cercarie, mobilissime, sopravvivevano alcune ore nell'acqua a temperatura ambiente (non oltre le 12 ore). Avevano corpo allungato, ventosa anteriore e ventrale munite di minute spine, coda bifida: nel corpo erano ben visibili le 5 paia di cellule di penetrazione. Le cellule a fiamma non sono state studiate (fig. 3).

Le misurazioni, eseguite su numerosi esemplari, uccisi in alcool a 70° C hanno dato i seguenti risultati medi espressi in micron:

corpo lungo . . . . .	150
largo . . . . .	59
coda totale . . . . .	233
ramo delle forche . . . . .	62
larghezza coda . . . . .	28

*Infestazione sperimentale di mammiferi.* - Numerosi lotti di animali (topini, cavia, conigli, ovini, ecc.) sono stati parzialmente immersi per 30' in acqua contenente furcocercarie ottenute da *Bulinus abyssinicus*.

Dopo 2 mesi è stato sacrificato il primo lotto di 5 topini. È stato così possibile raccogliere dalle vene mesenteriche di detti animali 11 femmine e 6 maschi del genere *Schistosoma*.

I caratteri del tegumento e della ventosa corrispondevano a quanto descritto per *S. haematobium*. La lunghezza oscillava, per i maschi tra 4,9-9 mm e per le femmine tra 6,55-6,5 mm; nelle femmine l'ovaio si trovava spostato verso il terzo posteriore del corpo (distanza dall'estremità anteriore mm 4,1-4,3), le uova, numerose nell'utero, disposte l'una dietro l'altra (fig. 4) di  $22-30 \times 52-78 \mu$ , avevano il caratteristico aculeo terminale; il cieco unico, risultante dalla fusione dei due ciechi subito dietro all'ovaio, misurava circa un quarto della lunghezza del corpo della femmina.

In Somalia esiste ed è diffuso, oltre a *S. haematobium*, anche *S. bovis* per cui potrebbe supporre che il parassita da noi ottenuto in infestazioni sperimentali possa esser *S. bovis* e non *S. haematobium*; è conosciuta infatti la grande somiglianza tra le due specie, sia nella morfologia che nel ciclo di vita, che in genere si compie nelle stesse specie di molluschi.

Soprattutto la forma delle uova, la posizione dell'ovaio, la lunghezza del cieco unico ci sembrano elementi differenziali sufficienti per permettere l'identificazione del parassita come *Schistosoma haematobium*.



Fig. 1. – Habitat del mollusco, *Bulinus (Physopsis) abyssinicus*.

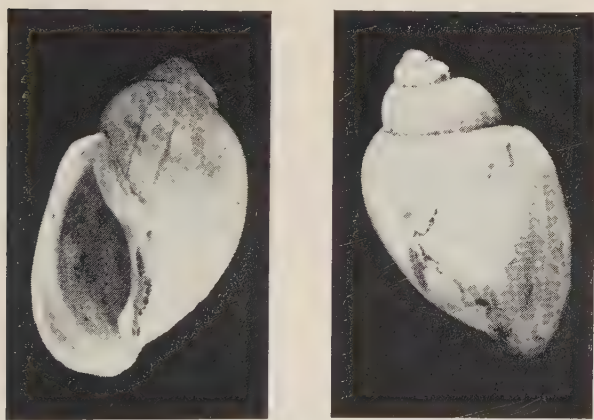


Fig. 2. — *Bulinus (Physopsis) abyssinicus*.



Fig. 4. - Estremità anteriore di *Schistosoma-haematobium* - (infestazione  
sperimentale in topino).

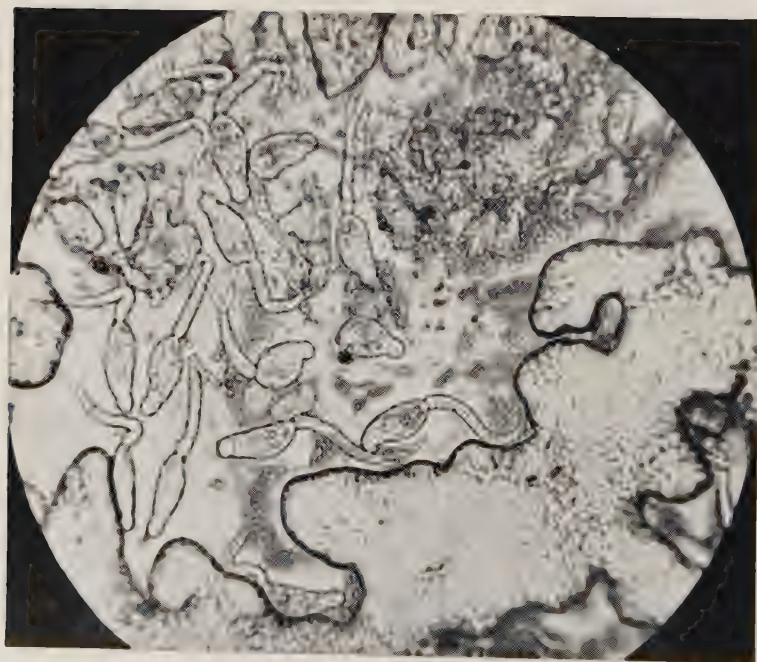


Fig. 5. - Estremità anteriore di *Schistosoma*.



**Biologia.** (Microbiologia). — *Sull'azione citopatogena della tossina difterica, studiata per mezzo delle colture di tessuti « in vitro »* (\*).  
Nota di GIUSEPPE PENSO e GIUSEPPE VICARI, presentata (\*\*) dal  
Corrisp. D. MAROTTA.

La tossina difterica — come abbiamo già esposto preliminarmente in una precedente seduta — esercita azione citopatogena sulle colture di tessuti.

Tale azione è stata saggiata su colture di cellule di fegato umano (ceppo Chang), su cellule di rene di scimmia, su cellule di rene umano, su cellule di carcinoma buccale (ceppo K. B.).

Lo studio completo del fenomeno lo abbiamo condotto su cellule tripsinizzate di fegato umano, di derivazione unicellulare e costituite da elementi epiteliali.

#### TECNICHE IMPIEGATE.

Le cellule sono state coltivate nel seguente terreno:

Soluzione salina di Hanks . . . . .	parti	65
Idrolizzato di lattealbumina al 5 % . . . . .	»	10
Siero di cavallo scomplementato . . . . .	»	20
Siero umano . . . . .	»	5

All'inizio di ogni esperienza noi prendevamo una fiasca di coltura di cellule, eliminavamo il terreno di coltura, e raccoglievamo, per mezzo di una soluzione di tripsina allo 0,25 %, le cellule rimaste aderenti sul vetro. Agitata leggermente la fiasca, onde ottenere una buona sospensione cellulare, raccoglievamo il liquido e lo centrifugavamo a bassa velocità (750 giri per minuto) per un minuto. La massa cellulare veniva raccolta e sospesa nel terreno di cui sopra nella quantità di 5 mm<sup>3</sup> per 100 cm<sup>3</sup> di liquido. Con questa sospensione si preparava una serie di provette nelle quali doveva aver luogo l'esperienza. In ogni provetta immettevamo 0,5 cm<sup>3</sup> di sospensione cellulare. Le provette, accuratamente chiuse con appropriati tappi di gomma, venivano poste ad incubare a 37°C. Dopo 48 ore, si controllava lo sviluppo cellulare e si sceglievano le provette in cui le cellule avevano formato uno strato continuo d'aspetto florido. Tutte le provette con scarso sviluppo, o contenenti cellule di aspetto comunque dubbio, venivano eliminate.

Le provette prescelte venivano vuotate del liquido di coltura, e il contenuto cellulare, rimasto aderente sulle pareti, veniva lavato due volte con soluzione di Hanks, onde eliminare anche le tracce di siero umano presente

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.



nel terreno di coltura. Alle provette si aggiungeva - nella quantità di  $\text{cm}^3$  1,5 per provetta - il terreno di mantenimento così composto:

Soluzione di Hanks . . . . .	parti	85
Idrolizzato di lattealbumina al 5 % . . . . .	»	5
Siero di cavallo scomplementato . . . . .	»	10

A questo punto noi aggiungevamo la tossina difterica onde saggiarne l'eventuale potere citopatogeno.

Le nostre esperienze sono state condotte con una tossina difterica liquida I.S.T. la cui d.m.l. per le cavie era di  $\text{cm}^3$  0.0040, mentre il limite croce (L +) era di  $\text{cm}^3$  0.040. Nella tossina era presente, a titolo conservativo, chinosol allo 0,5 % <sup>(1)</sup>.

La tossina difterica impiegata veniva diluita in soluzione di Hanks, e tale diluizione veniva aggiunta nella quantità di  $\text{cm}^3$  0,5 alle varie provette di coltura. Le diluizioni venivano fatte in maniera tale da ottenere, per ogni mezzo centimetro cubo, un numero noto di dosi letali minime di tossina.

Per ogni esperienza, venivano impiegati in media sei tubi di cellule per ogni diluizione approntata.

Le letture venivano effettuate dopo 24, 48 e 72 ore dall'aggiunta della tossina.

#### RISULTATI OTTENUTI.

Le cellule delle colture di tessuto in cui sia stata aggiunta una o più d.m.l. di tossina difterica vanno incontro a fenomeni di sofferenza soltanto dopo un certo periodo d'incubazione compreso tra le 24 ore e le 48 ore. Naturalmente più la dose di tossina è alta, più precoce sarà l'insorgenza delle manifestazioni citopatologiche; in ogni modo soltanto con quantità di tossina comprese tra 10 e 100 d.m.l. è possibile ottenere segni evidenti di sofferenza delle cellule già verso la ventiquattresima ora.

La sofferenza delle cellule si manifesta macroscopicamente con fenomeni di degenerazione e con un lento e continuo distacco, dalla parete di adesione, delle cellule sofferenti.

Lo studio istopatologico delle cellule trattate con tossina difterica dà ragguagli molto più precisi e completi sull'azione di questa sulle cellule in coltura.

Tali alterazioni riguardano la coltura nel suo insieme e le singole cellule.

La coltura globalmente considerata, presenta una rarefazione numerica delle cellule che la compongono, rarefazione visibile sia a fresco che nei

(1) Onde assicurarsi che il chinosol non avesse di per sé alcuna azione sulle cellule in coltura abbiamo eseguito la seguente esperienza collaterale: al terreno di mantenimento di cui sopra abbiamo aggiunto lo 0,5 % di chinosol e con esse abbiamo ricoperto il tessuto in coltura; abbiamo così constatato come le cellule seguitassero a svilupparsi normalmente senza subire alcuna alterazione di ordine qualitativo o quantitativo.

preparati colorati e che sarà tanto maggiore quanto più forte sarà la carica di tossina adoperata.

Le lesioni cellulari sono di tipo e grado diverso, tutte a carattere regressivo: esse si iniziano con il blocco dell'attività moltiplicativa delle cellule che, appena passato il periodo d'incubazione, non presentano più nuclei in cariocinesi; segue una vacuolizzazione più o meno intensa del citoplasma in gran parte dovuta a fenomeni di steatosi, rivelabili chiaramente con le apposite colorazioni per i grassi; per arrivare fino all'atrofia e alla necrosi, giacché le cellule così alterate si distaccano dalla parete di adesione, cadono nel liquido di coltura e sono eliminate con esso.

I nuclei, oltre a cessare le proprie attività moltiplicative, vanno incontro a fatti picnotici; e lo stato di sofferenza dei nuclei è facilmente rivelabile con la colorazione di Shorr che, com'è noto, colora in verde i nuclei sani, e in viola e in rosso quelli in diverso grado di sofferenza.

L'azione citopatogena della tossina difterica sulle cellule in coltura si manifesta quindi — dopo un periodo d'incubazione di 24 ore circa — con la seguente sequela di lesioni patologiche: blocco dell'attività cariocinetica dei nuclei, degenerazione vacuolare e grassa del citoplasma delle cellule colpite, loro necrosi sino all'annientamento più o meno completo dell'intera coltura.

---

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Socio Puntoni che rievoca la figura e l'opera del compianto Collega Dante De Blasi.

Alla commemorazione, che ha luogo nella sala della Biblioteca accademica, assistono la famiglia De Blasi e un folto pubblico di Soci, di professori della Facoltà di Medicina dell'Università di Roma, di amici e di discepoli del Maestro scomparso.

Numerose le adesioni pervenute, tra le quali una dell'Ordine dei Medici.

Il Presidente ringrazia il prof. Puntoni per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del Socio De Blasi l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'insigne e caro Collega.

Il Presidente comunica quindi alla Classe la dolorosa notizia della perdita del Socio Nazionale Nello Beccari, della Categoria V, Sezione Zoologia, morto il 20 marzo c. a., del Socio Nazionale Modesto Panetti, della Categoria I, Sezione Meccanica, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, spentosi il 26 dello stesso mese di marzo, e del Socio straniero Norman Bowen, della IV Categoria, di cui si ignora la data esatta del decesso.

Alla memoria dei tre illustri scienziati scomparsi, il Presidente invia un reverente ed affettuoso pensiero d'omaggio.

Il Socio Pensa, che fu legato al Beccari da profondi vincoli di amicizia, sente il dovere di associarsi al Presidente, ricordando i preziosi contributi dati alla scienza dal compianto Collega, il quale, cresciuto alla scuola di

Firenze di Giulio Chiarugi, si dedicò per breve tempo all'anatomia umana, passando, poi, a quella comparata, della quale fu uno dei più illustri cultori, creando un Istituto che è divenuto un fervido centro di studi morfologici e biologici. Al Beccari si devono numerosi ed importanti risultati, in particolare sul sistema nervoso e, tra le altre opere, un eccellente Trattato di anatomia comparata. La scomparsa di un così valoroso scienziato costituisce un grave lutto per la scienza italiana, per l'Accademia e per la Società Italiana di Anatomia, che ebbe nel Beccari uno dei suoi più valenti collaboratori.

Il Presidente ringrazia il Socio Pensa e invita i Colleghi della Categoria V a prendere accordi per commemorare il prof. Beccari in una delle sedute di Classe del prossimo anno.

Il Socio Cotronei è d'avviso che la commemorazione del Collega Beccari debba essere senz'altro affidata o al prof. G. Levi o al prof. Pensa.

Il Socio Pensa si riserva di dare una risposta dopo aver sentito il Collega G. Levi.

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che sono usciti i fascicoli dei Rendiconti del gennaio e del febbraio c. a. ed è ben lieto che il ritmo degli Atti abbia ripreso quella regolarità che ha sempre caratterizzato le pubblicazioni accademiche e che, in questi ultimi mesi, aveva subito, per cause varie, un rallentamento. Di tale ripresa va data ampia lode ai solerti Segretari accademici, Soci Signorini e Cotronei.

Il prof. Giordani dà quindi notizia del programma dei lavori della Conferenza internazionale per la disciplina dell'uso del radar nella navigazione marittima, che si svolgerà a Genova dal 16 al 19 maggio p. v. e del testo di un appello, indirizzato da alcuni fisici giapponesi ai colleghi britannici, contro l'uso della bomba all'idrogeno e inviato, per conoscenza, all'Accademia.

La Classe delibera di proporre alla Presidenza di inviare un messaggio di adesione e il Presidente assicura che provvederà in merito.

### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci: Sansone, Carobbi, Tonzig, Pensa, Cotronei, Signorini (a nome anche del Collega Piccone), Puntoni, Natta, Silva, Quilico, Cambi, Giacomello, Severi (a nome anche del Collega Segre), Pupilli, Armellini e Giordani.

Il Socio Majorana presenta una Nota dal titolo «Sull'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale» e la illustra ampiamente, confermando la sua convinzione, già più volte espressa in lavori precedentemente pubblicati negli Atti dell'Accademia, sulla inconsistenza delle teorie relativistiche e osservando che, dopo circa quarant'anni di ricerche sperimentali, i primi dubbi da lui avuti sulla attendibilità della dottrina di Einstein hanno acquistato ora

carattere di completa certezza. Il predetto Socio ricorda di avere sempre informato l'Accademia dei risultati della sua attività scientifica, dalla prima Nota presentata nel lontano 1894, a quelle scritte nell'ultimo decennio sulla questione della relatività, e, mentre si propone di continuare il suo lavoro, grazie alla cortesia e alla ospitalità dell'amico prof. Gori, Direttore dell'Istituto delle Telecomunicazioni, confida che i Colleghi, i quali finora non hanno mai confutato le sue asserzioni, vogliano ripetere, controllare e completare le esperienze da lui effettuate. Soltanto così si potrà superare la crisi della fisica moderna e conseguire reali progressi nella scienza.

Il predetto Socio presenta poi una seconda Nota dal titolo « Ipotetiche conseguenze dell'assorbimento gravitazionale », nella quale sono esposte appunto delle conseguenze di carattere astronomico a cui darebbe luogo l'ipotesi illustrata nella prima Nota.

Il Socio Severi, riferendosi alla comunicazione del prof. Majorana, premette che non gli è giammai avvenuto di parlare innanzi all'Accademia con una preoccupazione così viva come quella che ora lo domina, per la situazione delicata in cui trovasi a dover rispondere al Collega ed amico Majorana. Si sarebbe volentieri sottratto a tale compito se, contro la sua volontà e le sue intenzioni, non fosse stato coinvolto in una polemica giornalistica sulla inconsistenza della relatività, affermata dal Majorana.

Ma siccome il Collega ha affermato e confermato anche poco fa che nessuno degli scienziati relativisti ha dimostrato sinora l'infondatezza delle sue tesi, è sembrato al Socio Severi che gli corresse l'obbligo di rispondere all'Amico per la parte riguardante l'aspetto matematico della questione. Dichiarò che, se le parole che pronuncerà non sembreranno a Majorana sufficientemente amichevoli, affettuose e rispettose, ciò significherà ch'esse non avranno bene interpretato i sentimenti che animano l'oratore, il quale sente il dovere di affermare che tutti indistintamente debbono il massimo rispetto a Quirino Majorana, collega carissimo e fisico eminente, che ha al suo attivo risultati d'osservazione e di sperimentazione quali pochi altri possono vantare.

Per quanto riguarda l'affermazione del Majorana, circa la mancata confutazione delle sue conclusioni contro l'attendibilità della teoria relativistica, il Socio Severi afferma che questo non significa punto che tali conclusioni siano da accettarsi quali esatte. Anzitutto, è necessario avere pazienza e attendere che i risultati pubblicati diano luogo nel tempo ad un giudizio intelligente, che oggi o domani non potrà mancare, da parte dei competenti. Ma la mancata risposta può essere altresì dovuta ad un senso di rispetto verso colui che si dovrebbe confutare, oppure, come nel caso personale del prof. Severi, nei confronti con il Majorana, all'impossibilità di comprendere certe affermazioni di quest'ultimo. Ad esempio quelle contenute in un paragrafo, dedicato alla relatività speciale di Einstein, della Nota del prof. Majorana, pubblicata nel fascicolo 1-2, 2° sem. 1956, dei Rendiconti fisico-matematici dell'Accademia.

D'altronde, intervenendo nella polemica giornalistica ricordata, il Socio Severi dichiarò subito di non parlare che come matematico, essendo soltanto



sotto quest'aspetto che egli crede di poter pronunciare giudizi fondati. Ai fisici e agli astronomi spetterà, se lo stimeranno opportuno, di intervenire nei riguardi dell'osservazione e dell'esperienza.

Qual'è dunque l'atteggiamento che può assumere un matematico di fronte alla relatività? La conoscenza umana si appoggia sempre, perfino in matematica (soltanto però, in questa scienza; nei riguardi dei primi principi), a due pilastri: la ragione e l'esperienza. Il Socio Severi quale matematico vuol riferirsi soltanto al primo dei due aspetti. In proposito egli ha già risposto pubblicamente al Majorana che, dal punto di vista logico-matematico la teoria della relatività è ineccepibile. Nei riguardi dell'aspetto fisico, per quanto egli non sia tenuto a rispondere su ciò al Majorana, tuttavia, come uomo di cultura matematico-fisica, afferma che non gli consta che si conoscano oggi risultati sperimentali tali da giustificare l'asserzione che la teoria della relatività debba essere abbandonata, come priva di base scientifica. Al contrario, le più recenti osservazioni astronomiche e specialmente dell'eclisse solare del 1955, ne hanno confermato pienamente la validità, accertando che la deflessione dei raggi luminosi passanti nelle vicinanze del sole si verifica nei limiti stessi previsti dalla teoria di Einstein. Lo stesso accadde molti anni or sono, in seguito all'osservazione di altre eclissi solari, avvenuta sotto gli auspici della Royal Society di Londra. Questi risultati permisero allora a J. J. Thompson di affermare solennemente in una seduta che fece epoca che l'osservazione aveva confermato, entro i limiti degli errori sperimentali, le previsioni ricavate a tavolino da Einstein, quali conseguenze della teoria della relatività generale. Come è noto al Majorana, esistono altre ben conosciute conferme sperimentali.

Non sembra inoltre allo stato delle cose, che ci siano, sia pure nella fisica del microcosmo, contraddizioni sperimentali di rilievo con la relatività, all'infuori d'incongruenze che si verificano del resto anche rispetto al terreno classico non relativistico e che hanno costretto a riconoscere senso e validità al principio di indeterminazione. L'amico Majorana sa inoltre, che applicando il punto di vista relativistico al microcosmo, Dirac scoprì colla punta della penna l'elettrone positivo, prima che la sua esistenza fosse sperimentalmente accertata.

Il Socio Majorana ha aggiunto però che se si ammette, come fa il Severi, che allo stato delle nostre conoscenze la relatività è oggi vera, ma che potrebbe domani non esserlo più, tale ammissione viene a riconoscere implicitamente l'inconsistenza scientifica della teoria. Su questo punto, il Severi conferma l'asserzione, riferita dal Majorana, ma dichiara di non riuscir a capire che cosa intenda il contraddittore.

*Una teoria può invero essere logicamente perfetta rispetto all'insieme dei fatti conosciuti, e tuttavia può venire smentita da esperienze non ancora conosciute, senza che per questo ne sia intaccata la consistenza logica.*

Quando noi ragioniamo in modo logicamente ineccepibile a partire da certi principi dedotti per astrazione più o meno riposta dalla realtà, e deduciamo talune conseguenze, queste sono assolutamente d'accordo *soltanto*

con la *parte* di realtà conosciuta, ma non con *tutta* la realtà. È un'asserzione che mi sembra banale. In ogni stadio della scienza, noi conosciamo invero soltanto minuscole zone di realtà e le conosciamo attraverso una nostra rappresentazione intellettuale delle medesime. È e sarà sempre così: se così non fosse, ogni uomo diverrebbe un Creatore. È evidente che quanto è compatibile con una *parte* della realtà non è necessariamente compatibile con *tutta* la realtà. Una sentenza di tribunale può essere logicamente perfetta in relazione ai fatti conosciuti e alle testimonianze raccolte; ma domani può crollare per nuovi fatti appurati. Allora essa diventa ingiusta, rispetto alla nuova verità, ma resta perfettamente logica rispetto all'antica.

Ogni teoria scientifica è sempre sotto la spada di Damocle di fatti nuovi che la possono contraddire. Insomma, ripetiamolo, ancora, ogni teoria ha carattere transitorio, legata com'è al complesso delle conoscenze e dei dati sperimentali del momento.

L'oratore aggiunge: Il Collega Majorana ha ben ragione di ricordare la mia affermazione che se la coincidenza spazio-temporale nella teoria relativistica non fosse un assoluto per tutti gli osservatori, la teoria stessa sarebbe un innegabile assurdo. Ma gli è che quest'assurdo non investe la relatività, perchè di fatto la coincidenza spazio-temporale (l'ho detto esplicitamente tante volte!) è proprio un assoluto anche in relatività. Ciò significa insomma che, se rispetto a un osservatore due fenomeni avvengono nello stesso luogo e nello stesso tempo, egualmente essi presentansi come cospaziali e contemporanei rispetto a qualsiasi altro osservatore. Quand'è che la relatività ha affermato qualcosa di diverso?

Il Socio Severi ricorda di aver esposto in una Nota Lincea del 1925 la riduzione della relatività ristretta a pochi postulati di mero carattere cinematico, corrispondenti al senso comune della meccanica classica. Poiché appunto tali postulati sono validi tanto nella meccanica classica quanto nella relativistica, è evidente che quest'ultima non può essere contraddittoria; se può costruirsi sugli stessi principi (salvo l'accertamento sperimentale che subito dirà) su cui si fonda la meccanica classica.

Da quei principi si deduce in verità non la pura trasformazione di Galileo (col suo tempo assoluto), ma se ne deduce invece una trasformazione tipo Lorentz (comprendente come caso particolare quella di Galileo) in cui interviene una velocità costante rispetto a tutti gli osservatori. Si tratta di dedurre sperimentalmente il valore di questa velocità. Se tale valore è infinito, si cade nella meccanica classica, con il tempo assoluto; se invece quel valore è finito (positivo) si cade nella meccanica relativistica e nella relatività del tempo. Tutto ciò deducesi, come ho detto, nell'ambito dei soli postulati cinematici nei quali intervengono soltanto i concetti di spazio e tempo e non alcuna forma di energia: per esempio la luce. Anzi è da ricordare che l'intervento intempestivo della velocità della luce rese imperfette, dal punto di vista logico, talune delle prime esposizioni della relatività. Questo, amico Majorana (aggiunge il Socio Severi) come tu sai, io l'ho scritto più volte. Se poi oltre alle nozioni cinematiche si fanno intervenire altre conoscenze

fisiche, si conclude che la costante di cui sopra non è che la velocità della luce. Si sbocca così nel secondo principio della relatività, che fisici e filosofi non relativisti considerano assurdo e incompatibile col primo principio. Invece la incompatibilità non esiste, perchè sia il primo che il secondo principio possono dedursi (come ho mostrato) dagli stessi postulati, i quali sboccano soltanto in possibilità alternative, la cui scelta è rimessa ai fatti.

Il Socio Severi dichiara infine di non voler discutere l'aspetto fisico-astronomico della teoria gravitazionale di Majorana. Questo compito spetterà se mai ad altri. Egli vuol soltanto osservare che Majorana è molto lontano in questi tentativi di nuove teorie dall'indirizzo della fisica d'oggi, la quale si preoccupa soltanto delle misure e dei loro rapporti iniziali e finali e non delle spiegazioni « sostanziali » o « aristoteliche » dei fenomeni. Sul che però l'oratore non è completamente d'accordo; perchè le spiegazioni sono utili, come immagini intuitive dei fatti, anche se non sono nè possono essere verità assolute.

Concludendo il Socio Severi afferma di non essere mai stato uno strenuo difensore della dottrina einsteiniana, come di qualunque altra teoria, perchè ogni teoria ha valore provvisorio. Nella propria lunga vita egli ha conosciuto infatti molte teorie crollate davanti ai fatti; ma non sa di nessun fatto che sia crollato di fronte alle teorie. Così potrebbe accadere che la relatività crolli di fronte a nuovi elementi sperimentali. Egli è perciò convinto della necessità di accettare la teoria come se fosse assolutamente vera finché esperienze future non avranno dato risultati definitivi in contrario. Così è o dovrebbe essere di tutta la scienza. Si augura che la fervida attività dell'amico Majorana possa essere coronata da definitivo successo, in quanto lo conduca all'esperimento cruciale antirelativistico ch'egli ricerca.

Il Socio Majorana ringrazia il Collega Severi per le affettuose parole che ha usato nei suoi confronti e riconferma il proposito di continuare le proprie ricerche sperimentali, non avendo per ora ragione di mutare il suo avviso.

Il Presidente Giordani rivolge un vivo ringraziamento ai Soci Majorana e Severi per le loro interessanti comunicazioni e pel tono elevato della discussione. È lieto inoltre di esprimere i migliori voti augurali della Classe e suoi personali al Collega Severi, del quale ricorre oggi il compleanno.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CASASCO E. - Sulla innervazione recettiva e vegetativa del labirinto membranoso dell'apparato acustico dei teleostei (pres. dal Socio A. PENSA).

CORRADINI P. - Sulla struttura cristallina del succinilsuccinato di metile (pres. dal Socio G. NATTA).

CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L. - Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di impulsi tattili e propriocettivi ovvero di variazioni del livello pressorio (pres. dal Socio G. C. PUPILLI).

FORTINI T. e CAPRIOLI G. - Variazione del centro al lembo del Sole del profilo del tripletto del magnesio ( $= 5167,3$ ;  $= 5172,8$ ;  $= 5183,7$ ). Nota II (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

HAIMOVICI A. - Una generalizzazione del metodo di Fourier per la risoluzione di alcuni problemi ai limiti (pres. dal Socio M. PICONE).

MARRÈ E. e ARRIGONI O. - Interazione tra glutatione e auxina nello stimolo della crescita (pres. dal Socio S. TONZIG).

MERLI L. - Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale  $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$  (pres. dal Socio G. SANSONE).

PALUMBI G. - Ulteriori dati sulla innervazione vegetativa della sostanza nervosa cerebrale (pres. dal Socio A. PENSA).

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Severi presenta il volume II dell'opera del Collega Beniamino Segre, dal titolo: «Forme differenziali e loro integrali», edito dall'Istituto Nazionale di Alta Matematica. Il presente volume tratta degli aspetti topologici delle questioni in grande sulle forme differenziali e relativi integrali.

Il Socio Severi, dopo avere inviato un affettuoso pensiero di saluto e di augurio al prof. Segre, attualmente convalescente in clinica in seguito ad una operazione chirurgica, ricorda che il professore stesso è fra i viventi il suo allievo prediletto. È particolarmente lieto di presentare quest'opera che si riallaccia al pensiero geometrico e algebrico caratterizzante la fervida attività di tutta la fiorente scuola italiana, cui il Socio Severi si onora di appartenere, la quale fa capo nell'ultima fase del secolo XIX e nei primordi del XX a Guido Castelnuovo e a Federico Enriques.

Il volume del Collega Segre è ricco d'importanti risultati anche originali e fa intravedere notevoli conseguenze per l'analisi e, soprattutto, per la topologia. Esso occuperà un degno posto accanto a quelli dei Corsi precedenti tenuti dal prof. Segre presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica.

Il Presidente Giordani ringrazia il Socio Severi e assicura che invierà al Collega Segre un messaggio d'augurio, a nome della intera Classe.

Il Segretario Accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia.



## PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

### ELENCO DEI CONCORRENTI

#### ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE PER LA «CHIMICA» PER IL 1957

(Scadenza 31 dicembre 1956 - Premio lire 1.000.000).

**I. MALATESTA Prof. LAMBERTO.** — 1. « Il momento elettrico degli xantogenati e dei ditiocarbammati », Nota II. — 2. « Il momento elettrico degli xantogenati e dei ditiocarbammati », Nota III. — 3. « Sul momento elettrico dei composti organometallici », Nota I. — 4. « Il momento elettrico dei composti metallorganici », Nota II. — 5. « Sul momento elettrico dei composti metallorganici », Nota III. — 6. « Sul momento elettrico dei composti metallorganici », Nota IV. — 7. « Il momento elettrico dei composti metallorganici », Nota V. — 8. « Su un preteso complesso del nichelio trivalente con la benzammidossima ». — 9. « Sul complesso del nichelio con la toluammidossima ». — 10. « Polisolfuri cobaltogliosimici ». — 11. « Polisolfuri rodiogliosimici ». — 12. « Sali di rame ed argento trivalenti », Nota I. — 13. « Sali di rame ed argento trivalenti », Nota II. — 14. « Contributo alla conoscenza della struttura delle  $\mu$ -perosso-Co (III)-Co(IV)-ammine ». — 15. « Sulla reazione tra ossido d'azoto e sali vanadosi ». — 16. « Sali cromonitrosilici », Nota I. — 17. « Sali cromonitrosilici », Nota II. — 18. « Sui derivati nitrosilici ed idrossilamminici di  $\text{Ni}(\text{CN})_2$  ». — 19. « Sali di nichelio, cobalto, ferro degli acidi recanti il radicale P: SH ». — 20. « Sul momento elettrico dei sali di nichel degli acidi  $\alpha$  e  $\beta$ -dietilditiofosfinici e di altri acidi tiofosforati ». — 21. « Sulla reazione tra il pentasolfuro di fosforo ed i composti di Grignard ». Nota I. — 22. « Sulla reazione del pentasolfuro di fosforo con i composti di Grignard », Nota II. — 23. « Sulla reazione dei solfuri di fosforo con i composti di Grignard », Nota III. — 24. « Esteri etilfosforici come insetticidi: vecchi e nuovi metodi di preparazione ». — 25. « Acidi dialchildiofosforici e loro prodotti di clorurazione ». — 26. « Sulla preparazione degli isonitrili ». — 27. « Complessi dei metalli con le carbilammine », Nota II. — 28. « Composti  $\text{Ni}^0$ -tetracarbilamminici da sali del nichel bivalenti ». — 29. « Cromo (O), esa-arilcarbilammine da sali cromosi ». — 30. « Composti molibdenesaarilcarbilamminici ». — 31. « Wolframio-esaarilisonitrili ». — 32. « Composti isonitrilici di Palladio (O) ». — 33. « Palladium (O) compounds, Part I di-iso-nitrilopalladium (O) compounds ». — 34. « Di-isonitrilopalladium (O) compounds ». — 35. « Palladium (O) compounds », Part II, « Compounds with triarylphosphines, triarylphosphites and triarylarsines ». — 36. « Composti di  $\text{Pd}^0$  e  $\text{Pt}^0$  con le fosfine aromatiche e gli esteri arilici fosforosi ». — 37. « Nichelcarbonilfosfiti alchilici ». — 38. « Composti nitrosilcarbilamminici di ferro e cobalto ». — 39. « Prodotti sostituzione del nicheltetracarbonile con composti del fosforo tricovalente ». — 40. « Uber Nitrosylisonitrile des Eisens und Kobalts ». — 41. « Composti nitrosilici di ferro e cobalto con i fosfiti arilici, le triarilfosfine, le triarilarsine e le triarilstibine ». — 42. « Isonitrilokomplexe des einwertigen Kobalts ». — 43. « Complessi isonitrilici del cobalto monovalente », Nota II. — 44. « Complessi metalloisonitrilici ». — 45. « Iso-cyano-complexes of rhodium », Part. I, « Tetra-iso-cyanorhodium salts ». — 46. « Sali ferrosi tetraisonitrilici ». — 47. « Composti isonitrilici del rutenio », Nota I. — 48. « Composti isonitrilici del rutenio », Nota II. — 49. « Recenti aspetti della chimica dei complessi ». — 50. « Sulla preparazione del solfuro di silicio ». — 51. « Derivati organici dell'acido silicico dal bisolfuro di silicio ». — 52. « I derivati organici dell'acido silicico ». — 53. « Reazioni di alcoolisi, transesterificazioni e di-

sproporzionamento degli esteri dell'acido silicico». — 54. « Esteri trietilsilicici dell'acido etilfosfonico ». — 55. « Esteri etilfosfonici del trietilstannolo e dietilstannodiolo ». — 56. « Su un nuovo metodo per la preparazione dell'ossido di azoto ». — 57. « Su un nuovo reagente per il potassio: l'acido dimetilpicrico ». — 58. « Sulla preparazione degli isonitrili ». — 59. « Sali di nichel delle azoossime ». — 60. « Su gli etilati di alluminio ». — 61. « Sulle relazioni di solubilità tra i solfuri e gli xantogenati risp. ditiocarbammati dei metalli pesanti ». — 62. « Sulla grandezza molecolare dell'esacicloesildiplumbano ("tricicloesilpiombo") e dell'esafenildiplumbano ("trifenilpiombo") ».

## ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO « DOTT. GIUSEPPE BORGIA » PER IL 1957

(Scadenza 31 dicembre 1956 — Premio lire 500.000).

1. BETTINI CLAUDIO. — « Diesis ».

2. COLOMBO dott. GIUSEPPE. — 1. « Ricerche sulla diversa suscettibilità degli abbozzi degli embrioni degli Anfibi anuri all'azione della colchicina ». — 2. « Contributo alla conoscenza della razza ovina Padovana ». — 3. « L'azione della colchicina sullo sviluppo embrionale di *Rana agilis* ». — 4. « Prime ricerche sull'azione del naftalene su embrioni di *Rana agilis* ». — 5. « Altre ricerche sull'azione di sostanze cariocinetotrope su embrioni di Anfibi ». — 6. « Considerazioni sui rapporti tra suscettibilità differenziale e processi organogenetici nello sviluppo embrionale degli Anfibi ». — 7. « Nuove ricerche sull'azione della colchicina sullo sviluppo embrionale degli Anfibi anuri (*Rana agilis*) ». — 8. « Depigmentazione di larve di *Bufo* ottenuta con l'alfa naftolo ». — 9. « Alcune osservazioni preliminari sull'origine dei cromatofori dermali degli Anfibi anuri ». — 10. « L'azione dell'alfa naftolo sullo sviluppo embrionale degli Anfibi anuri ». — 11. « Alcune osservazioni sulla maturazione, fecondazione e segmentazione di uova di *Ascidia malaca* (Traustedt), normali e colchicinizzate ». — 12. « Azione del testosterone, del benzopirene e della colesterina su uova di Anfibi anuri ». — 13. « Il comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale in *Rana esculenta* ». — 14. « Altre osservazioni sul comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale degli Anfibi ». — 15. « Contributo allo studio del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale degli Anfibi ». — 16. « Le variazioni della struttura del nucleo nello sviluppo embrionale degli Anfibi ». — 17. « Osservazioni sulla biologia dell'*Anacridium aegyptium* L. (Orthoptera) ». — 18. « Osservazioni sulle variazioni volumetriche nucleari nella mitosi e nella meiosi ». — 19. « Brachiteterismo in *Anacridium aegyptium* (Orthoptera) ». — 20. « Osservazioni sulla pigmentazione larvale in *Anacridium aegyptium* L. (Orth. Acrid.) ». — 21. « Osservazioni quantitative sulle variazioni della lunghezza dei cromosomi nella mitosi e nella meiosi ». — 22. « L'accorciamento dei cromosomi nella mitosi e nella meiosi ». — 23. « Ulteriori osservazioni sulla biologia e sulla genetica dell'*Anacridium aegyptium* L. (Orthop.) ». — 24. « Osservazioni carilogiche nell'oogenesi dell'*Anacridium aegyptium* L. (Orthoptera) ». — 25. « L'oogenesi negli Ortoteri. I. Ricerche istologiche e citometriche in *Anacridium aegyptium* L. dalla schiusa alla immagine ». — 26. « Eterocromosomi e differenziazione del sesso. Osservazioni sulle cellule germinali di *Anacridium aegyptium* L. (Orth.) ». — 27. « Osservazioni sui nuclei isolati degli oociti in accrescimento di *Anacridium aegyptium* L. (Orth., Acrid.) ». — 28. « Osservazioni sul polimorfismo in *Chorthippus longicornis* Latr. » (in collaborazione con V. Avigliano). — 29. « Sulla struttura microscopica dei cromosomi ». — 30. « L'oogenesi negli Ortoteri. II. Ricerche sull'accrescimento degli oociti di *Anacridium aegyptium* L. ». — 31. « Sulla pigmentazione degli Acridoidei. Ricerche sulla pigmentazione delle larve di *Anacridium aegyptium* L. » (in collab. con Franco P. e Mocellin E.). — 32. « Gli effetti dell'estradolo su uova in segmentazione e sui primi stadi di sviluppo di embrioni di *Rana esculenta* ». (in collab. con Degli Esposti S.). — 33. « L'azione antimitotica degli ormoni sessuali. Ricer-

che su uova ed embrioni di *Rana*». — 34. « Ricerche sulla biologia dell'*Anacridium aegyptium* L. (Orthoptera, Catantopidae) » (in collab. con Mocellin E.). — 35. « Ricerche citologiche sull'oogenesi del Baco da seta (*Bombyx mori* L.) e considerazioni sull'oogenesi degli Insetti ».

3. CORTINI dott. CARMELA. — 1. « Azione citogenetica di alcuni derivati della colchicina ». — 2. « Azione cito genetica delle sostanze del gruppo delle podofilline ».

4. MORPURGO dott. GIORGIO. — 1. « Ricerche sull'azione mutagenica dell'acido picrico, del picrato di etilenimina e dell'N-ossido della metil-bis ( $\beta$ -cloroetil) amina » (in collab. con G. Cardinali). — 2. « Su alcune malformazioni della tiroide dello *Xenopus laevis* D » (in collab. con A. M. Zacchei). — 3. « Azione mutagenica dell'N-ossido della metil-bis ( $\beta$ -cloroetil) amina » (in collab. con G. Cardinali). — 4. « Vitalità di eterozigoti per letali dominanti in *Drosophila melanogaster* ». — 5. « Ricerche sulla vitalità relativa di tre alleli della serie "W" in *D. melanogaster* ». — 6. « Eterozigosi e rapporto sessi in *Drosophila melanogaster* » (in collab. con B. Nicoletti e A. Solima). — 7. « Su un nuovo ceppo di *Drosophila podoptera* ad alta penetranza » (in collab. con L. Morpurgo-Chiti). — 8. « Spostamento del campo d'azione antibiotica del *Penicillium chrysogenum* » (in collab. con G. Sermonti e G. Serlupi-Crescenzi). — 9. « Eterosi in due letali dominanti in *Drosophila melanogaster* » (in collab. con M. Russi). — 10. « Sull'importanza del matrimonio selettivo per la evoluzione di popolazioni artificiali di *Drosophila melanogaster* » (in collab. con B. Nicoletti). — 11. « Eterozigosi, rapporto sessi e velocità di sviluppo » (in collab. con B. Nicoletti e A. Solima). — 12. « Experiments of selective mating in evolution of gene frequencies in (*D. melanogaster*) » (in collab. con B. Nicoletti). — 13. « Observations on the sex ratio in *Drosophila melanogaster* » (in collab. con B. Nicoletti e A. Solima).

5. SERMONTI Dott. GIUSEPPE. — 1. « Osservazioni sul kariogramma di *Sisyrinchium striatum* ». — 2. « Osservazioni carilogiche sul frumento Strampelli Terminillo (*Triticum vulgare Rieti* secale cereale) *T. Vulgare Rieti* ». — 3. « Osservazioni sulla meiosi di un ibrido pentaploide di frumento ». — 4. « Osservazioni citologiche su ibridi di *Aegilops Ovata* L. *Triticum vulgare* Host e *Tr. Dicoccum* Schülb ». — 5. « Morphological Observations on the Organisation of the Mycelium of *Penicillium Chrysogenum* in Submerged Culture » (in collab. con L. Camici). — 6. « Observations on *Penicillium Chrysogenum* in Submerged culture » (in collab. con L. Camici). — 7. « Recombination without Sexual Reproduction in *Penicillium Chrysogenum* ». — 8. « Genetica del *Penicillium Chrysogenum* ». — I. « Eterocariosi in *Penicillium Chrysogenum* ». — 9. « Genetica del *Penicillium Chrysogenum* » — II. « Segregazione e ricombinazione da un diploide eterozigote in *Penicillium Chrysogenum* Thom ». — 10. « The effect of Mechanical Agitation on the Morphology of *Penicillium Chrysogenum* Thom in Stirred Fermenters » (in collab. con W. M. Dion, A. Carilli e E. B. Chain). — 11. « Genetic Recombination in *Streptomyces* » (in collab. con I. Spada-Sermonti). — 12. « Ricerche genetiche sul *Penicillium Chrysogenum* ». — 13. « A Study of the Genetics of Penicillin-producing Capacity in *Penicillium Chrysogenum* » (in collab. con M. T. Caglioti). — 14. « Primi tentativi di costruzione di una mappa genetica in *Penicillium Chrysogenum* ». — 15. « Ricombinazione genetica in *Streptomyces* » (in collab. con Isabella Spada Sermonti).

6. STEFANI Dott. RENZO. — 1. « Un particolare modo di accoppiamento negli Insetti Embiotteri ». — 2. « La fisiologia dell'accoppiamento in *Haploembia solieri* ». — 3. « I° Contributo alla conoscenza della carilogia negli Insetti Embiotteri: La digametia maschile tipo XO in *Haploembia solieri* ». — 4. « Nuovi Embiotteri della Sardegna ». — 5. « Revisione del Genere *Haploembia* e descrizione di una nuova specie ». — 6. « Il cannibalismo sessuale constatato negli Insetti Embiotteri ». — 7. « Divisioni amitotiche e modificazioni durante l'oogenesi nell'ovario degli Embiotteri ». — 8. « Studio citologico e zoogeografico della partenogenesi in *Haploembia* ». — 9. « La missoploidia quale fenomeno spontaneo nei nuclei di segmentazione dell'uovo di *Haploembia* ». — 10. « Il problema della partenogenesi in *Haploembia solieri*. (Embiottera Oligot.) ». — 11. « Sul poliploidismo somatico in *Haploembia solieri* ». — 12. « Un ciclo endogeno celomatico susseguente al normale ciclo biologico in *Diplocystis clerici* (Eugregarina-Diplocystidae) ». — 13. « L'autoinfestazione per ferita di una gregarina parassita dell'Embiottero *Haploembia solieri* Ramb. ». — 14. « Alcuni dati sulla partenogenesi accidentale in *Haploembia solieri* Ramb. forma anfagonica ».



ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO «CARLO ERBA ALLA MEMORIA  
DI GIANNI PAULETTA» PER IL 1957

(Scadenza 31 dicembre 1956 - Premio L. 1.000.000)

1. AMABILE UGO. — 1. «Elettrodiagnosi elettroterapia col nuovo tipo di corrente in doppia tensione in doppia frequenza-sistema Pasquale Visconti». Vol. I. — 2. «Atlante e descrizione dei punti motori periferici di stimolo dei movimenti per elettrodiagnosi e elettroterapia con la corrente in doppia tensione e in doppia frequenza» (in collaborazione col dott. Pasquale Visconti). Vol. II.

2. ANTOCI GIOVANNI. — 1. «Elementi di Patologia nucleo-virale». — 2. «Aspetti filogenetici ed anatomo-funzionali del sistema linfatico». — 3. «Organi linfatici immunizzanti e loro significato focogeno». — 4. «Sistema linfatico, ciclo immunobiologico e patogenesi delle malattie infettive».

3. ANTONELLI FERRUCCIO. — 1. «Il reumatismo psicosomatico». — 2. «Psiche e tubercolosi» (in collaborazione con M. Seccia). — 3. «Il concetto psicoclinico di reazione». — 4. «Psicogenesi delle nevrosi». — 5. «Il linguaggio reumatico di alcune nevrosi». — 6. «A Neurose Reumática» - «Aspecto Psico-Somático do Reumatismo Psicogeno ou Funcional». — 7. «La neurosis reumatica». — 8. «Applicazione della clorpromazina nella pratica reumatologica, con particolare riferimento alla nevrosi reumatica». — 9. «La clorpromazina nella pratica reumatologica». — 10. «Nevrosi ipertensiva e idoneità sportiva». — 11. «La psicosomatica in Italia». — 12. «La reserpina nella pratica e nella ricerca psicosomatica». — 13. «Ipertensione psicosomatica e medicina sportiva». — 14. «Die rheuma-neurose». — 15. «Studio psicoclinico degli spondilitici» (in collaborazione con L. Setzu e B. Bouché). — 16. «L'aspetto social-psicologico del reumatismo».

4. BABUDIERI BRENNIO. — 1. «Leptospirosi in provincia di Parma» (in collaborazione con M. Fiorentino). — 2. «Proposta di una nuova sistemazione dell'ordine del *Spirochaetales*». — 3. «Leptospirosi nelle risaie del Lazio e della Sardegna» (in collaborazione con C. Moscovici). — 4. «Ricerche sul comportamento di colture associate di leptospire» (in collaborazione con L. Addamiano). — 5. «Studio sierologico dei ceppi europei di Leptospira ballum». — 6. «Ricerche sulla diversa agglutinabilità di differenti ceppi di leptospire» (in collaborazione con M. Castelli). — 7. «El problema de las leptospirosis». — 8. «Estudio serológico de 253 trabajadores de los arrozales de Castellon de la Plana frente a catorce tipos de leptospirosis» (in collaborazione con M. Barrera, V. Altava, P. Gil, I. Villalonga, C. Marin). — 9. «Vacunación como profilaxis en la leptospirosis de los arrozales de Castellon» (in collaborazione con M. Barrera, I. Villalonga, P. Gil, C. Marin, V. Altava). — 10. «Studi sulla leptospirosi delle risaie della Valle Padana. Ricerche epidemiologiche e profilassi vaccinale» (in collaborazione con E. Bussinello, E. Bajocchi, A. Salvi, L. Massa). — 11. «Studi sulla leptospirosi delle risaie della Valle Padana. Osservazioni sulla casistica clinica raccolta nel biennio 1953-54» (in collaborazione con E. Bussinello, A. Salvi, L. Massa, E. Bajocchi). — 12. «Un nuovo tipo serologico di Leptospira patogena per l'uomo». — 13. «*Leptospira Mini*, ein neuer Serotyp pathogener Leptospiren». — 14. «Leptospire e Leptospirosi in Italia». — 15. «Profilassi delle Leptospirosi».

5. BARTOLI GIUSEPPE. — «Osservazioni e considerazioni sulle Mastzellen».

6. BARTOLOMEI GIUSEPPE. — 1. «Aspetti istomorfologici e funzionali di alcune ghiandole endocrine fetali nel quadro della «sindrome neonatale di adattamento» (in collaborazione con A. Onnis). — 2. «Le ovaie dei nati da madri affette da tossicosi gravidica» (in collaborazione con A. Onnis). — 3. «Correlazioni tra ipofisi e gonadi nei nati da madri affette da tossicosi gravidiche» (in collaborazione con A. Onnis). — 4. «Il corticosurrene nelle tossicosi gravidiche» (in collaborazione con A. Onnis).



7. BERTOLINI DRIANO G. — « Ricerca su animali gravemente stressati della azione farmacologica di estratti di embrioni vegetali; con riferimento specialistico alla terapia del terreno nelle parodontopatie ed altre affezioni orali ».

8. BIANCO IDA. — (Ved. Silvestroni).

9. CAPOCACCIA LIVIO. — « Le gastroenterocoliti stafilococciche ».

10. CAPELLINI OSCALDO. — (Ved. Forni).

11. CAVAZZINI PIETRO. — 1. « Reticolo-Sarcoma indifferenziato, tipo Ewing, a localizzazione costale, con emotorace ». — 2. « Osservazioni di leucemia istiomonocitaria con manifestazioni di artrite reumatoide e lesioni ossee ».

12. COLTRONI MARIO. — (Ved. De Ritis).

13. CORDONE MARIO e PARENTELA ALDO. — « L'Ipotermia - Studio sperimentale della fisiologia e fisiopatologia dell'organismo perfrigerato ».

14. DATI TEUCLO. — « Endocrinologia sessuale - Dal sesso all'intersesso ».

15. DE RITIS FERNANDO. — 1. « Gli aspetti metabolici delle malattie da virus » (in collaborazione con Mario Coltorti e Giuseppe Giusti). — 2. « Studio biochimico dell'infezione sperimentale da virus ecc. » (in collaborazione con Mario Coltorti e Giuseppe Giusti). — 3. « Attività esochinasi del cervello e del miocardio nella infezione sperimentale da virus dell'encefalomiocardite » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 4. « Andamento di alcune modificazioni enzimatiche dei tessuti ecc. » (in collaborazione con M. Coltorti, G. Giusti, V. Villari). — 5. « Studio biochimico dell'infezione sperimentale ecc. » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 6. « Attività esochinasi del cervello e del miocardio nella infezione sperimentale da virus dell'encefalomiocardite (EMC) (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 7. « Andamento di alcune modificazioni enzimatiche dei tessuti ecc. » (in collaborazione con M. Coltorti, G. Giusti e V. Villari). — 8. « Studio biochimico dell'infezione sperimentale da virus ecc. » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 9. « Studio sulla attività fosfoglicomutasi dei tessuti nel corso dell'infezione sperimentale del topo da virus EMC » (di M. Coltorti e G. Giusti). — 10. « Defosforilazione enzimatica ecc. » (di G. Giusti e M. Coltorti). — 11. « Attività fruttosiochinasi del cervello e del miocardio ecc. » (di G. Giusti e M. Coltorti). — 12. « Comportamento delle frazioni fosforiche e degli acidi nucleici ecc. » (di M. Coltorti e G. Giusti). — 13. « Studio biochimico della infezione sperimentale da virus West Nile ecc. » (di M. Coltorti e G. Giusti). — 14. « Attività enzimatica del fegato e del siero nell'epatite sperimentale da virus MHV-3 ecc. » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 15. « Serum and Liver Transaminase Activities in Experimental Virus Hepatitis in Mice » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 16. « Attività fosfoglicomutasi del siero nella epatite virale umana » (in collaborazione con G. Giusti e M. Coltorti). — 17. « Serum phosphoglucomutase activity in Human virus hepatitis » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti). — 18. « Attività desossiribonucleasica II del siero nella necrosi pancreatica ecc. » (in collaborazione con M. Coltorti e G. Giusti).

16. DE SIMONE FRANCESCO e TRUCCHI OTTAVIO. — « Ricerche colecistografiche intorno all'influenza degli ultrasuoni sulle coordinazioni motorie delle vie biliari ».

17. DI RAIMONDO FRANCESCO. — 1. « Aspetti e limiti della disvitaminosi da antibiotici. - Osservazioni e ricerche in soggetti sani » (in collaborazione con S. Angarano e Mannino). — 2. « Prevenzione della disvitaminosi da antibiotici: ricerche sperimentali in soggetti sani e osservazioni cliniche in malati » (in collaborazione con D. Mannino, D. Angarano e O. Schiraldi). — 3. « Alterazioni clinico-radiologiche del tubo digerente in soggetti sani trattati con cloroamfenicolo » (in collaborazione con F. Viterbo). — 4. « Anemie da protratto trattamento con antibiotici e da mancato apporto vitaminico nel ratto albino » (in collaborazione con S. Cognetti, N. Mannino, O. Albano, D. Jannone). — 5. « Effetti del cloroamfenicolo sul tasso elettrolitico in soggetti sani e nel ratto albino » (in collaborazione con G. Manganelli). — 6. « L'elettrocardiogramma nel quadro degli effetti collaterali da Cloroamfenicolo nel ratto albino e nello uomo sano » (in collaborazione con L. Colonna e V. Pipitone). — 7. « Alterato assorbimento glicidico da cloroamfenicolo in soggetti sani e modificazione per contemporaneo trattamento plurivitaminico » (in collaborazione con D. Angarano e O. Schiraldi). — 8. « Nutrizione e malattie batteriche ». — 9. « Metabolismo e malattie infettive ».

**18. FASOLI ANGELO.** — 1. « Serum Lipoproteins in Experimental Diabetes. III. Effect of Anterior Pituitary Growth Hormone » (in collaborazione con E. B. Magid, Morton D. Glassman e P. P. Foà). — 2. « Serum Lipoteins in Experimental Diabetes. IV. Effect of Pro-lactin » (in collaborazione con G. Galansino, A. M. Magill e P. P. Foà). — 3. « Elettroforesi su carta delle lipo- e glico-proteine sieriche » (in collaborazione con F. Salteri). — 4. « Dimostrazione degli acetalfosfatidi nelle frazioni lipoproteiche del siero » (in collaborazione con F. Salteri). — 5. « Eparina e metabolismo lipoproteico. — Problemi fisiopatologici ». — 6. « Lipoproteine ed Aterosclerosi ». — 7. « La proteinemia » (in collaborazione con F. Salteri, V. Salvetti, M. Stocco e G. Persani). — 8. « L'elettroforesi su carta delle lipoproteine del siero: problemi di metodologia e di interpretazione fisiopatologica ». — 9. « Ultracentrifugal, Electrophoretic and chemical changes produced in serum and artificial lipid emulsions by human clearing factor » (in collaborazione con F. Salteri, G. Spina e G. Ratti). — 10. « Lipoproteins in atherosclerosis: a comparison of the results of paperelectrophoresis with those of ultracentrifugal analysis in a high-density medium » (in collaborazione con F. Salteri e A. Cesana). — 11. « Ultracentrifugal and paper-electrophoresis studies of serum lipoproteins in coronary disease: the action of some pharmacologic agents » (in collaborazione con F. Salteri e A. Cesana). — 12. « Lo sviluppo delle conoscenze sulle lipoproteine del siero e le nuove vedute sulla fisiopatologia del trasporto ematico dei liquidi ».

**19. FERRARI WILLIAM.** — 1. « Sull'effetto eosinofilo-penizzante dell'ACTH iniettato nella cisterna magna » (in collaborazione con E. Floris e F. Paulesu). — 2. « Su di una particolare, imponente sintomatologia prodotta nel cane dall'ACTH iniettato nella cisterna magna » (in collaborazione con E. Floris e F. Paulesu). — 3. « Influenza direttamente l'ipofisi l'attività di alcuni centri ipotalamici? — Su di una particolare e specifica azione della adrenocorticotropina e dell'intermedina introdotte per via liquoriale ».

**20. FORNI IRNERIO e CAPPELLINI OSVALDO.** — « Compendio di meccanica articolare ».

**21. GALLO PIERO.** — « A Study on the Topographical and quantitative relations between Capillaries and Fibres of the conduction System of the Heart and on their functional Significance ».

**22. GENTILI CARLO.** — « Il lobo parietale ».

**23. GEREVINI ADRIANO.** — « Tubero ad azione abortiva ».

**24. GIOTTI ALBERTO.** — 1. « I potenziali di membrana delle singole fibre miocardiche. — Risultati preliminari » (in collaborazione con L. Beani e F. Buffoni Nardini). — 2. « Interazioni fra nicotina e amine simpaticomimetiche a livello cardiaco *in vitro* » (in collaborazione con G. Pepçu). — 3. « Sul ruolo del metabolismo nelle reazioni graduate del miocardio » (in collaborazione con F. Buffoni Nardini). — 4. « Studi sull'attività degli atri isolati in diverse condizioni sperimentali e sotto l'azione di vari gruppi di farmaci. I. Relazione fra elettrogramma, meccanogramma e temperatura ». — 5. « Idem ». II. Relazione fra elettrogramma, meccanogramma, e pH (in collaborazione con F. Buffoni Nardini). — 6. « Interaction of Nicotine and Eserine, Ephedrine, Atropine, Hexamethonium, and Adrenaline in isolated Guinea-pig auricles ». — 7. « L'attività degli atri isolati in funzione della temperatura » (in collaborazione con F. Nardini). — 8. « L'azione del 2,4-dinitrofenolo sugli atri isolati di mammifero » (in collaborazione con F. Nardini). — 9. « Studi sull'attività degli atri isolati in varie condizioni sperimentali e sotto l'azione di vari gruppi di farmaci. — L'azione del 2,4-dinitrofenolo » (in collaborazione con F. Buffoni Nardini). — 10. « Titolazione dei glucosidi digitalici nella cavia » (in collaborazione con F. Buffoni Nardini). — 11. « Le basi fisiologiche della farmacologia sperimentale della diastole miocardica ».

**25. MARINONE GIUSEPPE.** — 1. « La terapia delle leucemie » (in collaborazione con P. Introzi). — 2. « La terapia delle leucemie acute dell'adulto ». — 3. « Il problema degli antibiotici ad azione antimetabolica ». — 4. « Influenza della surrenectomia e della somministrazione di cortisone sull'attività riproduttiva degli eritroblasti nel midollo del ratto albino » (in collaborazione con F. Corso, G. Doria). — 5. « Preliminari in tema di inibizione cariocinetica da antibiotici » (in collaborazione con Corso F. e Parsenziani M.). — 6. « Luci ed ombre nella terapia delle leucemie acute » (in collaborazione con P. Introzi).

**26. MECCHIA ALDO.** — « I fermenti pancreatici nella difesa dell'organismo umano dall'infezione tubercolare; possibile impiego della lipasi pancreatica nella preparazione di un vaccino antitubercolare ».

**27. MELINA DOMENICO.** — 1. « Ipotermia locale del cuore » (in collaborazione con C. Pollara). — 2. « Ricerche sperimentali sulla chirurgia del cuore esangue » (in collaborazione con C. Pollara).

**28. NIGRO ALDO.** — 1. « Una nuova grandezza per gli studi di fisiologia muscolare ». — 2. « Contrazioni ritmiche automatiche del muscolo dorsale di sanguisuga ». — 3. « Azione del calore sul muscolo dorsale di sanguisuga ». — 4. « Natura della contrattura acetilcolinica del muscolo dorsale di sanguisuga ».

**29. PALMIERI GIUSEPPE.** — « Critica clinica degli stati allergici da endocrinopatie ed influenza della costituzione psico-somatica ».

**30. PARENTELA ALDO.** — (Ved. Cordone).

**31. PEZZINI GIANCARLO.** — « La streptomycin-lecitinasi A nelle neoplasie maligne ». — 2. « Su qualche probabile effetto terapeutico ottenuto con il trattamento di neoplasie maligne con l'associazione lecitinasi A + globulina gamma + ialuronidasi ».

**32. PICCHEZZI LUPO.** — « La costituzione organica individuale ed i fenomeni vitali ».

**33. PISANI GIACOMO.** — 1. « Lesioni del corpo da microtrauma sportivo » (in collaborazione con T. Conti e G. S. Marchese). — 2. « Sull'ereditarietà della fragilità essenziale delle ossa » (in collaborazione con De Lutio O.). — 3. « La colorazione blu del timpano nella osteopsatirosi » (in collaborazione con L. Bertola). — 4. « Comportamento della velocità di eritrosedimentazione negli scompensi cardiaci » (in collaborazione con G. Pilotti). — 5. « L'omeroizzazione secondo Camera nel trattamento delle pseudoartrosi del collo femorale » (in collaborazione con A. Pedrocca). — 6. « Le forme fruste della osteopsatirosi » (in collaborazione con L. Bertola e A. Della Porta). — 7. « La rachianestesia nella chirurgia ortopedica e traumatologica » (in collaborazione con T. Conti). — 8. « Presentazione di un apparecchio per il trattamento delle fratture dell'estremo prossimale dell'omero » (in collaborazione con D. Sabaino). — 9. « Le nuove premesse anatomo-fisiologiche dell'exeresi polmonare ». — 10. « Nuova modalità di ricerca della velocità di eritrosedimentazione » (in collaborazione con G. Pilotti). — 11. « Indicazioni dell'exeresi nella tubercolosi del polmone e situazione anatomo-funzionale indotta dall'intervento » (in collaborazione con E. Peyrot). — 12. « Semplificazioni tecniche nella ricerca della velocità di eritrosedimentazione » (in collaborazione con G. Pilotti). — 13. « Considerazioni diagnostiche su di un caso di adenocarcinoma del tenue » (in collaborazione con G. Pilotti). — 14. « Applicazioni terapeutiche della compressione del globo carotideo » (in collaborazione con L. Marzocchi). — 15. « Cenni storici sulla chirurgia di exeresi polmonare nella tubercolosi ». — 16. « Nuovi orizzonti aperti alla diagnostica ed alla terapia dalla compressione del seno carotideo » (in collaborazione con L. Marzocchi). — 17. « Le complicazioni dell'exeresi polmonare per tubercolosi ». — 18. « Applicazioni diagnostiche della compressione del globo carotideo » (in collaborazione con L. Marzocchi). — 19. « Studio comparativo della velocità di eritrosedimentazione e della formolgelificazione del plasma in alcune affezioni polmonari » (in collaborazione con G. Pilotti). — 20. « Contributo allo studio dei rapporti tra alcolemia e velocità di eritrosedimentazione » (in collaborazione con G. Pilotti). — 21. « Risultati a distanza dell'operazione secondo Camera nel trattamento della lussazione abituale di rotula » (in collaborazione con A. Pedrocca). — 22. « L'osteotomia sottotrocanterica ad appoggio epifisario nel trattamento palliativo della lussazione inveterata irriducibile dell'anca » (in collaborazione con A. Pedrocca). — 23. « Il fattore psiche nella patologia gastrica ». — 24. « Applicazioni terapeutiche e nuove conclusioni diagnostiche ottenute mediante la compressione del seno carotideo » (in collaborazione con L. Marzocchi). — 25. « Il trattamento della lussazione abituale della spalla secondo Camera » (in collaborazione con L. Bertola). — 26. « Considerazioni sul granuloma istiocitario dell'osso » (in collaborazione con D. Sabaino).

**34. SILVESTRONI EZIO e BIANCO IDA.** — « La malattia microdrepanocitica ».

**35. TRUCCHI OTTAVIO.** — (Ved. De Simone Francesco).



- 36. TRIA EUSEBIO.** — 1. « Divagazione sulla vita culturale canadese ». — 2. « Ricerche su un fattore di accrescimento dei lieviti e dei ratti presente nel fegato » (in collaborazione con O. Barnabei). — 3. « Nuove acquisizioni sul fattore presente nella frazione liposolubile del fegato » (in collaborazione con O. Barnabei). — 4. « Ricerche sulla formilasi epatica » (in collaborazione con O. Barnabei e R. Guglielmini). — 5. « Le vitamine antianemiche ». — 6. « Problemi di sviluppo — Recenti vedute sui fattori vitaminici di accrescimento » (in collaborazione con O. Barnabei). — 7. « Action sur la phosphorylation oxydative d'un facteur présent dans le foie » (in collaborazione con O. Barnabei). — 8. « Ricerche sull'azione stimolante dell'accrescimento e antitossica di un fattore epatico ». — 9. « Fattori vitaminici di accrescimento ». — 10. « Fattori antitossici del fegato ». — 11. « L'uomo visto da un fisiologo ». — 12. « Il diabete » (in collaborazione con O. Barnabei, L. Brighenti, C. Cocito). — 13. « Ricerche sulla ferritina epatica » (in collaborazione con L. Brighenti). — 14. « Effetto del 2-4 dimetiltiazolo irradiato sull'accrescimento del *S. cerevisiae* e meccanismo d'azione » (di O. Barnabei e L. Brighenti). — 15. « Attività antitossica di un fattore presente nella frazione liposolubile del fegato » (di O. Barnabei e L. Brighenti). — 16. « Azione di un fattore epatico sulla sintesi dell'acido para-aminoippurico, inibita dal 2,4 dinitrofenolo » (di Barnabei e Cocito). — 17. « Azione di un fattore epatico sulla fosforilazione ossidativa inibita dalla tiroxina, dal fenolo e dal 2,4 dinitrofenolo » (di Barnabei). — 18. « Attività antitossica di un fattore epatico ». Nota II (di O. Barnabei e L. Brighenti). — 19. « Sintesi dell'acido p.-aminoippurico in presenza di tiroxina e di un fattore epatico » (di O. Barnabei e C. Cocito). — 20. « La ferretina epatica dopo splenectomia » (di L. Brighenti). — 21. « Azione di derivati fenolici sull'accrescimento del *S. cerevisiae* ed effetto di un fattore epatico » (di L. Brighenti). — 22. « Effetti antagonisti di alcuni derivati fenolitici e di estratti epatici sull'accrescimento e sul metabolismo dei lieviti » (di L. Brighenti e L. Ferrari). — 23. « Escrezione di vitamina B<sub>12</sub> nei bovini in accrescimento » (di G. Cocito e G. Tessier). — 24. « Ricerche sulla sintesi del legame peptico: azione antagonista del cortisone e del fegato » (di C. Cocito).
- 37. VALZELLI LUIGI.** — « Tassi di lipidi e colesterolo nel tessuto miocardico e aortico di soggetti umani venuti a morte ».



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 13 aprile 1957*

- BRAUN P. B. — Vedi: JONKER G. H., WIJN H. P. J. and BRAUN P. B.
- DE FEO A. e MOSETTI F. — *Prospezione geoelettrica delle grotte di Castellana*. Estr. da «Rassegna Speleologica Italiana», vol. VIII, 1956, n. 3-4.
- INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ALGEBRAIC NUMBER THEORY. TOKYO-NIKKO, SEPTEMBER 1955. — *Proceedings*. Tokyo, The Organizing Committee of the International Symposium, 1956. Pp. XXI-267, in-8°, con tavv.
- JONKER G. H., WIJN H. P. J. and BRAUN P. B. — *Ferroxplana, hexagonal ferromagnetic iron-oxide compounds for very high frequencies*. Estr. da «Philips Technical Review», vol. XVIII, 1956-57, n. 6.
- MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE. DIREZIONE GENERALE DELL'ISTRUZIONE SUPERIORE. — *Osservatorio Astronomico di Padova e di Asiago*. Roma, 1956. Pp. 31, in-8°, con figg.
- MOSETTI F. — Ved: DE FEO A. e MOSETTI F.
- PELLEGRINI G., ANTONGIOVANNI E., SANTI R. — *Ricerche sul potere dachicida di prodotti a base di N-alchilammidi di acidi o,o-dialchilditiofosforilacetici*. Milano, Montecatini, 1956. Pp. 20, in-8°, con figg.
- PLANAS Juan Manuel. — *La fuerza del mar*. Trabajo presentado en la Academia de Ciencias Médicas, Físicas y Naturales de la Habana el 8 de Junio de 1956. Estr. da «Revista de la Sociedad Cubana de Ingenieros», vol. LVI, 1956, n. 7.
- SEGRE Beniamino. — *Forme differenziali e loro integrali*. Vol. II: *Omologia, coomologia, corrispondenze ed integrali sulle varietà*. Roma, Docet, 1956. Pp. 422, in-8°.
- TOMMASINA Thomas. — *La physique de la gravitation et la dynamique de l'univers basées sur la découverte du mécanisme réel des radiations démontrant leur fonction gravitationnelle réciproque*. Paris, Gauthier-Villars et C., 1928. Pp. 301, in-8°.
- UNIVERSITAS BELGICA. — *Inventaire des Ressources Scientifiques Belges*. II: *Sciences juridiques, politiques, économiques*; III: *Sciences pures et appliquées*, chap. 1-2, 3-4, 10. Bruxelles, 1953-55. Fasc. 5, in-8°.
- WIJN H. P. J., — Vedi: JONKER G. H., WIJN H. P. J. and BRAUN P. B.
- WUERKER Rudolph G. — *Annotated tables of strength and elastic properties of rocks*. Urbana, University of Illinois, Department of Mining and Metallurgical Engineering, 1956. Pp. 22, in-8°, con tavv.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta dell'11 maggio 1957*

*Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI*

---

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Analisi matematica.** — *Una generalizzazione del metodo di Fourier per la risoluzione di alcuni problemi ai limiti.* Nota di ADOLF HAIMOVICI, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

1. Le nozioni di autovalore e autofunzioni sono state definite, generalmente, per problemi lineari.

In un recente lavoro [1], ho mostrato come si possono generalizzare queste nozioni per problemi non lineari. Sia

$$(1) \quad y'' = f(x, y, y', \lambda),$$

$$(2) \quad y'(0) = V_1[y(0)] \quad , \quad y'(1) = V_2[y(1)],$$

un sistema nel quale:

a)  $f$  è una funzione continua e derivabile di  $x, y, y'$ , nel dominio

$$(D) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad m \leq y \leq M \quad , \quad m' \leq y' \leq M',$$

per tutti i valori di  $\lambda$  dell'intervallo  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$ .

b)  $V_i(z)$  sono due funzioni continue di  $z$ , nell'intervallo  $[m, M]$ , tali che gli integrali

$$(3) \quad I_i = \int_m^M \frac{dz}{V_i(z)} \quad (i = 1, 2)$$

esistano.

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

Se, con queste condizioni, il sistema (1)-(2) ammette, per certi valori  $\lambda_n$  di  $\lambda$ , una soluzione

$$y = \varphi_n(x) = \varphi_n(x, A_n),$$

che dipende da un parametro  $A_n$ , allora  $\lambda_n$  si chiamano *autovalori* e  $\varphi_n(x)$  *autofunzioni*. Se il sistema (1)-(2) ammette una successione  $\{\varphi_n\}$  di autofunzioni, allora una famiglia di funzioni  $S_n(x, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  che soddisfano le condizioni (2) è data da

$$U(x, S_n) = U(x, \varphi_1) + F_n(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}),$$

dove:

a)  $U(x, z) = \text{cost.}$  è l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{W(x, z)} \equiv \left[ \frac{1}{V_2(z)} - \frac{1}{V_1(z)} \right] \frac{x-a}{b-a} + \frac{1}{V_2(z)};$$

b)  $\theta_i$  sono date da

$$\theta_i = U(x, \varphi_{i+1}) - U(x, \varphi_i);$$

c)  $F_n$  è una funzione arbitraria di  $n-1$  variabili che ammette derivate parziali del secondo ordine.

Più generalmente, una famiglia di funzioni  $S_n$ , che soddisfano le condizioni ai limiti (2) è data - come si può verificare senza difficoltà - da

$$(4) \quad U(x, S_n) = G_n(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}),$$

dove:

a)  $\theta_i$  sono funzioni di  $x$ , che soddisfano le condizioni

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial x}(0) = 0, \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(1) = 0; \quad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

b)  $G_n$  è una funzione di  $n$  variabili, ammettente derivate parziali del secondo ordine.

Nel caso particolare

$$(5) \quad V_1(z) = \alpha V(z), \quad V_2(z) = \beta V(z),$$

$\alpha, \beta$  essendo due costanti, si trova:

$$U(x, z) = J(z) - \frac{1}{p} \log(px + q),$$

dove

$$J(x) = \int \frac{dz}{V(x)}, \quad p = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}, \quad q = \frac{1}{\alpha}.$$

Una famiglia di funzioni che soddisfano (2), tenendo presenti le (5) è data da

$$J(S_n) = G_n(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}),$$

dove le  $\theta_i$  soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_0}{\partial x}(0) &= \rho, & \frac{\partial \theta_0}{\partial x}(1) &= \sigma, \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(0) &= 0, & \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(1) &= 0, \quad (i=1, 2, \dots, n-1),\end{aligned}$$

$\rho$  e  $\sigma$  essendo due costanti, che verificano le relazioni

$$\rho \frac{\partial G_n}{\partial \theta_0}(\theta_0(0), \theta_1(0), \dots, \theta_{n-1}(0)) = \alpha,$$

$$\sigma \frac{\partial G_n}{\partial \theta_0}(\theta_0(1), \theta_1(1), \dots, \theta_{n-1}(1)) = \beta.$$

2. Utilizzando le idee che sono alla base delle considerazioni di qui sopra, ci proponiamo di trovare soluzioni del sistema

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(t) \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u_x(0, t) = \alpha(t) V[u(0, t)], \quad u_x(1, t) = \beta(t) V[u(1, t)], \end{cases}$$

dove:

a)  $c$  è una costante,

b)  $a(x)$  è una funzione continua, nell'intervallo  $[0, 1]$ , ammettente derivate seconde nello stesso intervallo,

c)  $b(t)$  è una funzione continua,

d)  $\alpha(t), \beta(t)$  sono funzioni continue, ammettenti derivate seconde nell'intervallo  $(0, T)$ ,

e)  $V(z)$  è una funzione continua per  $u_1 \leq z \leq u_2$ ,  $u_1$  e  $u_2$  essendo i limiti di variazione di  $z$ , tale che la derivata sia limitata ( $|V'(z)| \leq M$ ) e che

esista l'integrale  $\int_{u_1}^{u_2} \frac{dz}{V(z)}$ .

Si osserva immediatamente che, se si fa la sostituzione  $J(u) = \int \frac{dz}{V(z)}$ , il sistema (6) si trasforma nel sistema equivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + A(J) \left( \frac{\partial J}{\partial x} \right)^2 + cA(J) \left( \frac{\partial J}{\partial t} \right)^2 + B(x) \frac{\partial J}{\partial x} + D(t) \frac{\partial J}{\partial t} = 0, \\ J_x(0, t) = \alpha(t), \quad J_x(1, t) = \beta(t), \end{cases}$$

$A, B, D$ , essendo delle funzioni che si ottengono da  $a, b$ , e  $V$ .

Per il sistema (6), cerchiamo delle soluzioni dalla forma  $S_n$ , date da

$$(7) \quad J(S_n) = G_n(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}),$$

nella quale  $J$  è la funzione introdotta qui sopra,  $G_n$  è una funzione di  $n$  variabili, ammettente derivate del secondo ordine,  $\theta_i = \theta_i(x, t)$  delle funzioni



di  $x$  e  $t$ , per il momento arbitrarie, che soddisfano le condizioni:

$$(8) \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial x}(0, t) = \rho(t) \quad , \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial x}(1, t) = \sigma(t),$$

$$(8') \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(0, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta_i}{\partial x}(1, t) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n-1),$$

$\rho$  e  $\sigma$  essendo due funzioni di  $t$  con derivate seconde limitate, che, inoltre, soddisfano le relazioni

$$(9) \quad \rho(t) \frac{\partial G_n}{\partial \theta_0}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \alpha(t), \quad \sigma(t) \frac{\partial G_n}{\partial \theta_0}(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = \beta(t),$$

dove abbiamo posto

$$(10) \quad \xi_i = \theta_i(0, t) \quad , \quad \eta_i = \theta_i(1, t), \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Sostituendo  $S_n$  nell'equazione alle derivate parziali data, si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{J'(S_n)} \left\{ \frac{\partial^2 G_n}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \Lambda'(G_n) \frac{\partial G_n}{\partial \theta_i} \frac{\partial G_n}{\partial \theta_j} \right\} & \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \frac{\partial \theta_j}{\partial x} + c \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \frac{\partial \theta_j}{\partial t} \right) + \\ & + \frac{\partial G_n}{\partial \theta_i} \left\{ \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + a(x) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} + b(t) \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right\} = 0, \end{aligned}$$

colla notazione

$$\Lambda'(G_n) = \frac{J''(S_n)}{[J'(S_n)]^2}.$$

Scegliamo  $G_n$  in modo che

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \Lambda'(G_n) \frac{\partial G_n}{\partial \theta_i} \frac{\partial G_n}{\partial \theta_j} = 0,$$

ciò che vuol dire

$$Z(G_n) = \sum_0^{n-1} a_i \theta_i \quad , \quad Z(z) \equiv \int e^{-\Lambda(z)} dz$$

$a_i$  essendo costanti arbitrarie. L'equazione data sarà verificata se le  $\theta_i$  saranno soluzioni dell'equazione

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + a(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} + b(t) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Se designamo con  $Y$  la funzione inversa di  $Z$ , avremo allora una famiglia di funzioni  $S_n$ , soddisfacente il sistema (6), sotto la forma

$$(12) \quad J(S_n) = G_n = Y\left(\sum_0^{n-1} a_i \theta_i\right);$$

le condizioni (9) divengono

$$(13) \quad a_0 \rho(t) Y'\left(\sum_0^{n-1} a_i \xi_i\right) \equiv \alpha(t) \quad , \quad a_0 \sigma(t) Y'\left(\sum_0^{n-1} a_i \eta_i\right) \equiv \beta(t),$$

$Y'$  essendo la derivata di  $Y$ ; dobbiamo tener presente il fatto che  $\xi_0$  e  $\eta_0$  dipendono da  $\rho$  e  $\sigma$ , in modo che le equazioni (13) siano delle equazioni funzionali, generalmente non lineari.

In questo modo, il problema proposto è stato ridotto ad un problema lineare del tipo di Sturm-Liouville, ed al sistema (13).

Cercando delle soluzioni dalla forma  $\theta(x, t) = X(x) v(t)$ , si trova subito che è sufficiente che  $X$  sia soluzione del sistema di Sturm-Liouville

$$(14) \quad \begin{cases} X'' + a(x) X' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = X'(1) = 0, \end{cases}$$

$\lambda$  essendo un parametro reale, e che  $v(t)$  sia una soluzione dell'equazione

$$(14') \quad cv'' + b(t)v - \lambda v = 0.$$

Nelle condizioni imposte inizialmente per  $a(x)$  si constata che il sistema (14) ammette un sistema infinito  $X_n(x)$  di autofunzioni normate, corrispondenti agli autovalori  $\lambda_n$  di  $\lambda$  (ved. per esempio [4], cap. 4, § 6).

Per ciascun  $\lambda_n$ , l'equazione (14') ammette una soluzione

$$v_i = \begin{cases} A_i v_i^* + B_i v_i^{**} & c \neq 0, \\ A_i v_i^* & c = 0, \end{cases}$$

$v_i^*$  e  $v_i^{**}$  essendo due integrali linearmente indipendenti dell'equazione (14'), di cui, per  $c \neq 0$ , sia  $W(v^*, v^{**})$  il wronskiano. Esiste dunque una infinità di funzioni  $\theta_i(x, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1, \dots$ ) che soddisfano l'equazione (6) e le condizioni ai limiti (8).

La funzione  $\theta_0(x, t)$ , può trovarsi sotto la forma  $\theta_0(x, t) = U(x, t) + w(x, t)$ , dove  $U$  è data da

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a(x) \frac{\partial U}{\partial x} + b(t) \frac{\partial U}{\partial t} = P(x, t),$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0,$$

$$P(x, t) = a(x)[(\rho - \sigma)x - \rho] + \frac{x^2}{2}[c(\rho'' - \sigma'') + b(t)(\sigma' - \rho')] - \\ - x[c\rho'' + b(t)\rho'] + \rho - \sigma + \mu' - b(t)\mu',$$

$\mu$  essendo una funzione arbitraria ammettente derivata seconda, e

$$w(x, t) = \frac{x^2}{2}(\sigma - \rho) + x\rho + \mu.$$

Risulta allora se  $c \neq 0$ :

$$(15) \quad \theta_0(x, t) = w(x, t) + \sum_i^{\infty} (A_i v_i^* + B_i v_i^{**}) X_i - \\ - \sum_i^{\infty} \int_0^t \frac{P_i(\tau) X_i(x)}{W[v_i^*(\tau), v_i^{**}(\tau)]} (v_i^{**}(\tau) v_i^*(t) - v_i^{**}(t) v_i^*(\tau)) d\tau,$$

e

$$(15') \quad \theta_0(x, t) = w(x, t) + \sum_i^{\infty} A_i v_i^*(t) X_i + \sum_i^{\infty} \int_0^t \frac{P_i(\tau) X_i(x)}{b(\tau) v_i^*(\tau)} d\tau,$$

se  $c = 0$ ;  $P_i(t)$  sono i coefficienti dello sviluppo in serie  $X_i(x)$  della funzione  $P(x, t)$  (osserviamo che  $P(x, t)$  è sviluppabile in serie di funzioni  $X_n$ , secondo le ipotesi fatte sopra  $a(x)$ ,  $b(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $\sigma(t)$ ) allorché  $A_i$  e  $B_i$  sono costanti arbitrarie, alle quali si possono ancora imporre le condizioni

$$(16) \quad \theta_0(x, 0) = \frac{\partial \theta_0}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \text{per } c \neq 0,$$

ciò che è evidentemente possibile se si prende

$$A_i v_i^*(0) + B_i v_i^{**}(0) = -w_i(0),$$

$$A_i v_i^{*'}(0) + B_i v_i^{**'}(0) = -w_i'(0),$$

o la condizione

$$(16') \quad \theta_0(x, 0) = 0, \quad \text{se } c = 0,$$

ciò che conduce a scegliere  $A_i v_i(0) = -w_i(0)$ ,  $w_i(t)$  essendo i coefficienti dello sviluppo in serie di  $X_i(x)$ , di  $w(x, t)$ .

4. Studiamo adesso le condizioni nelle quali il sistema (13) ammette una soluzione  $\rho, \sigma$ . A tale scopo, consideriamo lo spazio delle coppie di funzioni  $(\rho, \sigma)$  due volte derivabili nell'intervallo  $[0, T]$ ; ne siano  $(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2)$  due elementi e

$$\delta = \max_{0 \leq t \leq T} \{ |\rho_1 - \rho_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|, \dots, |\sigma_1'' - \sigma_2''| \}$$

la sua metrica. Consideriamo in questo spazio la trasformazione

$$\bar{\rho} = \frac{\alpha(t)}{a_0 Y' \left( \sum_0^{n-1} a_i \xi_i \right)}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\beta(t)}{a_0 Y' \left( \sum_0^{n-1} a_i \eta_i \right)}.$$

Sia, come qui sopra,  $(\rho_1, \sigma_1), (\rho_2, \sigma_2)$  una coppia di elementi dello spazio, e  $\delta$  la distanza fra loro: sia infine  $\bar{\delta}$  la distanza fra gli elementi corrispondenti. Se si tiene conto del fatto che le funzioni  $w(x, t)$  e  $P(x, t)$  sono lineari nelle  $\rho, \sigma$  e le loro prime due derivate, si può facilmente dedurre che

$$\bar{\delta} \leq \delta kM$$

$M$  essendo una costante che dipende dai massimi di  $V$ , di  $V'$  e di  $T$ , e che non calcoliamo più e  $k$  è il massimo di  $|\alpha(t)|, |\beta(t)|, \dots, |\beta''(t)|$ , per  $0 \leq t \leq T$ . Secondo il teorema del punto fisso negli spazi metrici (ved. per esempio [2] cap. I, § 7, p. 47), risulta che il sistema (13) ammette una soluzione unica se  $kM < 1$ , ciò che noi supporremo realizzato, imponendo certe restrizioni ai limiti delle funzioni  $\alpha, \beta, V, V'$ .

Con quest'ultimo teorema, abbiamo dimostrato l'esistenza di una infinità di funzioni  $S_n$ , soluzioni del sistema (6).

5. Proponiamoci adesso di trovare una soluzione del sistema (6), che soddisfi anche le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) \quad \text{se } c \neq 0,$$

e

$$u(x, 0) = g(x), \quad \text{se } c = 0,$$

$h(x)$  e  $g(x)$  essendo delle funzioni continue, e tali che  $Z\{J[g(x)]\}$ ,  $Z'\{J[g(x)]\}$   $J'[g(x)]h(x)$  siano sviluppabili in serie di  $u_n(x)$ .

Prendiamo a tale scopo

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n;$$

$J$  essendo una funzione continua, risulta

$$J[u(x, t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}),$$

o, tenendo presente l'espressione di  $G_n$ ,

$$Z\{J[u(x, t)]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_0^{n-1} a_i \theta_i,$$

siamo condotti, per  $t = 0$  (se  $c \neq 0$ , e se si tiene conto di (16)) a

$$Z\{J[g(x)]\} = \sum_1^{\infty} a_i u_i(x) [A_i v_i^*(0) + B_i v_i^{**}(0)],$$

$$Z'\{J[g(x)]\} J'[g(x)] h(x) = \sum_1^{\infty} a_i u_i(x) [A_i v_i''(0) + B_i v_i^{***}(0)],$$

ciò che — nelle ipotesi fatte più sopra — permette di determinare le costanti  $A_i$ ,  $B_i$ . Se  $c = 0$ , si avrà una sola equazione che permetterà di ottenere le  $A_i$ .

6. Nel caso particolare di un sistema ellittico-parabolico,  $c \geq 0$ , se  $a(x)$  è limitata, e la funzione  $V(z)$  soddisfa le condizioni

$$V(z_2) - V(z_1) = (z_2 - z_1) Q(z_1, z_2),$$

con

$$\alpha(t) Q(z_1, z_2) > 0, \quad \beta(t) Q(z_1, z_2) < 0,$$

la soluzione risulta unica, la dimostrazione essendo basata su certi teoremi riguardanti i massimi degli integrali dell'equazione (6) (ved. [3]. cap. VII, 5).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] HAIMOVICI A., *Asupra unor probleme la limită neliniare si unor reprezentări ale funcțiilor*, An. st. ale Univ. « Al. I. Cuza », Iasi (serie noua), Secț. I, T. I, pp. 1-10 (1955).
- [2] LIUSTERNIC L. A. e SOBOLEV V. I., *Elementy funkzionalnogo analiza. Gosudarstvenoe izdatelstvo tekhnico-teoreticeskoi literatury*, Moskva-Leningrad 1951.
- [3] PICONE M., *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli, Rondinella Editore, 1940.
- [4] SANSONE G., *Equazioni differenziali nel campo reale*, Bologna 1948.



**Analisi matematica.** — *Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale*  $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ .  
Nota di LUIGI MERLI, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$(1) \quad x' = f(t, x).$$

È noto che se  $R$  è l'insieme dei punti  $(t, x)$  definito da  $0 < t \leq a$ ,  $-b \leq x \leq b$  ed  $R_0$  indica l'insieme ottenuto aggiungendo ad  $R$  il punto  $(0, 0)$ , nelle ipotesi che la  $f(t, x)$  risulti continua e limitata in  $R$  è possibile determinare  $t^0 > 0$ , sufficientemente piccolo, tale che in  $0 \leq t \leq t^0$  esiste almeno una soluzione  $x = x(t)$  della (1), soddisfacente la condizione iniziale  $x(0) = 0$ .

Affinché poi tale soluzione risulti unica in un intervallo  $0 \leq t \leq t_0 \leq t^0$  è sufficiente che la  $f(t, x)$  soddisfi la condizione

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{t},$$

quando  $(t, x_1)$  e  $(t, x_2)$  appartengono, ad  $R^{(1)}$ .

Recentemente A. Wintner<sup>(2)</sup> ha esteso questo teorema di unicità alla equazione

$$(2) \quad x^{(n)} = f(t, x)$$

dimostrando che se  $f(t, x)$  è continua in  $R_0$  e soddisfa alla condizione

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq n! |x_1 - x_2| t^n,$$

qualunque siano  $(t, x_1)$  e  $(t, x_2)$  di  $R$ , allora, corrispondentemente a qualsiasi insieme di costanti  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  esiste un  $t_0 > 0$  avente la proprietà che la (2), con le condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

non può avere più di una soluzione  $x = x(t)$  in  $0 \leq t \leq t_0$ .

Nella presente Nota noi consideriamo la equazione

$$(3) \quad x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)})$$

e ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema che generalizza quelli enunciati precedentemente.

Sia  $S$  l'insieme dei punti  $(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$  definiti per  $0 < t \leq a$ ,  $-b_i \leq x^{(i)} \leq b_i$ ,  $b_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , e indichiamo con  $S_0$  l'insieme dei punti  $S$  con l'aggiunta del punto  $(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \equiv (0, 0, 0, \dots, 0)$ .

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, Zanichelli, Bologna p. 102 (1948).

(2) A. WINTNER, *On the local uniqueness of the initial value problem of the differential equation*  $dx/dt^n = f(t, x)$ , « Boll. Un. Mat. It. », serie III (XI) (1956), pp. 496-498.

Se  $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$  è una funzione continua in  $S_0$  e soddisfacente alla condizione

$$(4) \quad |f(t, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n-1)}) - f(t, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n-1)})| \leq \\ \leq L_n \frac{|x_1 - x_2|}{t^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)} - x_2^{(1)}|}{t^{n-1}} + \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)}|}{t},$$

quando  $(t, x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n-1)})$  e  $(t, x_2, x_2^{(1)}, \dots, x_2^{(n-1)})$  appartengono ad  $S$ , con le costanti  $L_1, L_2, \dots, L_n$  tali che

$$\sum_{k=1}^n \frac{L_k}{k!} = 1$$

esisterà un  $t_0 > 0$  avente la proprietà che l'equazione (3), con le condizioni iniziali

$$x(0) = x^{(1)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

non può avere più di una soluzione in  $0 \leq t \leq t_0$  (3).

2. Alla dimostrazione del teorema enunciato premetteremo il seguente lemma.

Sia  $y(t)$  una funzione continua e positiva definita per  $0 \leq t < \infty$  e soddisfacente la condizione, per  $t > 0$

$$(5) \quad y(t) \leq \int_0^t k(t, s) y(s) ds, \quad y(0) = 0$$

essendo  $k(t, s) > 0$  per  $t > 0, 0 \leq s \leq t, k(t, t) \geq 0$ , e tale che risulti identicamente per  $t > 0$ ,

$$(6) \quad \int_0^t k(t, s) ds \equiv 1.$$

Vogliamo dimostrare che è possibile determinare  $t_0 > 0$  tale che, per  $0 \leq t \leq t_0$ , deve risultare identicamente  $y(t) \equiv 0$ .

Infatti, tenuto conto della (6), la (5) può essere scritta

$$\int_0^t y(t) k(t, s) ds \leq \int_0^t k(t, s) y(s) ds,$$

ossia

$$(7) \quad \int_0^t k(t, s) [y(t) - y(s)] ds \leq 0.$$

(3) Per semplicità abbiamo enunciato il teorema partendo dalle condizioni iniziali  $x(0) = x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$  ma, come risulterà evidente dalla dimostrazione del teorema, non si altera la sostanza del ragionamento partendo dalle condizioni iniziali  $x(0) = c_0, x^{(1)}(0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$  dove  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  sono  $n$  costanti assegnate qualsiasi.

Essendo  $y(s)$  continua in  $0 \leq s \leq t$ , con  $y(0) = 0$ , esisterà almeno un punto  $t_0 > 0$  in cui  $y(s)$  assumerà il suo valore massimo e pertanto, per  $0 \leq s \leq t_0$ , sarà  $y(s) \leq y(t_0)$ .

Dalla (7) sarà in particolare, per  $t = t_0$ ,

$$(8) \quad \int_0^{t_0} k(t_0, s) [y(t_0) - y(s)] ds \leq 0.$$

Ma per ipotesi è  $k(t_0, s) > 0$ ,  $0 < s < t_0$  ed essendo  $y(t_0) - y(s) \geq 0$ , la (8) sarà possibile soltanto se  $y(t_0) - y(s) \equiv 0$  in  $(0, t_0)$ , ossia se  $y(s)$  è costante in tale intervallo. Ma la  $y(s)$  è continua e siccome, per ipotesi è  $y(0) = 0$ , si avrà  $y(s) \equiv 0$  per  $0 \leq s \leq t_0$  e il lemma è così dimostrato.

3. Per la dimostrazione del teorema enunciato osserviamo in primo luogo che l'equazione (3) può essere scritta, tenuto conto delle condizioni iniziali, nella forma integrale:

$$(9) \quad x(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, x(s), x^{(1)}(s), \dots, x^{(n-1)}(s)) ds^{(4)},$$

e se  $x_1(t)$  ed  $x_2(t)$  sono due eventuali soluzioni dell'equazione data ad essa soddisfacenti in  $0 \leq r \leq t_0$ , si ha:

$$(10) \quad x_1(t) - x_2(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} [f(s, x_1(s), \dots, x_1^{(n-1)}(s)) - f(s, x_2(s), \dots, x_2^{(n-1)}(s))] ds$$

e quindi, tenuto conto della (4),

$$(10_1) \quad |x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \left[ L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + \right. \\ \left. + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)}(s) - x_2^{(1)}(s)|}{s^{n-1}} + \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} \right] ds,$$

(4) Partendo dalle condizioni iniziali  $x(0) = c_0$ ,  $x^{(1)}(0) = c_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$  la (9) si scrive:

$$(9_1) \quad x(t) = c_0 + c_1 \frac{t}{1!} + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + c_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s, x(s), x^{(1)}(s), \dots, x^{(n-1)}(s)) ds,$$

e il polinomio  $c_0 + c_1 \frac{t}{1!} + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + c_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$  resta lo stesso se la (9<sub>1</sub>) si scrive per due eventuali soluzioni distinte  $x_1(t)$  ed  $x_2(t)$  della (3).

ed anche:

$$(10_2) \quad |x_1^{(1)}(t) - x_2^{(1)}(t)| \leq \frac{1}{(n-2)!} \int_0^t (t-s)^{n-2} \left[ L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + \right. \\ \left. + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)}(s) - x_2^{(1)}(s)|}{s^{n-1}} + \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} \right] ds$$

.....

$$(10_{n-1}) \quad |x_1^{(n-2)}(t) - x_2^{(n-2)}(t)| \leq \frac{1}{1!} \int_0^t (t-s) \left[ L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + \dots \right. \\ \left. \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} \right] ds,$$

$$(10_{n-2}) \quad |x_1^{(n-1)}(t) - x_2^{(n-1)}(t)| \leq \int_0^t \left[ L_n \frac{|x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + \dots \right. \\ \left. \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} \right] ds.$$

Moltiplicando queste ultime disequazioni  $(10_1), (10_2), \dots, (10_n)$  rispettivamente per

$$L_n t^{-n}, L_{n-1} t^{-(n-1)}, \dots, L_1 t^{-1}, \quad (t > 0),$$

e sommando membro a membro, si ottiene

$$L_n \frac{|x_1(t) - x_2(t)|}{t^n} + L_{n-1} \frac{|x_1^{(1)}(t) - x_2^{(1)}(t)|}{t^{n-1}} + \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(t) - x_2^{(n-1)}(t)|}{t} \leq \\ \leq \int_0^t \left[ \frac{L_n t^{-n} (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1} t^{-(n-1)} (t-s)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + L_1 t^{-1} \right] \left[ \frac{L_n |x_1(s) - x_2(s)|}{s^n} + \dots \right. \\ \left. \dots + L_1 \frac{|x_1^{(n-1)}(s) - x_2^{(n-1)}(s)|}{s} \right] ds,$$

e posto per semplicità

$$\frac{L_n |x_1(t) - x_2(t)|}{t^n} + \frac{L_{n-1} |x_1^{(1)}(t) - x_2^{(1)}(t)|}{t^{n-1}} + \dots + \frac{L_1 |x_1^{(n-1)}(t) - x_2^{(n-1)}(t)|}{t} = y(t)$$

e

$$k(t, s) = \frac{L_n t^{-n} (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1} t^{-(n-1)} (t-s)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + L_1 t^{-1}$$

si avrà

$$(11) \quad y(t) \leq \int_0^t k(t, s) y(s) ds.$$

Osserviamo ora che le funzioni  $x = x_1(t)$  ed  $x = x_2(t)$  hanno entrambe derivata ennesima continua in  $S_0$  (cioè il punto  $(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \equiv$



$\equiv (0, 0, 0, \dots, 0)$  incluso) giacché per ipotesi la  $f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$  è continua in  $S_0$ , e pertanto risulterà  $x_1^{(k)}(0) = x_2^{(k)}(0)$  non solo per  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , ma anche  $k = n$ .

Se indichiamo allora con  $V_k(t)$  le funzioni definite da

$$V_k(t) = \frac{x_1^{(k)}(t) - x_2^{(k)}(t)}{t^{n-k}}, \quad \text{per } 0 < t \leq t_0,$$

$$V_k(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1),$$

le  $V_k(t)$  risulteranno continue in  $0 \leq t \leq t_0$ .

Lo stesso accadrà per la funzione

$$y(t) = \frac{L_n |x_1(t) - x_2(t)|}{t^n} + \frac{L_{n-1} |x_1^{(1)}(t) - x_2^{(1)}(t)|}{t^{n-1}} + \dots + \frac{L_1 |x_1^{(n-1)}(t) - x_2^{(n-1)}(t)|}{t}$$

sarà cioè  $y(t)$  continua in  $0 \leq t \leq t_0$ , con  $y(0) = 0$ .

Tenuto conto che è

$$\begin{aligned} \int_0^t k(t, s) ds &= \int_0^t \left[ \frac{L_n t^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{L_{n-1} t^{-(n-1)} (t-s)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + L_1 t^{-1} \right] ds = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{L_k}{k!} = 1 \end{aligned}$$

per il lemma dimostrato precedentemente esisterà un  $t_0 \leq t^0$  tale che per  $0 \leq t \leq t_0$  la  $y(t)$  risulterà identicamente nulla. Lo stesso avverrà in particolare per  $x_1(t) - x_2(t)$  e pertanto sarà

$$x_1(t) \equiv x_2(t)$$

per  $0 \leq t \leq t_0$ , c. v. d.

**Analisi.** — *La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile.* Nota di EMILIO BAIADA, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

È nota l'importanza dei concetti di funzione a variazione limitata e di assoluta continuità nella teoria moderna delle funzioni di variabile reale.

Per le funzioni  $f(x)$  di una sola variabile definite su un intervallo  $(a, b)$ , seguendo Jordan, si definisce *variazione totale* di  $f(x)$  su  $(a, b)$  e si indica con

$$V[f(x); (a, b)],$$

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

l'estremo superiore dei numeri  $\sum_{i=0}^n |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$  ottenuti relativamente a un'arbitraria suddivisione  $a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n = b$ , dell'intervallo  $(a, b)$  in un numero finito qualunque di parti. Se la variazione totale è un numero finito,  $f(x)$  si dice a « *variazione limitata* ».

Dal punto di vista geometrico la curva  $y = f(x)$ ,  $(a, b)$  è di *lunghezza finita*, ossia è *rettificabile*, allora e allora soltanto che la  $f(x)$  è a variazione limitata (Jordan).

Si dice « *assolutamente continua* », seguendo Arzelà, una funzione  $f(x)$  su  $(a, b)$ , se ad ogni  $\varepsilon > 0$  si può associare un  $\delta > 0$ , tale che, se  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, m)$  è un qualunque numero di intervalli disgiunti di  $(a, b)$  tali che

$$\sum_{i=1}^{m-1} |x_{i+1} - x_i| < \delta, \quad \text{è} \quad \sum_{i=1}^{m-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \varepsilon.$$

È chiaro che la classe delle funzioni assolutamente continue è una sottoclasse della classe delle funzioni a variazione limitata. Anzi essa è una sottoclasse *propria* della classe delle funzioni *continue* a variazione limitata: infatti il Vitali<sup>(1)</sup> ha dato un metodo per costruire delle funzioni continue, a variazione limitata, ma non assolutamente continue.

Si può dare un senso preciso alla frase: le funzioni continue a variazione limitata sono « infinitamente più numerose » delle funzioni assolutamente continue.

È noto che se una funzione è assolutamente continua, la propria variazione totale è data dalla formula

$$(1) \quad V[f(x); (a, b)] = \int_a^b \left| \frac{df}{dx} \right| dx,$$

dove  $df/dx$  è la derivata della  $f(x)$  dove esiste e l'integrale è inteso nel senso del Lebesgue.

La formula (1) *non* è vera in generale per le funzioni semplicemente continue a variazione limitata, pur entrambi i membri della (1) potendo avere senso: gli esempi costruiti dal Vitali, ai quali è stato accennato sopra chiariscono tale fatto. Anzi per quanto detto più sopra si può aggiungere che il campo di validità della (1) è molto ristretto rispetto a quello di non validità, intendendo come non valida la (1) quando entrambi i membri di essa hanno significato, ma hanno valore diverso.

Analogamente, se  $f(x)$  è assolutamente continua, la curva  $y = f(x)$ ;  $(a, b)$  è rettificabile e la propria lunghezza, che indichiamo con  $L[f(x)]$ ;

(1) Per le definizioni di variazione, assoluta continuità e per l'esempio di Vitali, vedere per esempio VITALI e SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* (Zanichelli).

$(a, b]$  è data dalla formola <sup>(2)</sup>

$$(2) \quad L[f(x); (a, b)] = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

dove  $f'$  è la derivata di  $f(x)$  dove esiste e l'integrale è inteso nel senso del Lebesgue.

La (2) non è vera in generale per le funzioni continue a variazione limitata; gli stessi esempi ai quali abbiamo fatto riferimento sopra sono decisivi.

Si può pensare sia di un certo interesse proporre delle formole che sostituiscano le (1) e (2) e che siano valide sempre, specie se si vuole che sia compito ultimo dell'Analisi quello di fornire delle formole che siano vere ogni qualvolta esse abbiano senso.

In questo ordine di idee ci sembra notevole il seguente teorema <sup>(3)</sup>:

*Nel caso di funzioni  $y = f(x)$ ,  $(a, b)$ , continue a variazione limitata, valgono le seguenti formole:*

$$(1') \quad V[f(x); (a, b)] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| dx,$$

$$(2') \quad L[f(x); (a, b)] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \sqrt{1 + \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|^2} dx,$$

dove gli integrali sono intesi nel senso di Riemann e  $f(x) = f(b)$  per  $x > b$  e  $f(x) = f(a)$  per  $x < a$ .

Le formole (1') e (2') oltre al fatto di valere in casi più generali delle (1) e (2), fanno uso dell'integrale di Riemann anziché di quello di Lebesgue. Pertanto mentre le formole (1) e (2) richiedono tre passaggi al limite (uno per il calcolo della derivata e due per l'integrale, di cui quello per la derivata è di carattere puntuale) le formole (1') e (2') richiedono solo due passaggi al limite ed entrambi di carattere globale.

Le formole (1') e (2'), sopra proposte, mettono in migliore luce il significato delle formole (1) e (2), le quali possono allora essere interpretate nel modo seguente:

*Se  $f(x)$ , oltre ad essere continua a variazione limitata è assolutamente continua, nei secondi membri delle (1') e (2') si può passare al limite sotto il segno di integrale, pur di interpretare l'integrale nel senso di Lebesgue. Si ottengono così le (1) e (2).*

D'altra parte le formole (1') e (2') valgono in entrambi i versi, nel senso che se esistono finiti i limiti dei secondi membri la funzione continua  $f(x)$  è

(2) Vedere L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni* (Zanichelli), vol. I, N. 64, pp. 179-182.

(3) Le dimostrazioni saranno date in un lavoro di E. BAIADA e L. CARDAMONE con titolo analogo e di prossima pubblicazione negli « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa ».

a variazione limitata e vale la (1') e la curva  $y = f(x)$  è rettificabile e la sua lunghezza è data dalla (2').

Una formola perfettamente analoga alla (2') vale per le curve scritte in forma parametrica.

Conviene osservare che ci siamo limitati alla considerazione di funzioni e curve continue, però è chiaro che la formola (1') vale in casi più generali, ma poiché la lunghezza di una curva discontinua non ha molto interesse in quanto coincide con la lunghezza di una curva continua facilmente ottenibile da essa ed abbiamo voluto tenere abbinate le formole (1') e (2') ci è sembrato più opportuno fare la limitazione imposta dalla continuità.

2. È noto il gran impulso che hanno dato i concetti di variazione totale e di assoluta continuità nello sviluppo del Calcolo delle Variazioni, specie nella parte che si riferisce alla sistemazione logica ed ambientale (ricerca del campo di variabilità) e nel così detto metodo diretto.

Data una funzione  $f(x, y, u, v)$  definita per  $(x, y)$  appartenente a un campo aperto  $C$ ;  $u, v$ , qualunque, continua e positivamente omogenea di grado uno rispetto a  $u$  e  $v$ , si definisce *integrale del calcolo delle variazioni* relativamente all'integrando  $f$  e a una curva  $\mathcal{C}$  appartenente tutta al campo  $C$  e di equazioni parametriche  $x(t), y(t); (t_0, t_1)$ , l'integrale

$$(3) \quad \mathfrak{I}_{\mathcal{C}} = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t) ; x'(t), y'(t)] dt$$

dove l'integrale è inteso nel senso del Lebesgue e  $x'(t), y'(t)$  indicano le derivate di  $x(t), y(t)$  dove esistono e lo zero dove non esistono.

Nel caso che la curva  $\mathcal{C}$ , oltre a essere *continua è rettificabile, tale integrale esiste sempre* <sup>(4)</sup>.

L'inconveniente più grave della definizione dell'integrale (3) è che il suo valore *dipende* dalla parametrizzazione della curva  $\mathcal{C}$  e per tanto *non* è atto a rappresentare un ente geometrico. Per convincersene basta prendere per integrando la funzione  $\sqrt{u^2 + v^2}$  ed è certo che l'integrale (3) fornisce la lunghezza della curva solo se la rappresentazione  $x(t), y(t)$  è assolutamente continua, mentre è stato già detto che ciò in generale *non* avviene.

Tale inconveniente è stato superato nella teoria del Calcolo delle Variazioni in due modi diversi. Uno è quello di restringere la considerazione degli integrali (3) solo al caso che la curva  $\mathcal{C}$  abbia una rappresentazione assolutamente continua. Se la curva è rettificabile una tale rappresentazione esiste sempre, ma va osservato che tale possibilità è del tutto teorica poiché per raggiungere tale rappresentazione bisogna conoscere la lunghezza della curva e quindi si è ricondotti alla questione di cui si occupa la formola (1')

(4) Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (Zanichelli), vol. I, p. 222, nota a pie' di pagina.



Weierstrass invece ha proposto di sostituire al secondo membro della (3) una nuova definizione di integrale che da Lui ha preso nome, tale integrale, nel caso che la curva sia assolutamente continua, ha lo stesso valore della (3) e risulta invariante rispetto alle varie parametrizzazioni <sup>(5)</sup>. L'integrale di Weierstrass ha però l'inconveniente di non fare uso delle teorie già costruite per l'integrazione e riesce allora di laboriosa manipolazione.

Si può dimostrare <sup>(6)</sup> che la formula

$$(3') \quad \mathcal{J}_{\mathcal{C}} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} f \left[ x(t), y(t); \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right] dt,$$

dove l'integrale è stato inteso nel senso di Riemann e  $x(t) = x(t_0)$ ,  $y(t) = y(t_0)$  per  $t < t_0$  e  $x(t) = x(t_1)$ ,  $y(t) = y(t_1)$  per  $t > t_1$ , da per  $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$  un valore invariante rispetto alle parametrizzazioni della curva  $\mathcal{C}$  continua e rettificabile, il quale coincide con quello dell'integrale di Weierstrass relativo alla stessa curva e con quello dell'integrale (3) nel caso che  $x(t)$  e  $y(t)$  siano assolutamente continue.

Per l'integrale (3') si può pertanto sviluppare una teoria geometrica e diretta del Calcolo delle Variazioni.

Analoga considerazione vale per l'integrale in forma ordinaria.

**Analisi.** — *Sistemi differenziali asintoticamente equivalenti.* Nota di ROBERTO CONTI, presentata <sup>(\*)</sup> dal Socio G. SANSONE.

#### 1. Il sistema lineare <sup>(1)</sup>.

$$(A) \quad \dot{y} = A(t)y, \quad t_0 \leq t; \quad \dot{y} = dy/dt$$

ed il sistema

$$(B) \quad \dot{x} = A(t)x + g(t, x), \quad t_0 \leq t, \quad \dot{x} = dx/dt$$

(5) Vedi L. TONELLI, *Sui massimi e minimi del Calcolo delle Variazioni*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », vol. 32, pp. 297-337 (1911).

(6) Le dimostrazioni saranno date in un lavoro in collaborazione e di prossima pubblicazione dal titolo: *Un integrale analogo a quello di Weierstrass nel Calcolo delle Variazioni*.

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) In tutto il seguito si usano notazioni vettoriali: il lettore può consultare, anche per quando riguarda la terminologia e i fondamenti, la Monografia: G. SANSONE-R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, Monografie Matematiche a cura del C.N.R. (Roma, 1956), che indicheremo con «M».

Con  $A(t)$  indichiamo una matrice  $n \times n$  di elementi  $a_{ik}(t)$  funzioni della variabile reale  $t$  per  $t_0 \leq t$ ; le  $a_{ik}(t)$  saranno supposte reali o complesse ed inoltre misurabili e sommabili in ogni tratto finito della semiretta  $t_0 \leq t$ .

Analogamente  $g(t, x)$  indica un vettore (o matrice  $n \times 1$ ) di elementi  $g_i(t, x)$  funzioni reali o complesse della variabile  $t$  e del vettore  $x$ , tali che per ogni punto dello spazio  $(t, x)$  con  $t_0 \leq t$  passi una ed una sola soluzione del sistema (B) e tale soluzione dipenda con continuità dal punto iniziale.

Per definizione è  $|A(t)| = \sum_{ik} |a_{ik}(t)|$ ,  $|g(t, x)| = \sum_i |g_i(t, x)|$ ,  $|x| = \sum_i |x_i|$ , ecc.

«quasi-lineare», vale a dire con  $g$  che soddisfa le condizioni

$$(1) \quad \int_{t_0}^{\infty} |g(\tau, 0)| d\tau = \gamma < \infty$$

$$(2) \quad |g(t, x') - g(t, x'')| \leq \lambda(t) |x' - x''|$$

$$(3) \quad \int_{t_0}^{\infty} \lambda(\tau) d\tau = \lambda < \infty$$

si dicono asintoticamente equivalenti se esiste una trasformazione bicontinua  $\omega$  del piano  $t = t_0$  in sé in modo che se  $\xi, \eta$  sono due punti corrispondenti in  $\omega$  si ha

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0$$

avendo indicato con  $y(t)$  quella soluzione di (A) per cui  $y(t_0) = \eta$  e con  $x(t)$  quella soluzione di (B) per cui  $x(t_0) = \xi$ .

Vogliamo provare il

TEOREMA I. — *Se il sistema (A) è uniformemente stabile allora (A) e (B) sono asintoticamente equivalenti.*

È noto che l'essere (A) uniformemente stabile equivale all'esistenza di una costante  $c > 0$  per cui detta  $Y(t)$  una matrice fondamentale di (A), ad esempio quella principale, è

$$(5) \quad |Y(t) Y^{-1}(\tau)| \leq c, \quad t_0 \leq \tau \leq t < \infty$$

ed è pure noto che nelle nostre ipotesi qualunque soluzione  $x(t)$  di (B) è uniformemente stabile e quindi limitata <sup>(2)</sup>.

Pertanto, se  $x(t)$  è una qualunque soluzione di (B), si ha per  $t_0 < t_1$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |Y(t) Y^{-1}(\tau)| |g(\tau, x(\tau))| d\tau &\leq c \int_{t_0}^{t_1} |g(\tau, x(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq c \int_{t_0}^{t_1} \{ |g(\tau, x(\tau)) - g(\tau, 0)| + |g(\tau, 0)| \} d\tau \leq \\ &\leq c \{ \lambda \max_{(t_0, \infty)} |x(t)| + \gamma \}, \end{aligned}$$

cosicchè per  $t_1 \rightarrow \infty$  esiste finito

$$\int_{t_0}^{\infty} Y(t) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau$$

(2) Cfr. R. CONTI, *Sulla «equivalenza asintotica» dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie*, «Annali di Mat.», (4), 41, 95-104 (1955); in particolare ved. il Lemma a pag. 97.

e, in particolare, esiste finito

$$\int_{t_0}^{\infty} Y(t_0) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau$$

qualunque sia la soluzione  $x(t)$  di (B).

Se ad ogni punto  $\xi$  del piano  $t = t_0$  associamo il punto

$$(6) \quad \eta = \xi + \int_{t_0}^{\infty} Y(t_0) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau, \xi)) d\tau$$

dove  $x(t, \xi)$  indica quella soluzione di (B) tale che  $x(t_0, \xi) = \xi$ , abbiamo una funzione  $\eta = \eta(\xi)$  che è continua. Infatti se

$$\eta' = \xi' + \int_{t_0}^{\infty} Y(t_0) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x'(\tau, \xi')) d\tau,$$

$$\eta'' = \xi'' + \int_{t_0}^{\infty} Y(t_0) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x''(\tau, \xi'')) d\tau$$

si ha

$$|\eta' - \eta''| \leq |\xi' - \xi''| + c\lambda \max_{(t_0, \infty)} |x'(t, \xi') - x''(t, \xi'')|$$

e poiché, come si è osservato, ogni soluzione di (B) è uniformemente stabile, segue che ad ogni  $\varepsilon > 0$  si può associare un  $\delta > 0$  in modo che se  $|\xi' - \xi''| \leq \delta$  sia  $|\eta' - \eta''| < \varepsilon$ .

Dobbiamo ora provare che la  $\eta = \eta(\xi)$  ammette una funzione inversa, necessariamente continua; con ciò avremo definito una trasformazione bicon continua  $\omega$  del piano  $t = t_0$  in sé.

È immediato verificare che se  $x(t)$  è una qualunque soluzione di (B) allora

$$(7) \quad y(t) = x(t) + \int_t^{\infty} Y(t) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau$$

è soluzione di (A); ma si può provare pure che data  $y(t)$ , soluzione di (A), esiste almeno una  $x(t)$  soluzione di (7), cioè di

$$(7') \quad x(t) = y(t) - \int_t^{\infty} Y(t) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau$$

e, in definitiva, di (B).

Per questo basterà usare il metodo delle approssimazioni successive definendo per  $t_0 \leq t$

$$x_0(t) = y(t) \quad , \quad x_{n+1}(t) = y(t) - \int_t^{\infty} Y(t) Y^{-1}(\tau) g(\tau, x_n(\tau)) d\tau,$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

ed osservare che si ha

$$\max_{(t_0, \infty)} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq c\lambda \max_{(t_0, \infty)} |x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq (c\lambda)^n \max_{(t_0, \infty)} |x_1(t) - y(t)|$$

$$\max_{(t_0, \infty)} |x_1(t) - y(t)| \leq c \{ \lambda \max_{(t_0, \infty)} |y(t)| + \gamma \}$$

e poiché non è restrittivo supporre  $c\lambda < 1$  <sup>(3)</sup> segue l'asserto.

D'altronde la soluzione della (7') ora trovata è univocamente determinata dalla data  $y(t)$ , poiché se in corrispondenza a questa  $y(t)$  vi fossero due soluzioni,  $x'(t)$ ,  $x''(t)$ , si avrebbe

$$|x'(t) - x''(t)| \leq c \int_{t_0}^{\infty} \lambda(\tau) |x'(\tau) - x''(\tau)| d\tau$$

e di qui si deduce  $(1 - c\lambda) \max_{(t_0, \infty)} |x'(t) - x''(t)| \leq 0$  ossia  $x'(t) \equiv x''(t)$ .

In conclusione se ad un qualunque  $\eta$  associamo la soluzione  $y(t)$  di (A) che vi passa per  $t = t_0$ , la corrispondente soluzione  $x(t)$  di (7'), ossia di (B), ci dà un punto  $\xi = x(t_0)$  e si è invertita la  $\eta(\xi)$  ottenendo, come si voleva, una trasformazione bicontinua  $\omega$  del piano  $t = t_0$  in sé.

Ci resta ora soltanto da provare che tra la  $y(t)$  e la  $x(t)$  legate dalla (7) vale la relazione (4). Dalla (7) si ha

$$|y(t) - x(t)| \leq \int_t^{\infty} \{c\lambda(\tau) |y(\tau) - x(\tau)| + [c\lambda(\tau) |y(\tau)| + c |g(\tau, 0)|]\} d\tau$$

e da questa si deduce <sup>(4)</sup>

$$|y(t) - x(t)| \leq \int_t^{\infty} \{c\lambda(\tau) |y(\tau)| + c |g(\tau, 0)|\} \exp\left(\int_t^{\tau} c\lambda(\theta) d\theta\right) d\tau$$

$$\leq c \exp(c\lambda) \left[ \max_{(t_0, \infty)} |y(t)| \int_t^{\infty} \lambda(\tau) d\tau + \int_t^{\infty} |g(\tau, 0)| d\tau \right]$$

da cui l'asserto.

(3) Se fosse  $c\lambda \geq 1$  basterebbe sostituire a  $t_0$  un  $t_1$  più grande, operando sul piano  $t = t_1$  invece che sul piano  $t = t_0$ : la supposta dipendenza continua delle soluzioni di (B) dal punto iniziale fa concludere nel modo voluto.

(4) Con la stessa tecnica usata in «M» per provare la disuguaglianza di Gronwall (pp. 15-16) si prova che se  $\lambda(t)$ ,  $u(t)$ ,  $v(t)$  sono tre funzioni assolutamente integrabili su

$(t_0, \infty)$ , tali che  $u(t) \leq \int_t^{\infty} [\lambda(\tau) u(\tau) + v(\tau)] d\tau$  e se  $\lambda(t)$  è non negativa, allora è anche

$$u(t) \leq \int_t^{\infty} v(\tau) \exp\left(\int_t^{\tau} \lambda(\theta) d\theta\right) d\tau.$$



2. Il teorema I sotto l'ipotesi aggiuntiva che  $A(t)$  sia costante si deve ad H. Weyl, sotto quella che  $A(t)$  sia riducibile a V. Ia. Iakubovich, sotto altre ipotesi che assicurano la stabilità uniforme di (A) all'Autore <sup>(5)</sup>.

3. Nel caso che (B) sia lineare

$$(B_0) \quad \dot{x} = B(t)x = A(t)x + [B(t) - A(t)]x$$

il teorema I dà luogo al corollario espresso dal

TEOREMA II. - Se (A) è uniformemente stabile e se

$$(8) \quad \int_{t_0}^{\infty} |B(t) - A(\tau)| d\tau < \infty$$

allora (A) e  $(B_0)$  sono asintoticamente equivalenti.

Più generalmente possiamo provare il seguente

TEOREMA III. - Se (A) è uniformemente stabile esso è asintoticamente equivalente ad ogni sistema  $(B_0)$  al quale sia legato da una  $t_{\infty}$ -similitudine <sup>(6)</sup> mediante una matrice  $T(t)$  per la quale esista

$$(9) \quad T(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(t), \quad \det T(\infty) \neq 0.$$

Mediante la  $T(t)$  ora detta effettuiamo per ciascun  $t \geq t_0$  la trasformazione

$$x = T(t)z$$

la quale muta ogni  $y(t)$  soluzione di (A) in una  $z(t)$  soluzione del sistema

$$(C) \quad \dot{z} = A(t)z - T^{-1}(t)[\dot{T}(t) + T(t)A(t) - B(t)T(t)]z.$$

Poiché  $T^{-1}(t)$  deve essere limitata, dal teorema II segue che (A) e (C) sono asintoticamente equivalenti.

D'altronde se  $z(t)$  è una qualunque soluzione di (C) anche  $T(\infty)z(t)$  è una soluzione di (C) e poiché  $x = T(t)z$  è soluzione di (B) si ha

$$x - T(\infty)z = [T(t) - T(\infty)]z$$

e per essere  $z$  limitata da (9) segue che anche (B) e (C) sono asintoticamente equivalenti. Poiché l'equivalenza asintotica è una relazione transitiva segue l'asserto.

4. Che il teorema III rappresenti un'effettiva generalizzazione del teorema II segue dal fatto che la (8) esprime che  $A(t)$  e  $B(t)$  sono legate dalla particolare  $t_{\infty}$ -similitudine corrispondente a  $T(t) = I$ , matrice unità.

Il teorema III estende inoltre i risultati contenuti in una recente Nota dell'Autore <sup>(7)</sup>.

(5) Cfr. anche per la bibliografia il lavoro cit. in <sup>(2)</sup>.

(6) Cfr. «M», p. 559, oppure: R. CONTI, *Sulla  $t$ -similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (8), 19, 247-250, (1955).

(7) R. CONTI, *Sulla  $t_{\infty}$ -similitudine tra matrici e l'equivalenza asintotica dei sistemi differenziali lineari*, in corso di pubblicazione sulla «Rivista di Matematica dell'Università di Parma».

**Plasticità.** — *Soluzioni ad un parametro del problema plastico degli sforzi piani.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (\*) dal Corrisp. B. FINZI.

INTRODUZIONE. — Come è ben noto, il problema plastico ristretto degli sforzi piani è governato dal sistema:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \qquad (2) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (\cdot)$$

$$(3) \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau^2 = 3 H^2.$$

Le (1) e (2) (nelle quali  $\sigma_x = p_{xx}$ ,  $\tau = p_{xy}$ ,  $\sigma_y = p_{yy}$  rappresentano le tre componenti cartesiane distinte del tensore degli sforzi) sono le equazioni indefinite di equilibrio dei continui in assenza di forze di massa, la (3) (nella quale  $H$  denota la costante di plasticità) traduce la condizione di plasticità di von Mises. Alle (1), (2), (3) occorre poi aggiungere le condizioni al contorno, le quali, affinché il problema sia ristretto anche in sede definita, cioè, come suol dirsi, staticamente determinato, devono essere opportune e comunque coinvolgere le sole forze.

Mi propongo in questa Nota di individuare la più generale soluzione ad un parametro del sistema  $(\cdot)$ , vale a dire la più generale soluzione nella quale, scontata la condizione di plasticità (3), gli sforzi  $\sigma_x$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_y$  anziché dipendere da due parametri  $\alpha$  e  $\beta$  funzioni di  $x$  e di  $y$ , dipendono da un sol parametro funzione delle stesse variabili. Per risolvere questo problema applicherò il metodo generale che ho esposto in una precedente Nota e che mi ha portato ad individuare la più generale soluzione ad un parametro del problema plastico ristretto della deformazione piana (1).

La condizione di plasticità (3) è formalmente analoga alla condizione:

$$(3') \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2 \tau)^2 = 4 H^2$$

che riguarda il problema della deformazione piana. Si deve però tener presente che, interpretando  $\sigma_x$ ,  $2 \tau$ ,  $\sigma_y$  quali coordinate cartesiane del punto corrente di una superficie, mentre la (3) rappresenta un ellissoide, la (3') rappresenta un cilindro circolare retto. Le linee caratteristiche dei due problemi sono perciò di diversa natura: sempre reali per il primo problema, reali o immaginarie per il secondo (2); ed è ben noto che le gravi difficoltà di indole matematica che si riscontrano nei problemi di sforzi piani (del tutto simili a quelle che si incontrano nella dinamica dei fluidi comprimibili in

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) E. STORCHI, *Soluzioni ad un parametro del problema plastico della deformazione piana*, « Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXII, fasc. 3, 1957.

(2) Vedasi per una più ampia discussione sulle caratteristiche nei problemi plastici piani il recente lavoro di L. FINZI, *Scarichi e ritorni elastici locali in elastoplasticità piana*, « Suppl. Nuovo Cimento », 1957.

regime transonico), sono legate essenzialmente alla circostanza che sono sconosciuti a priori i confini delle regioni plastiche nelle quali le equazioni del problema presentano tipo analitico diverso.

SOLUZIONI AD UN PARAMETRO DEL PROBLEMA RISTRETTO. - Facendo diretto riferimento al metodo esposto nel lavoro citato e con l'intento di valerci dell'osservazione con la quale tale lavoro si chiude, stabiliamo una opportuna rappresentazione parametrica degli sforzi.

Premettiamo la seguente proposizione:

*Nel problema degli sforzi piani, la più generale rappresentazione parametrica degli sforzi;*

$$(4) \quad \sigma_x = \sigma_x(\alpha, \beta) \quad , \quad \tau = \tau(\alpha, \beta) \quad , \quad \sigma_y = \sigma_y(\alpha, \beta)$$

*nella quale le linee  $\alpha(x, y) = \text{cost.}$  sono le isobare, è la seguente:*

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_x = H \left\{ \sqrt{3} F(\alpha) \pm \sqrt{1 - F^2(\alpha) - G^2(\alpha, \beta)} \right\} \\ \tau = HG(\alpha, \beta) \\ \sigma_y = H \left\{ \sqrt{3} F(\alpha) \mp \sqrt{1 - F^2(\alpha) - G^2(\alpha, \beta)} \right\} \end{cases}$$

*avendo indicato con  $F = F(\alpha)$ ,  $G = G(\alpha, \beta)$  due funzioni la cui arbitrarietà è limitata dalla sola condizione  $F^2(\alpha) + G^2(\alpha, \beta) \leq 1$ .*

Poniamo:

$$(6) \quad \sigma_x = f(\alpha, \beta) \quad ; \quad \tau = g(\alpha, \beta) \quad ; \quad \sigma_y = h(\alpha, \beta).$$

Dovendo  $\sigma_x, \tau, \sigma_y$  ubbidire alla condizione (3) di plasticità ed inoltre alla seconda condizione:

$$\sigma_x + \sigma_y = \psi(\alpha)$$

si trova

$$(7) \quad f + h = \psi(\alpha) \quad ; \quad fh = \frac{1}{3} \psi^2(\alpha) + g^2 - H^2.$$

Posto:

$$(8) \quad \psi(\alpha) = 2 \sqrt{3} HF(\alpha) \quad ; \quad g(\alpha, \beta) = HG(\alpha, \beta)$$

di qui segue subito allora:

$$f(\alpha, \beta) = H \left\{ \sqrt{3} F(\alpha) \pm \sqrt{1 - F^2(\alpha) - G^2(\alpha, \beta)} \right\}$$

e quindi, per la prima delle (7) e per le (8), si desumono immediatamente le espressioni (5) per gli sforzi.

Sussiste poi ovviamente il seguente corollario:

*La più generale rappresentazione parametrica degli sforzi, nella quale le  $\alpha(x, y) = \text{cost.}$ , sono le isobare e le  $\beta(x, y) = \text{cost.}$  sono le linee di egual taglio, è la seguente:*

$$(5') \quad \begin{cases} \sigma_x = H \left\{ \sqrt{3} F(\alpha) \pm \sqrt{1 - F^2(\alpha) - G^2(\beta)} \right\} \\ \tau = HG(\beta) \\ \sigma_y = H \left\{ \sqrt{3} F(\alpha) \mp \sqrt{1 - F^2(\alpha) - G^2(\beta)} \right\} \end{cases}$$

avendo indicato con  $F(\alpha)$  e  $G(\beta)$  due funzioni arbitrarie che soddisfino la limitazione  $F^2(\alpha) + G^2(\beta) \leq 1$  <sup>(3)</sup>.

Particolarizziamo ora opportunamente le funzioni  $F(\alpha)$  e  $G(\alpha, \beta)$  che compaiono nelle (5). Assumendo:

$$F(\alpha) = \sin \alpha \quad ; \quad G(\alpha, \beta) = \cos \alpha \cos \beta$$

e ritenendo i segni superiori, si trova la seguente rappresentazione parametrica degli sforzi:

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_x = H \left( \sqrt{3} \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta \right) \\ \tau = H \cos \alpha \cos \beta \\ \sigma_y = H \left( \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha \sin \beta \right) \end{cases}$$

che, per la sua semplicità, si rivela assai utile ai nostri fini. Osserviamo inoltre che i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  ora introdotti sono adimensionali, risultando:

$$\alpha = \arcsen \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2 \sqrt{3} H} \quad ; \quad \beta = \arctg \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \tau}$$

Si deve infine rilevare che nelle (9) agli argomenti  $\alpha$  e  $\beta$  possono sostituirsi, se si vuole, gli argomenti  $\alpha + d$ ,  $\beta + c$  con  $d, c$  costanti arbitrarie.

Le equazioni (1), (2) indefinite di equilibrio ci danno allora in virtù delle (9):

$$(10) \quad \begin{cases} \cos \alpha \sqrt{3} \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \sin \alpha \sin \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} - \sin \alpha \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \cos \alpha \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0 \\ -\sin \alpha \cos \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \cos \alpha \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} + \cos \alpha \sqrt{3} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \sin \alpha \sin \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \cos \alpha \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Il sistema (10) è un sistema differenziale nelle due incognite  $\alpha = \alpha(x, y)$ ,  $\beta = \beta(x, y)$ . Se si riesce ad integrare tale sistema, sostituendone le soluzioni nelle (9) si trovano le più generali espressioni per gli sforzi, cioè la più generale soluzione del problema plastico degli sforzi piani in sede indefinita. È ovvio poi che una soluzione particolare del sistema (10) si ottiene assumendo  $\alpha$  e  $\beta$  costanti; e si conclude pertanto che la più generale soluzione del problema nella quale gli sforzi sono tutti costanti, è data dalle formule (9) nelle quali  $\alpha$  e  $\beta$  devono riguardarsi come costanti arbitrarie. Allo scopo invece di determinare la più generale soluzione *ad un parametro* del problema plastico, imponiamo al parametro  $\beta$  di essere funzione di  $\alpha$ , ponendo:  $\beta = \beta(\alpha)$ .

(3) Il teorema ora dimostrato non è indispensabile per i nostri fini, ma mi è sembrato opportuno segnalarlo in quanto potrebbe essere utile in una ricerca intesa a stabilire, nel caso degli sforzi piani, teoremi geometrici analoghi a quelli validi nel problema della deformazione piana, la cui deduzione, come è noto, si fonda appunto sulla possibilità di dare una rappresentazione parametrica degli sforzi del tipo (5') e nella quale le  $\alpha(x, y) = \text{cost.}$  sono le isobare e le  $\beta(x, y) = \text{cost.}$  sono le linee di egual taglio.



Il sistema (10) diviene in tal caso:

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x} [\cos \alpha \sqrt{3} - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cdot \beta'(\alpha)] + \frac{\partial \alpha}{\partial y} [-\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \beta'(\alpha)] \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} [-\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \cdot \beta'(\alpha)] + \frac{\partial \alpha}{\partial y} [\cos \alpha \sqrt{3} + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \beta'(\alpha)] \end{cases}$$

In accordo col metodo generale, interpretiamo il sistema (10') come un sistema lineare omogeneo nelle due incognite  $\partial \alpha / \partial x$ ,  $\partial \alpha / \partial y$ . Se il determinante di tale sistema:

$$\Delta(\alpha) = \left[ 3 - \left( \frac{d\beta}{d\alpha} \right)^2 \right] \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

è diverso da zero, si ottiene la sola soluzione  $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$  cui corrispondono sforzi costanti. Se invece  $\Delta(\alpha) = 0$ , le due equazioni (10') sono linearmente dipendenti o meglio vengono a coincidere in una sola. La condizione  $\Delta(\alpha) = 0$  porta alla seguente equazione differenziale nell'incognita  $\beta = \beta(\alpha)$ :

$$(11) \quad \left( \frac{d\beta}{d\alpha} \right)^2 = 3 - \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Integrando la (11) si trova poi:

$$(12) \quad \beta + c = \pm \operatorname{arctg} \frac{9 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha}{[3 - 4 \sin^2 \alpha]^{3/2}}$$

e quindi:

$$(12') \quad \sin(\beta + c) = \pm \frac{9 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha}{3 \sqrt{3} \cos \alpha} \quad ; \quad \cos(\beta + c) = \frac{[3 - 4 \sin^2 \alpha]^{3/2}}{3 \sqrt{3} \cos \alpha}$$

avendo indicato con  $c$  la costante arbitraria di integrazione.

Sostituite le (12') nelle (9) (tenendo conto della circostanza già segnalata che in esse è lecito porre  $\beta + c$  in luogo di  $\beta$ ) ed operato il cambio di parametro:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

si deducono allora in definitiva le seguenti espressioni per gli sforzi:

$$(*) \quad \begin{cases} \sigma_x = H \left\{ \frac{3}{2} \sin \theta \pm \left[ \frac{3}{2} \sin \theta - \sin^3 \theta \right] \right\} \\ \tau = H \cos^3 \theta \\ \sigma_y = H \left\{ \frac{3}{2} \sin \theta \mp \left[ \frac{3}{2} \sin \theta - \sin^3 \theta \right] \right\} \end{cases}$$

In quanto al sistema differenziale (10') esso si riduce, come già sappiamo, ad un'unica equazione. Dal punto di vista formale, per stabilire tale equazione, anziché sostituire nella prima o nella seconda delle (10') in luogo di  $\beta$  e di  $d\beta/d\alpha$  i valori forniti dalle (12) e (11), conviene impiegare direttamente le espressioni degli sforzi ora ottenute. Si trova così:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = H \left\{ \left[ \frac{3}{2} \cos \theta \pm \left( \frac{3}{2} \cos \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} - 3 \cos^2 \theta \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} = 0$$



**Geodesia.** — *Su una proprietà dell'errore medio di una funzione di quantità compensate.* Nota di G. INGHILLERI, presentata (\*) dal Corrisp. L. SOLAINI.

In questa breve Nota si vuole formalmente dimostrare una proprietà riguardante l'errore medio di una funzione di quantità compensate, proprietà che brevemente si può enunciare dicendo che l'errore medio di una grandezza funzione di quantità compensate è indipendente dal modo, ammesso naturalmente che ve ne sia più di uno, secondo il quale tale grandezza viene determinata.

Tale proprietà è logicamente ed intuitivamente accettabile, ma non è [vedi in seguito le espressioni (16) e (17)], di immediata accezione dal punto di vista analitico, tanto che viene spontaneo chiedersi per quale meccanismo due o più espressioni in apparenza diversissime una dall'altra possano dare un risultato identico; è necessario anche aggiungere che, sempre dal punto di vista analitico, questa proprietà non può essere dimostrata per sistemi di grandezze compensate empiricamente, e che quindi non è una conseguenza del fatto che le grandezze in gioco soddisfano determinate condizioni, ma dell'aver eseguito la compensazione con il metodo dei minimi quadrati.

Questa proprietà viene quindi, in questa Nota, dimostrata rigorosamente, nella ipotesi che la grandezza funzione di quantità compensate possa essere determinata in due maniere diverse, dato che questa ipotesi non toglie evidentemente generalità alla dimostrazione.

Pertanto l'utilità di questa proprietà si rivela allorché, nell'accingersi al calcolo dell'errore medio di una funzione di quantità compensate, permette di scegliere quella via per cui siano richieste il minor numero di calcolazioni, che si riduce poi, dato che l'operazione principale è quella della risoluzione di un sistema di equazioni lineari [vedi le (18)], a scegliere quella che tale soluzione faciliti.

Le argomentazioni analitiche vengono sviluppate facendo uso delle notazioni del calcolo delle matrici, con evidente vantaggio per la trasparenza e la snellezza delle formule.

Si abbia un sistema di  $n = r + s + t$  grandezze  $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s, z_1, z_2, \dots, z_t$ , suscettibili di essere misurate, che debbano soddisfare alle  $m$  relazioni

$$(I) \quad F_i(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_s, z_1, z_2, \dots, z_t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

con  $m < r + s + t$ . Siano  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_s^0, z_1^0, z_2^0, \dots, z_t^0$ , i risultati, affetti da errori, delle misure e  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r, \delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_s, \delta z_1, \delta z_2, \dots, \delta z_t$ , le correzioni da apportare alle quantità misurate affinché

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

le (1) siano soddisfatte; sarà ovvero genericamente  $x_i = x_i^0 + \delta x_i$ ,  $y_k = y_k^0 + \delta y_k$ ,  $z_j = z_j^0 + \delta z_j$ ; tali correzioni vengono supposte piccole in maniera che se ne possano trascurare i quadrati, le potenze superiori ed i loro prodotti.

Si supponga di voler determinare queste correzioni conformemente al principio dei minimi quadrati e che, per semplicità, i pesi siano tutti uguali, dato che, nelle considerazioni che seguono, questi non intervengono in maniera essenziale.

Si indichi con  $J_0$  lo jacobiano delle (1), calcolato per i valori misurati delle variabili e con  $K$  la matrice di coefficienti indeterminati ad 1 riga ed  $m$  colonne.

$$(2) \quad K = |K_1 K_2 \dots K_m|.$$

Secondo la nota teoria le correzioni sono date dalla relazione

$$(3) \quad Dx = K J_0$$

con

$$Dx = |\delta x_1 \dots \delta x_r \delta y_1 \dots \delta y_s \delta z_1 \dots \delta z_t|$$

e dove la trasposta di  $K$ ,  $K_{-1}$ , è data da

$$(4) \quad A K_{-1} + F_0 = 0$$

essendo  $F_0$  la matrice ad  $m$  righe ed 1 colonna avente per termini i valori che le (1) assumono quando vi vengono introdotti i valori misurati delle grandezze, mentre la matrice quadrata e simmetrica  $A$  si ottiene dalla

$$(5) \quad A = J_0 J_{0-1}$$

Si consideri ora una grandezza  $Q$  funzione di  $r$  delle quantità compensate prese in considerazione

$$(6) \quad Q = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$$

e si supponga che la stessa grandezza possa essere determinata come funzione di un altro gruppo di  $s$  quantità compensate appartenenti allo stesso sistema

$$(7) \quad Q = g(y_1, y_2, \dots, y_s)$$

non essendo in generale escluso che alcune delle  $y$  si identifichino con alcune delle  $x$ .

Si può subito allora notare che, nell'ipotesi che le (1) determinino tutte le condizioni a cui sono soggette le grandezze del sistema, dovendo per la (6) e la (7) essere

$$(8) \quad f - g = 0$$

la funzione  $F = f - g$  non può essere indipendente dalle (1).



Si costruisca una funzione qualsivoglia delle (1)

$$(9) \quad G = \psi(F_1, F_2, \dots, F_m).$$

È evidente che la relazione

$$(10) \quad \psi(F_1, F_2, \dots, F_m) = 0$$

non rappresenta una nuova condizione a cui devono soddisfare le grandezze del sistema, qualora con il simbolo  $\psi$  si indichi una funzione delle  $F_i$  che si annulla *solo* in corrispondenza dell'annullarsi di una o più qualsivogliano delle  $F_i$  con valori qualsiasi delle rimanenti, oppure una funzione che si annulla comunque *solo* in corrispondenza dell'annullarsi di tutte le  $F_i$ .

Con questa limitazione sul significato del simbolo  $\psi$ , dovrà quindi essere nella maniera più generale possibile

$$(11) \quad f - g = \psi(F_1, F_2, \dots, F_m).$$

Se si indicano allora con  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) degli opportuni coefficienti si ha

$$(12) \quad df - dg = R_1 dF_1 + R_2 dF_2 + \dots + R_m dF_m,$$

si potrà ovvero esprimere il differenziale della  $F$  come combinazione lineare dei differenziali delle (1). Seguono quindi le  $r + s + t$  relazioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta f}{\delta x_i} = R_1 \frac{\delta F_1}{\delta x_i} + R_2 \frac{\delta F_2}{\delta x_i} + \dots + R_m \frac{\delta F_m}{\delta x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r) \\ -\frac{\delta g}{\delta y_k} = R_1 \frac{\delta F_1}{\delta y_k} + R_2 \frac{\delta F_2}{\delta y_k} + \dots + R_m \frac{\delta F_m}{\delta y_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s) \\ 0 = R_1 \frac{\delta F_1}{\delta z_j} + R_2 \frac{\delta F_2}{\delta z_j} + \dots + R_m \frac{\delta F_m}{\delta z_j} \quad (j = 1, 2, \dots, t) \end{array} \right.$$

ove, come nel seguito, sono sottintesi i simboli indicanti che le varie derivate e coefficienti sono calcolati per i valori misurati delle grandezze che figurano come variabili.

Si considerino le seguenti matrici ad  $m$  righe ed 1 colonna

$$V = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\delta F_1}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta f}{\delta x_i} \right]_{i=1}^{i=r} \\ \left[ \frac{\delta F_2}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta f}{\delta x_i} \right]_{i=1}^{i=r} \\ \dots \dots \dots \\ \left[ \frac{\delta F_m}{\delta x_i} \cdot \frac{\delta f}{\delta x_i} \right]_{i=1}^{i=r} \end{bmatrix}_{m,1} \quad W = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\delta F_1}{\delta y_k} \cdot \frac{\delta f}{\delta y_k} \right]_{k=1}^{k=s} \\ \left[ \frac{\delta F_2}{\delta y_k} \cdot \frac{\delta f}{\delta y_k} \right]_{k=1}^{k=s} \\ \dots \dots \dots \\ \left[ \frac{\delta F_m}{\delta y_k} \cdot \frac{\delta f}{\delta y_k} \right]_{k=1}^{k=s} \end{bmatrix}_{m,1}$$

e la

$$R = \begin{vmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_m \end{vmatrix}_{1,m}.$$

Moltiplicando la prima delle (13) per  $\delta f/\delta x_i$ , la seconda per  $\delta f/\delta x_2, \dots$ , la  $r + 1^{ma}$  per  $\delta g/\delta y_1, \dots$ , la  $r + s^{ma}$  per  $\delta g/\delta y_s$  e sommando le  $r + s$  espressioni ottenute, si ottiene

$$(14) \quad \left[ \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} \right)^2 \right]_i^r - \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_i^s = R_{i, m, m, i} (V + W)$$

Indi analogamente, moltiplicando ogni relazione del primo gruppo delle (13) per  $\delta F_i/\delta x_i$ , quelle del secondo per  $\delta F_i/\delta y_k$ , quelle del terzo per  $\delta F_i/\delta z_j$  e sommando, ripetendo poi l'operazione con le derivate della  $F_2$ , e così via, sino a quella effettuata con le derivate della  $F_m$  si ottengono  $m$  eguaglianze sinteticamente rappresentate da

$$(15) \quad V - W = A_{m, i} R_{m, i}.$$

Si ricavi ora, secondo le note regole, l'inverso del peso della  $Q$  in base alla (6). Si ha

$$(16) \quad \frac{1}{p_f} = \left[ \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} \right)^2 \right]_i^r + S_{i, m} \cdot V_{m, i}$$

mentre in base alla (7) si ottiene

$$(17) \quad \frac{1}{p_g} = \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_i^s + T_{i, m} \cdot W_{m, i}$$

dove  $S_{i, m}$  e  $T_{i, m}$  indicano le trasposte di

$$S = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_m \end{vmatrix}_{m, i} \quad T = \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_m \end{vmatrix}_{m, i}$$

che sono rispettivamente le soluzioni dei sistemi

$$(18) \quad \begin{aligned} A_{m, m} \cdot S_{m, i} + V_{m, i} &= 0 \\ A_{m, m} \cdot T_{m, i} + W_{m, i} &= 0 \end{aligned}$$

Si ha allora indicando con  $A^{-1}$  la reciproca della  $A$

$$T_{m, i} = -A_{m, m}^{-1} W_{m, i}$$

e per la (15)

$$T_{m, i} = -A_{m, m}^{-1} (V_{m, i} - A_{m, m} R_{m, i}).$$

Per la prima delle (18) e per definizione di matrice reciproca

$$T_{m, i} = S_{m, i} + R_{m, i}$$

e

$$(19) \quad T_{-1} = (S + R_{-1})_{-1} = S_{-1} + R_{-1}$$

D'altra parte dalla (16), tenendo conto della (14) si ha

$$\frac{1}{p_f} = \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_1^s + R_{1,m} (V + W)_{m,1} + S_{-1,m} \cdot V_{m,1}$$

e per la (15)

$$\frac{1}{p_f} = \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_1^s + R_{1,m} V_{m,1} + R_{1,m} W_{m,1} + S_{-1,m} (W + A R_{-1})_{m,1}$$

ovvero

$$(20) \quad \frac{1}{p_f} = \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_1^s + (R + S_{-1})_{1,m} W_{m,1} + R_{1,m} V_{m,1} + S_{-1,m} A_{m,m} R_{-1,m}$$

Dalla prima delle (18) si ricava

$$(21) \quad S_{-1,m} = (-A^{-1} \cdot V)_{-1,m} = -V_{-1,m} A^{-1}_{m,1}$$

dato che la  $A^{-1}$  è simmetrica e che per effettuare la trasposta di un prodotto bisogna invertire l'ordine dei fattori. Riprendendo allora la (20) e tenendo conto della (19) e della (21)

$$\frac{1}{p_f} = \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_1^s + T_{-1,m} W_{m,1} + R_{1,m} V_{m,1} - V_{-1,m} \cdot A^{-1}_{m,m} \cdot A_{m,m} R_{-1,m}$$

Perché inoltre la matrice  $R \cdot V$  per avere un solo elemento è quadrata e simmetrica, si ha

$$R \cdot V = (R \cdot V)_{-1} = V_{-1} \cdot R_{-1},$$

per cui infine, tenendo conto di quest'ultimo risultato

$$\frac{1}{p_f} = \left[ \left( \frac{\delta g}{\delta y_k} \right)^2 \right]_1^s + T_{-1,m} W_{m,1} + R_{1,m} V_{m,1} - R_{1,m} V_{m,1} = \frac{1}{p_g}$$

**Fisica.** — *Contatore elettronico algebrico di frange d'interferenza*<sup>(\*)</sup>.  
Nota di GIUSEPPE RUFFINO, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio E. PERUCCA.

I tubi contatori a catodo freddo detti « dekatron » si prestano assai bene alla realizzazione di circuiti che effettuano la numerazione sia progressiva che regressiva. Tale proprietà è stata sfruttata per contare il numero « netto » di giri di un albero soggetto a inversioni di moto, cioè la somma algebrica di tali giri<sup>(1)</sup>; J. L.W. Churchill, mentre sottolineava la sua importanza, ne

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale del Politecnico di Torino.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) F.C. WILLIAMS and A.M. UTILEY, *The Velodyne*, « J. Inst. Elect. Engng. », 93, Part III A, (1946), pp. 1256-1274.

ha suggerito ulteriori applicazioni <sup>(2)</sup>. Lo stesso problema è stato affrontato recentemente da W. T. Bane e D. L. A. Barber <sup>(3)</sup> con una tecnica diversa. Essi hanno costruito un circuito a fototransistori sensibile al verso di numerazione e da applicarsi a sistemi ottici di numerazione. Ad ogni passaggio di una macchia luminosa su di una coppia di fototransistori, il dispositivo fornisce un impulso da una delle sue due uscite, secondo la direzione del moto nell'indice luminoso. Gli autori prevedono che ulteriori raffinamenti del loro circuito potrebbero permettere un analogo conteggio di frange d'interferenza o di moiré. Ciò era stato ottenuto da E. R. Peck e S. W. Obetz <sup>(4)</sup> con un circuito costituito da discriminatori d'ampiezza, differenziatori e una « porta »; l'impiego del « dekatron » secondo lo schema sottoindicato elimina la notevole complicazione ottica ed elettronica di detto dispositivo.

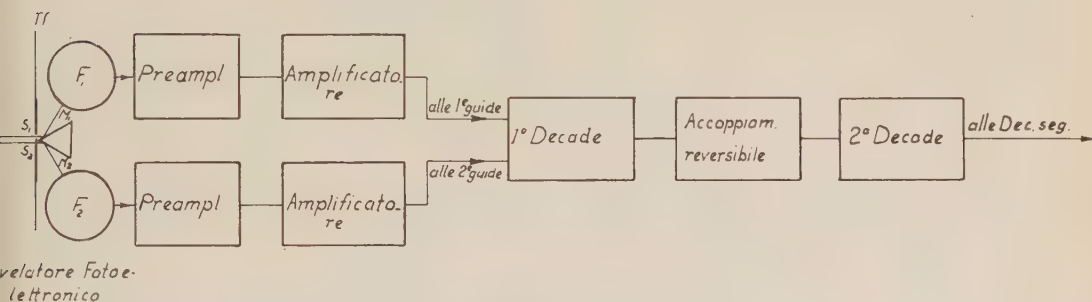


Fig. 1.

L'apparecchio qui da me descritto non effettua solamente la discriminazione degli impulsi da sommarsi e da sottrarsi, come il dispositivo di Bane e Barber, ma eseguisce pure la somma algebrica delle frange d'interferenza in modo da fornire il loro numero « netto » corrispondente ad uno spostamento meccanico contenente una componente alternata: è questo il caso in cui la figura d'interferenza si trova ad invertire il suo moto. Il dispositivo si vale delle proprietà direzionali degli elettrodi di controllo del « dekatron » ed i suoi tratti essenziali sono rappresentati nello schema a blocchi di fig. 1.

La figura d'interferenza viene formata sul piano II contenente una coppia di fenditure  $S_1, S_2$  parallele alle frange poste alla reciproca distanza di circa un quarto di interfrangia. Dietro le fenditure si trova uno specchio doppio  $M_1, M_2$  che invia la luce attraversante le fenditure rispettivamente ai due fotomoltiplicatori corrispondenti  $F_1, F_2$ .

(2) J. L. W. CHURCHILL, *New Trigger Circuits for use with Cold Cathode Counting Tubes*, « J. Brit. I.R.E. », September 1952.

(3) W. T. BANE and D. L. A. BARBER, *A Simple Direction-sensitive Phototransistor Circuit for use in optical counting System*, « J. Sci. Instr. », 33, December (1956) pp. 483-486.

(4) E. R. PECK and S. W. OBETZ, *Wavelength or Length Measurement by Reversible Fringe Counting*, « J. Opt. Soc. Am. », 43, (1953), 505.



1P21

6AU6

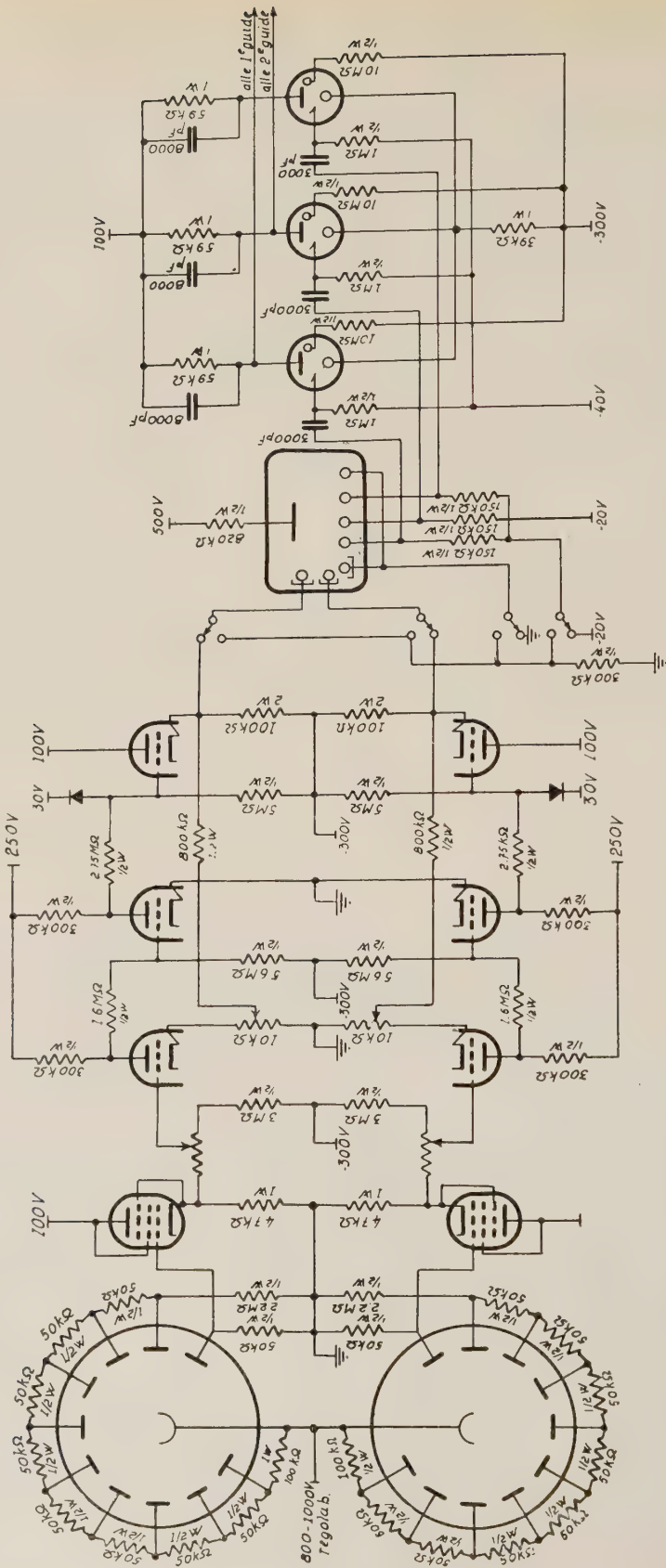
12AX7

12AX7

1N38 12AU7

GC10/4B

GTE175M



Rivelatore Fotoelettronico Trasferitore Catodico Amplificatore c.c.

1ª Decade

Accoppiamento reversibile

Fig. 2.

Quando le frange si muovono perpendicolarmente alle fenditure, ciascun tubo fornisce una tensione modulata dal flusso luminoso che lo colpisce costituita da una componente continua e da una alternata. Unicamente la componente alternata viene sfruttata nell'operazione di conteggio. La differenza di fase di un quarto di periodo delle tensioni alternate che escono dai fotomoltiplicatori ha un segno algebrico dipendente dal verso del moto della figura d'interferenza, e, in definitiva, dal verso dello spostamento meccanico del piano di riferimento che produce il moto delle frange.

I due segnali forniti dai fotomoltiplicatori, dopo aver attraversato un trasformatore catodico, vengono inviati ad un amplificatore a corrente continua controreazionato a basso guadagno, dal quale vengono applicati alle prime e seconde guide rispettivamente di un « dekatron » numeratore bidirezionale (Etelco, CC 10/4B). In tale tubo la scarica tra l'anodo e uno dei dieci catodi che servono da indice luminoso si muove in senso orario od antiorario secondo che la tensione della prima guida è in anticipo o in ritardo rispetto alla tensione della seconda. In tal guisa il tubo somma o sottrae il numero delle frange d'interferenza che sfilano davanti alle fenditure, secondo il verso del loro moto.

Un accoppiamento reversibile tra gli stadi numeratori decadici quale venne descritto da J. L. W. Churchill <sup>(2)</sup> o dal manuale dell'Etelco « Cold Cathode Tubes » <sup>(5)</sup> eseguisce l'addizione o la sottrazione delle unità di ordine superiore.

Il circuito elettrico è rappresentato in fig. 2.

La massima velocità di conteggio dipende in ultima analisi dalle possibilità del tubo a catodo freddo (in particolare dal tempo di deionizzazione) e può raggiungere il valore di circa 4000 frange al secondo. Se la sorgente luminosa è costituita dalla luce isolata di  $\lambda = 5461 \text{ Å}$  da una lampada a vapori di mercurio, tale velocità di conteggio corrisponde ad una velocità di circa 2 mm/sec del piano di riferimento di cui si vuol misurare lo spostamento.

Il comportamento di questo dispositivo si è rivelato soddisfacente in prove eseguite con una lampada a vapori di mercurio detta « per spettroscopia » ed un cuneo d'aria compreso tra due lame di vetro, di cui una mobile, a faccie piane e parallele.

Debbo ringraziare il prof. E. Perucca, per i suoi ampi suggerimenti e aiuti.

(5) *Cold. Cathode Tubes*, Etelco, 1955, p. 23.

**Fisica.** — *Sull'approssimazione «ritardo infinito» nello studio del transitorio di un reattore nucleare.* Nota di UGO FARINELLI, presentata (\*) dal Socio G. COLONNETTI.

Lo studio teorico del comportamento dinamico di un reattore nucleare tenendo conto del fenomeno dei neutroni ritardati porta ad equazioni piuttosto complicate, che, salvo casi particolarmente semplici, non possono essere integrate quando la reattività non sia costante nel tempo. Quando la reattività è funzione del tempo, e in particolare quando è accoppiata da equazioni differenziali alle altre variabili di funzionamento del reattore, si cerca allora di sviluppare delle approssimazioni che permettano di svolgere i calcoli in forma esplicita.

È noto (1) come nello studio del transitorio di un reattore nucleare e in particolare delle oscillazioni introdotte nei reattori di potenza dall'accoppiamento temperatura-potenza, sia utile un'approssimazione che consiste nel supporre che, quando si introduce una piccola variazione di reattività, i neutroni ritardati continuino ad essere emessi per tutto il tempo con la stessa legge di prima. Nella teoria ad un gruppo di neutroni ritardati questo porta all'equazione differenziale

$$(I) \quad l \frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\rho - \beta}{1 - \rho} \right) \Phi(t) + \frac{\beta}{1 - \rho} \Phi(0).$$

Questa approssimazione si basa sulla considerazione intuitiva che i neutroni ritardati (o, ciò che è equivalente, l'accumulazione dei nuclei precursori) risentono molto più gradualmente che i neutroni immediati una variazione brusca di reattività. La validità della (I) viene normalmente controllata nei singoli casi confrontando il risultato che si ottiene a  $\rho$  costante (cioè disaccoppiando la (I) dalle equazioni che regolano la variazione di reattività) con la soluzione dell'equazione esatta, ricavabile esplicitamente appunto con  $\rho$  costante.

Vogliamo qui invece sviluppare in forma quantitativa alcune considerazioni generali sui limiti di validità della (I), a partire dalla teoria a un gruppo.

Se la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali della teoria a un gruppo:

$$(2) \quad \begin{cases} l \frac{d\Phi}{dt} = \left( \frac{\rho - \beta}{1 - \rho} \right) \Phi(t) + \lambda v C(t) \\ \frac{dC}{dt} = -\lambda C(t) + \frac{K_{eff} \beta}{lv} \Phi(t) \end{cases}$$

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) Ved. ad esempio ORNL, *Notes on Reactor Analysis*, II, 344 (1956).

è ottenuta come al solito con la trasformazione di Laplace nella forma:

$$(3) \quad \begin{cases} \Phi(t) = a_0 e^{\omega_0 t} + a_1 e^{\omega_1 t} \\ C(t) = b_0 e^{\omega_0 t} + b_1 e^{\omega_1 t} \end{cases}$$

è noto come la trattazione approssimata della teoria a un gruppo dia per  $\omega_0$  e  $\omega_1$  rispettivamente i valori

$$(4) \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{\lambda \rho}{\beta - \rho} \\ \omega_1 = -\frac{\beta - \rho}{l} \end{cases}$$

Nel caso in cui la reattività sia nulla fino all'istante  $t = 0$ , e uguale a un valore  $\rho_1$  positivo e piccolo per  $t > 0$ , è facile vedere come nei limiti di approssimazione in cui valgono le (4), i coefficienti  $a_0$  e  $a_1$  dell'espressione (3) del flusso valgono rispettivamente:

$$(5) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{\beta}{\beta - \rho} \Phi(0) \\ a_1 = -\frac{\rho}{\beta - \rho} \Phi(0) \end{cases}$$

essendo  $a_0 + a_1 = \Phi(0)$ .

Sostituendo i valori dati dalle (3) nella seconda delle (2), e annullando separatamente i coefficienti di  $e^{\omega_0 t}$  e di  $e^{\omega_1 t}$  (poiché l'eguaglianza deve sussistere per qualunque valore del tempo) otteniamo:

$$(6) \quad \begin{cases} b_0 (\omega_0 + \lambda) = \frac{K_{\text{eff}} \beta}{lv} a_0 \\ b_1 (\omega_1 + \lambda) = \frac{K_{\text{eff}} \beta}{lv} a_1 \end{cases}$$

Sostituendo in queste espressioni i valori di  $\omega_0$  e  $\omega_1$  dati dalle (4), e di  $a_0$  e  $a_1$  dati dalle (5), e osservando che per piccole reattività  $k_{\text{eff}} \simeq 1$ , troviamo

$$(7) \quad \begin{cases} b_0 = \frac{\beta}{l\lambda v} \Phi(0) \\ b_1 = \frac{\beta \rho}{(\beta - \rho)(\beta - \rho - l\lambda)} \Phi(0) \end{cases}$$

Questo risultato è in apparente contrasto con il fatto che  $b_0 + b_1 = C(0)$ , e che se il reattore è stato critico per un lungo tempo fino all'istante  $t = 0$  si deve avere per  $t < 0$ ,  $\frac{dC}{dt} = 0$ , e quindi, dalla seconda delle (2),

$$(8) \quad C(0) = \frac{\beta}{l\lambda v} \Phi(0).$$

Questa contraddizione deriva dalle approssimazioni introdotte per ricavare le (4) e le (5), e precisamente dall'avere trascurato  $l\lambda$  rispetto a  $\beta - \rho$ .



Questo è vero per tutti i casi pratici: per un valore di reattività di 33 cents (valore che viene difficilmente superato)  $\beta - \rho = 5 \times 10^{-3}$  per l'uranio 235, mentre  $l \simeq 10^{-3}$  s,  $\lambda \simeq 8 \times 10^{-2}$ ,  $l\lambda \simeq 8 \times 10^{-5}$  cioè quasi la centesima parte di  $\beta - \rho$ . In questa approssimazione potremo scrivere:

$$(9) \quad b_1 = \frac{\beta \rho}{(\beta - \rho)^2 v} \Phi(0);$$

$b_1$  risulta molto piccolo rispetto a  $b_0$ . Cioè ammettendo pure che  $\rho/(\beta - \rho)$  sia dell'ordine di 1 (cioè che comporta reattività piuttosto notevoli)

$$(10) \quad \frac{b_0}{b_1} \simeq \frac{\beta - \rho}{l\lambda}$$

cioè entro i limiti della nostra approssimazione avremo  $b_0 = C(0)$ , e

$$(11) \quad C(t) = C(0) e^{\omega_0 t}.$$

L'effetto del transitorio sui neutroni ritardati appare quindi essere del tutto trascurabile<sup>(2)</sup>. Il transitorio ha invece un effetto tutt'altro che trascurabile sui neutroni complessivi. Infatti quando al termine del transitorio si è raggiunta la soluzione asintotica:

$$(12) \quad \Phi(t) \simeq a_0 e^{\omega_0 t} = \Phi(0) \frac{\beta}{\beta - \rho} e^{\omega_0 t} \left( \text{per } t \gg -\frac{1}{\omega_1} \right).$$

Cioè il flusso di neutroni è aumentato rispetto al valore iniziale per il solo effetto del transitorio di un fattore  $\beta/(\beta - \rho)$ .

Il criterio di validità dell'approssimazione del ritardo infinito, che consiste nel sostituire  $C(0)$  a  $C(t)$ , potrà allora essere dedotto confrontando la variazione percentuale di nuclei precursori con quella del flusso di neutroni:

$$(13) \quad \alpha = \frac{\frac{C(t) - C(0)}{C(0)}}{\frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{\Phi(0)}}.$$

L'approssimazione potrà considerarsi applicabile finché  $\alpha$  è piccolo rispetto a 1.

Ponendo per  $C(t)$  e per  $\Phi(t)$  le loro espressioni asintotiche abbiamo:

$$(14) \quad \alpha = \frac{\frac{e^{\omega_0 t} - 1}{\beta - \rho}}{\frac{e^{\omega_0 t} - 1}{\beta - \rho}}.$$

Per  $t=0$ ,  $\alpha$  vale 0; mentre per  $t \rightarrow \infty$ ,  $\alpha$  tende al valore  $(\beta - \rho)/\beta$  che è (per le ipotesi fatte) abbastanza prossimo a 1. D'accordo con quanto si poteva

(2) Anzi, volendo tenerne conto, si dovrebbe notare che  $b_1$  è positivo mentre  $a_1$  è negativo; cioè mentre il transitorio tende ad accrescere rapidamente nei primi istanti il numero complessivo di neutroni, esso si oppone entro certi limiti inizialmente all'accrescimento esponenziale dei nuclei precursori.

intuire, l'approssimazione è ottima per  $t$  piccolo, cioè appena introdotto un cambiamento di reattività, mentre diventa inaccettabile per grandi valori di  $t$ .

Per vedere la validità nei primi istanti, possiamo sviluppare in serie gli esponenziali arrestandoci ai termini del primo ordine:

$$(15) \quad \alpha \simeq \frac{\omega_0 t}{\frac{\beta}{\beta - \rho} (1 + \omega_0 t) - 1} = \frac{\omega_0 t}{\frac{\rho}{\beta - \rho} + \frac{\beta}{\beta - \rho} \omega_0 t}.$$

Ponendo per  $\omega_0$  il suo valore  $\frac{\lambda \rho}{\beta - \rho}$  otteniamo:

$$(16) \quad \alpha \simeq \frac{\lambda t}{1 + \frac{\lambda \beta}{\beta - \rho} t}.$$

Invertendo questa relazione rispetto al tempo abbiamo:

$$(17) \quad t = \frac{\alpha}{\lambda - \frac{\lambda \beta}{\beta - \rho} \alpha}.$$

Se ora fissiamo il massimo valore  $\alpha_{\max}$  per cui riteniamo che questa approssimazione possa considerarsi valida, dovrà essere

$$(18) \quad t \leq \frac{\alpha_{\max}}{\lambda - \frac{\lambda \beta}{\beta - \rho} \alpha_{\max}}.$$

La teoria che abbiamo svolto sarà autoconsistente quando sia effettivamente lecito sostituire a  $\Phi(t)$  la sua espressione asintotica, come abbiamo fatto per passare dalla (13) alla (14), cioè se il valore di  $t$  che si ottiene ponendo il segno di eguaglianza nella (18) è tale che il transitorio sia ormai passato.

Poiché il transitorio è dato da un termine in  $e^{\omega_1 t}$  con  $\omega_1 = -\frac{\beta - \rho}{l}$  dovrà essere  $t \gg -\frac{1}{\omega_1}$ . Ponendo

$$(19) \quad t = -\frac{m}{\omega_1} = -\frac{ml}{\beta - \rho}$$

il transitorio si sarà attenuato di un fattore  $e^m$ . Supponiamo che  $m$  non sia troppo piccolo (per esempio  $m \geq 6$ ). Dalla (16) abbiamo:

$$(20) \quad \alpha = \frac{\frac{ml\lambda}{\beta - \rho}}{1 + \frac{\lambda\beta}{(\beta - \rho)^2}}$$

e trascurando il secondo termine a denominatore rispetto a 1:

$$(21) \quad \alpha \simeq m \frac{l\lambda}{\beta - \rho}.$$

Dunque al termine del transitorio la variazione percentuale dei neutroni ritardati rispetto a quella dei neutroni totale vale  $ml\lambda/(\beta - \rho)$ . Per  $m=6$ , per esempio, il termine transitorio si è ridotto di un fattore

$$e^{-6} < \frac{1}{400}$$

e poiché come abbiamo visto, per  $\rho = 33$  cents,  $l\lambda/(\beta - \rho)$  è dell'ordine di  $10^{-2}$  il valore di  $\alpha$  sarà inferiore al 10 %, e l'approssimazione potrà considerarsi in molti casi accettabile. Nei casi pratici in cui è utile applicare l'approssimazione del ritardo infinito, le variazioni di  $\rho$  sono molto più piccole e questa approssimazione è perfettamente adeguata per studiare il transitorio. Quando si studino fenomeni oscillatori, bisognerà confrontare il periodo delle oscillazioni con il tempo  $t$  dato dalla (18): si vedrà così se sia possibile escludere un significativo « build-up » di nuclei precursori durante una mezza oscillazione.

**Fisica.** — *Può l'unità « roentgen » venire estesa all'intervallo di energie (0,10 ÷ 100) MeV? <sup>(\*)</sup>*. Nota di FRANCESCA DEMICHELIS, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio E. PERUCCA.

Il *roentgen* definito come « quella quantità di raggi X o  $\gamma$  tale che l'emissione corpuscolare ad essa associata produce in aria, ad ogni 0,001 293 gr<sub>m</sub> di essa, ioni che portano 1 unità elettrostatica di quantità di elettricità di ciascuno dei due segni » è una unità di dose radiologica.

La misurazione di una dose in roentgen risulta sperimentalmente difficile se l'energia  $h\nu$  dei raggi  $\gamma$  è tanto elevata da produrre nei dispositivi rivelatori un sensibile effetto di produzione di coppie. Sicché l'uso della unità roentgen presenta difficoltà quando si voglia applicarla a raggi  $\gamma$  la cui energia supera  $\approx 3$  MeV.

Ma ora è aperto il problema dell'impiego, a scopo biologico, di raggi  $\gamma$  particolarmente duri. Ebbene per raggi  $\gamma$  di energia tra 3 e 100 MeV (per esempio i raggi  $\gamma$  provenienti dal betatrone) non è possibile esprimere, senza altro, le dosi in roentgen misurati nei modi classici.

Piuttosto che riesaminare la definizione classica di roentgen via via che risulta l'opportunità di considerare raggi  $\gamma$  di energia superiore a 3 MeV <sup>(1)</sup>, ci

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale del Politecnico di Torino.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) L'opportunità di questa limitazione è già stabilita ad esempio dal *Rapporto della Commissione Internazionale sulle Unità Radiologiche al VI Congresso Internazionale di Radiologia*, Londra 1950.

Per una ampia e recente disamina dei metodi attuali di dosimetria, v. G. J. HINE e G. L. BROWNELL, *Radiation Dosimetry*, Acad. Press, N. Y., 1956.

Si tenga presente che questa Nota si prefigge un perfezionamento nella dosimetria limitata ai raggi  $\gamma_a$ .

sembra molto utile e realizzabile con grande facilità il seguente procedimento basato sulle considerazioni che stiamo per esporre.

La *dose rate*, cioè la dose all'unità di tempo, e quindi l'assorbimento di energia riferita al secondo e al grammo di sostanza assorbente (unità: MeV/gr<sub>m</sub> sec) è:

$$R = I \frac{\mu_a}{\varrho} = I \left( \frac{\sigma_a}{\varrho} + \frac{\tau}{\varrho} + \frac{\kappa}{\varrho} \right)$$

dove  $\varrho$  è la massa specifica dell'assorbitore,  $I$  è l'intensità del fascio di raggi  $\gamma$  incidenti,  $\sigma_a$ ,  $\tau$ ,  $\kappa$  sono i coefficienti lineari rispettivamente per l'assorbimento Compton, l'assorbimento fotoelettrico e la produzione di coppie.

Soltanto i coefficienti di assorbimento di massa  $\frac{\sigma_a}{\varrho}$ ,  $\frac{\tau}{\varrho}$ ,  $\frac{\kappa}{\varrho}$  compaiono nella espressione della *dose rate*  $R$ ; infatti solo questi coefficienti rappresentano effetti sperimentalmente rivelabili quali la ionizzazione in una camera di ionizzazione, impulsi in un rivelatore a scintillazione, effetti biologici in un organismo vivente.

D'altra parte lo sviluppo che i rivelatori a scintillazione vanno via via assumendo è veramente notevole. In particolare i fosfori plastici possono venire realizzati nelle forme e dimensioni più svariate e sono estremamente utili come contatori a scintillazione.

Nella figura sono rappresentati i coefficienti di attenuazione di massa in funzione dell'energia  $h\nu$  incidente ( $h\nu = 0,01 \text{ MeV} \div 100 \text{ MeV}$ ) rispettivamente in un fosforo plastico (polistirene) e nel tessuto umano, secondo le tabelle della cross-section atomica di G. R. White <sup>(2)</sup>.

La curva che rappresenta l'*assorbimento totale* è data da  $\frac{\mu_a}{\varrho} = \frac{\sigma_a}{\varrho} + \frac{\tau}{\varrho} + \frac{\kappa}{\varrho}$ ; quando si aggiunge a  $\mu_a$  il coefficiente di diffusione Compton  $\sigma_s$ , si ottiene la curva corrispondente alla *attenuazione totale*.

Nel tracciare queste curve si sono assunte le seguenti composizioni:

per il fosforo plastico: C<sub>8</sub>H<sub>8</sub> (polistirene)

per il tessuto umano: 10 % H, 12 % C, 4 % N, 74 % O.

La massa specifica del polistirene è  $(1,054 \div 1,070) \text{ gr}_m/(\text{cm})^3$ .

In realtà il fosforo plastico consiste di polistirene contenente qualche % di terfenile e tetrafenilbutadiene e, secondo D. E. Lea <sup>(3)</sup>, il « tessuto bagnato » ha più precisamente la composizione: 10 % H, 12 % C, 4 % N, 73 % O, 0,1 % Na, 0,35 % K, 0,04 % Mg, 0,2 % P, 0,2 % S, 0,1 % Cl, 0,01 % Ca. Quindi le curve del diagramma costituiscono una già notevole approssimazione. Se si tiene conto dell'1 % dovuto complessivamente a Na, K, P, ... nel tessuto umano, le curve corrispondenti alla attenuazione totale e all'assorbimento totale in esso si approssimano ulteriormente alle curve relative al polistirene nell'intervallo  $(0,10 \div 50) \text{ MeV}$ .

(2) G. R. WHITE, « Nat. Bur. Standards » (U. S.) Rep. 1003 (1952).

(3) D. E. LEA, *Action of radiation on living cells*, Cambridge, 1946.



L'esame del diagramma induce a concludere che nell'intervallo  $h\nu = (0,10 \div 100)$  MeV l'assorbimento totale, che è quello interessante la biologia, può considerarsi lo stesso per il polistirene e per il tessuto umano. Per questi si può anche considerare praticamente lo stesso il valore della massa specifica.

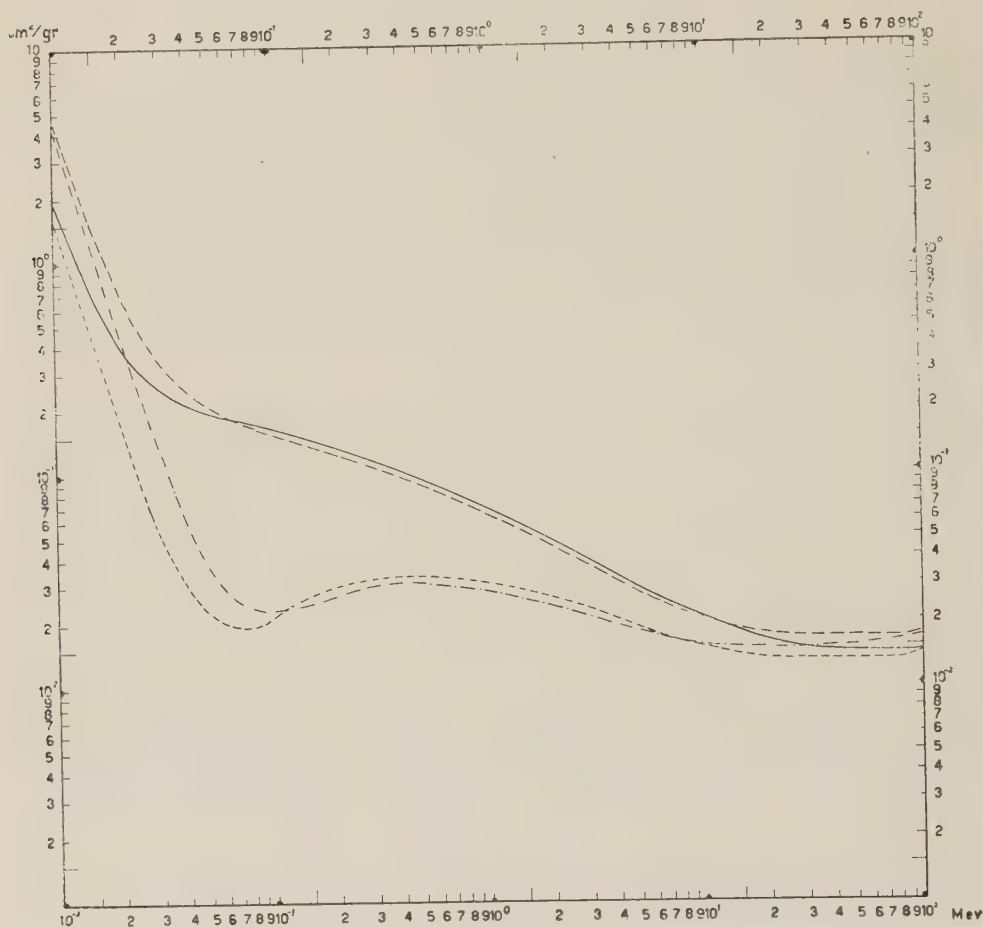


Fig. 1.

—	Polistirene	—	Attenuazione totale.
- - -	»	—	Assorbimento totale.
- · - · -	Tessuto umano	—	Attenuazione totale.
- - - - -	»	—	Assorbimento totale.

Inoltre dobbiamo tener presente che uno dei più importanti vantaggi dei contatori a scintillazione è che, una volta ottenuta l'efficienza di un fosforo, un altro fosforo delle stesse dimensioni ha la stessa efficienza per una stessa sorgente posta alla stessa distanza. Può essere diversa l'altezza degli impulsi generati in due fosfori attraverso due fotomoltiplicatori, ma il numero di impulsi è lo stesso.

Possiamo quindi giungere alle seguenti conclusioni:

Poichè le curve relative all'assorbimento totale rappresentate in figure sono ben contigue, un plastico scintillatore di polistirene può sostituire la camera di ionizzazione usata finora per misure primarie della dose in roentgen.

Si può conservare la definizione internazionale dell'unità roentgen. Per raggi  $\gamma$  aventi energie fino a  $\approx 3$  MeV convenienti camere di ionizzazione sono in grado di misurare la dose e quindi anche la *dose rate*.

Se nelle stesse condizioni geometriche sostituiamo alla camera di ionizzazione il fosforo plastico seguito da un fotomoltiplicatore, una data dose misurata dalla camera di ionizzazione corrisponde ad un dato conteggio a parità di tempo; a una data *dose rate* corrisponde una data frequenza di conteggio.

E così è determinato il conguaglio di questa frequenza al numero di roentgen al secondo.

Per  $h\nu$  maggiore di 0,10 MeV e fino a 100 MeV si può usare lo stesso contatore a scintillazione con la stessa taratura in roentgen. Il conteggio è ancor sempre proporzionale all'effetto biologico. A pari flusso di raggi  $\gamma$ , la frequenza di conteggio decresce al crescere di  $h\nu$ , ma l'effetto biologico segue la stessa legge.

Il contatore a scintillazione è in grado di misurare in roentgen la dose nei suoi effetti biologici, per raggi  $\gamma$  aventi energie da 0,10 a 100 MeV.

Ringrazio vivamente il prof. E. Perucca per il suo interessamento e le utili discussioni.

**Fisica.** — *Spettroscopia nucleare dei nuclidi della famiglia del torio con il metodo delle coincidenze discriminate* (\*). Nota di FRANCESCA DEMICHELIS e BENITO CHINAGLIA, presentata (\*\*) dal Socio E. PERUCCA.

Nelle ricerche di spettroscopia nucleare, in corso ormai da anni presso il nostro Istituto, si è applicato il metodo delle coincidenze discriminate allo studio dello spettro  $\gamma$  nel campo delle basse energie (0,05 ÷ 0,75) MeV dei seguenti nuclidi appartenenti alla famiglia del torio:  $^{228}_{90}\text{Th}$ ,  $^{224}_{88}\text{Ra}$ ,  $^{212}_{82}\text{Pb}$ ,  $^{212}_{83}\text{Bi}$ ,  $^{208}_{81}\text{Tl}$ .

La sorgente è costituita da un sottile strato di  $^{228}_{90}\text{Th}$  in equilibrio con i suoi prodotti di decadimento e i due ricevitori dei raggi  $\gamma$  consistono di due cristalli di NaI(Tl) seguiti da due fotomoltiplicatori DuMont 6292.

Il dispositivo sperimentale è stato perfezionato facendo uso, oltre a un consueto circuito a coincidenze doppie (tempo di risoluzione  $\tau_2 = 2,0 \times 10^{-7}$  sec) anche di due discriminatori differenziali a un singolo canale e di un circuito a coincidenze triple (tempo di risoluzione  $\tau_3 = 3,1 \times 10^{-6}$  sec). Così l'apparato permette di rivelare le coincidenze tra un determinato raggio  $\gamma$ , indi-

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica sperimentale del Politecnico di Torino.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.







La (1) contiene un anello esatomico completamente saturo, mentre la (2) contiene due doppi legami nell'anello ciclico.

A tali possibili strutture dovrebbero corrispondere differenze notevoli nella conformazione delle molecole.

Infatti secondo la formula 1, la molecola non può essere planare; nel caso 2 invece c'è da attendersi per il composto una conformazione completamente piana della molecola perché gli atomi di C adiacenti a un doppio legame, per l'ibridizzazione  $sp^2$  degli atomi di carbonio che lo formano, sono contenuti in un piano. Il principio del massimo allontanamento dei legami semplici, anche se adiacenti a un doppio legame, da noi largamente applicato nello studio della struttura delle macromolecole<sup>(2)</sup>, permette di affermare *a priori* che, a meno di impedimenti sterici, peraltro assenti nel nostro caso, entrambi i piani contenenti ciascuno uno dei due doppi legami, debbono coincidere. Nel caso 2 dovrebbe essere possibile determinare inoltre se e in che grado sussiste chelazione tra ossidrilie e ossigeno del gruppo carbossilico vicino.

È stata pertanto eseguita una indagine strutturistica sui cristalli del prodotto.

#### *Determinazione della cella elementare.*

La determinazione della cella elementare è stata eseguita con i metodi consueti centrando in una camera Weissenberg un cristallo aghiforme lungo l'asse d'allungamento e prendendo gli spettri di strati successivi col metodo dell'equinclinazione. L'asse d'allungamento è risultato molto corto e uguale a 3.95 Å. C'era da attendersi quindi che sull'equatore gli atomi fossero completamente risolti. Chiamato  $c$  l'asse d'allungamento dell'ago, le lunghezze degli altri due assi sono risultate  $a = 12.80$  Å,  $b = 9.85$  Å. Inoltre è risultato  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . I tre assi sono quindi a  $90^\circ$  ma essendo le intensità delle riflessioni ( $h0l$ ) differenti da quelle delle ( $h0l$ ) la simmetria della cella elementare pseudorombica non può che essere monoclinica. Dalle assenze sistematiche,  $h0l$  con  $h = 2n + 1$ ,  $0k0$  con  $k = 2n + 1$  si deduce che il gruppo spaziale è  $P 2_1/a$  e contiene due molecole da sistemare in 4 posizioni generali. La molecola deve essere pertanto centrosimmetrica e già questo fatto ci permette di concludere che la sua formula chimica deve corrispondere alla (2).

*Analisi Patterson.* - Già dal valore eccezionalmente basso della lunghezza dell'asse  $c$  e da una analisi sommaria del reticolo reciproco pesato sul piano ( $00l$ ) si deduce che la molecola deve avere il proprio piano coincidente o quasi col piano  $ab$ <sup>(3)</sup>.

(2) G. NATTA, P. CORRADINI, « J. Polymer Sci. », 20, 251 (1956); G. NATTA, P. CORRADINI, L. PORRI, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. 20, fasc. 6 (1956); G. NATTA, P. CORRADINI, « Ang. Chemie », 68, 615 (1956).

(3) G. KNOTT, « Proc. Phys. Soc. », 52, 229 (1940); J. M. ROBERTSON, J. G. WHITE, « J. Chem. Soc. », 607 (1945).

TABELLA I.

*Fattori di struttura sperimentali in scala relativa con i segni usati nella sintesi di Fourier.*

Indice	F <sub>oss</sub>	Indice	F <sub>oss</sub>	Indice	F <sub>oss</sub>
200	17 —	230	28 +	770	17
400	25 +	330	16	870	20 +
600	50 —	430	25	970	14
1000	21 —	530	25	1070	16 +
020	31 +	630	13	280	13 +
040	39 +	730	16	380	29 —
060	33	930	16	480	21
080	21	1130	22 +	290	14
110	25 +	1230	27 —	490	25 —
210	24 —	140	14	2100	19
310	19 +	240	31 —	4100	16 +
410	15 +	340	29 —		
510	10	440	21		
610	45 —	540	26 +		
710	25 —	640	28 —		
1010	21 —	840	18 +		
1110	20 +	1040	16		
120	32 —	150	36 —		
220	26 —	250	23		
320	21	450	18		
420	27 —	750	21 +		
620	12	850	19 +		
820	24 +	160	30 —		
920	17 —	260	27 —		
1020	17	460	19 +		
1120	20 —	760	29 +		
1220	10	860	26 +		
130	21 —	370	22 +		

Sulla proiezione Patterson sono da attendersi in tal caso sei massimi corrispondenti a distanze meta a circa  $2.2 \text{ \AA}$  dall'origine per ognuna delle due possibili orientazioni della molecola lungo il piano di simmetria con traslazione <sup>(4)</sup>. Tali massimi sono da attendersi a circa  $60^\circ$  l'uno dall'altro. Questo è quanto noi abbiamo effettivamente trovato (fig. 1): anzi, dal loro peso relativo e dalla loro distanza dall'origine ci è stato possibile scegliere quale orientazione della molecola appariva più probabile delle tre possibili, rispetto al centro di simmetria, consistenti con le direzioni in cui compaiono tali massimi.

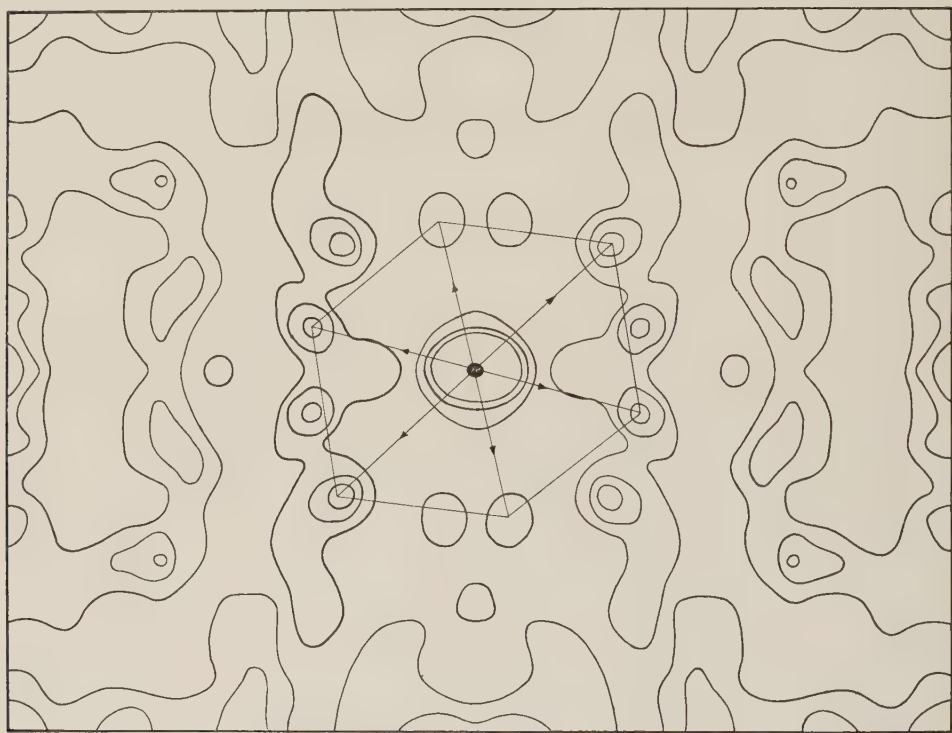


Fig. 1. - Proiezione Patterson dei vettori interatomici sul piano  $a$ - $b$ . Origine al centro del disegno.

Il modello che risulta da tale interpretazione della proiezione Patterson è mostrato nella fig. 2. Una conferma della sua validità si può ritrovare nel fatto che le distanze tra gli atomi a contatto di molecole adiacenti sono in ottimo accordo con i valori corrispondenti alle distanze di Van der Waals, reperibili in letteratura per altri composti <sup>(5)</sup>. Il riempimento dello spazio appare perfettamente omogeneo. Nel corso dei nostri lavori, questa ci è sempre apparsa una delle più significative prove della bontà di una struttura postulata.

(4) W. COCKRAN, « Acta Cryst », 4, 376 (1951).

(5) H. LIPSON, W. COCHRAN, *The determination of Crystal Structures*, p. 113, G. Bell and Sons Ltd. London (1953).

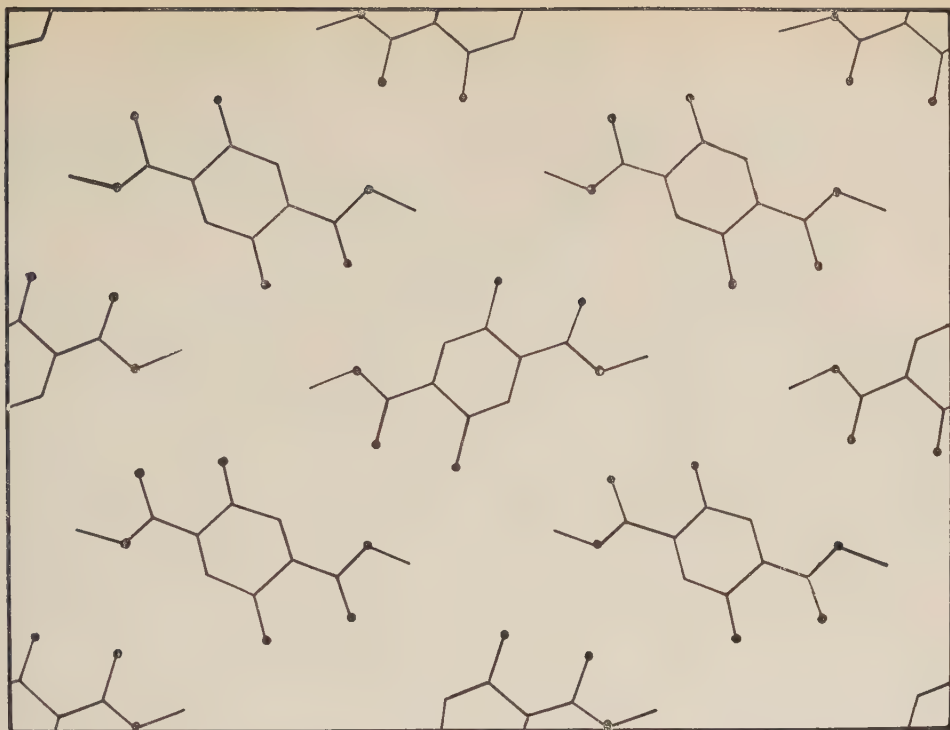


Fig. 2. - Modello schematico dell'impacchettamento delle molecole sul piano  $a-b$  (in scala metà rispetto a quella della fig. 1).



Fig. 3. - Proiezione Fourier preliminare sul piano  $a-b$  ricavata coi fattori di struttura ed i segni di tab. I.



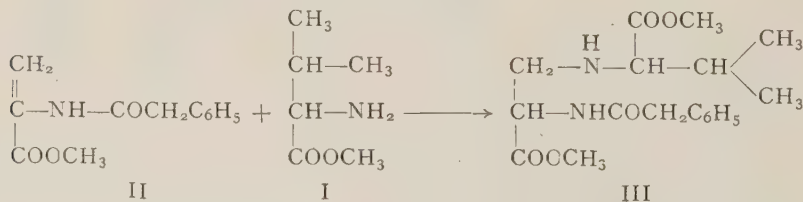
*Analisi Fourier.* - Una proiezione Fourier preliminare è stata pertanto eseguita sul piano *a-b* utilizzando come segni dei fattori di struttura quelli deducibili dal modello proposto (Tabella I). Tale proiezione è mostrata nella fig. 3 e conferma i risultati già dedotti in precedenza. La risoluzione degli atomi è già ottima a questo stadio della ricerca.

Appare chiara la presenza di due doppi legami nell'anello esatomico. Si può ritenere dimostrato che l'anello cicloesadienico, qui per la prima volta studiato in un composto di natura non chinonica, è planare. La distanza dell'ossigeno dal carbonio dell'anello ciclico cui è legato è quella di un legame semplice e conferma la presenza di due ossidrilili nella molecola. Tali ossidrilili non partecipano alla formazione di legami idrogeno tra molecole diverse ma sono chelati all'ossigeno più negativo del gruppo carbossilico. Si tratta di un fenomeno prevedibile trattandosi di un ossidrilile in orto rispetto a un gruppo carbossilico ma che ci risulta osservato per la prima volta coi raggi X in un estere cristallizzabile.

È in corso, data la situazione estremamente favorevole, uno studio più dettagliato della struttura con progressivi raffinamenti atti a fornire dati più precisi relativi a distanze di legami e di Van der Waals e alla locazione degli atomi di idrogeno.

**Chimica.** - *Sull'addizione di ammino-esteri al 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone* (\*). Nota di AURELIO ROMEO e ANNA MARIA SCHIMBERNI, presentata (\*\*) dal Socio G. BARGELLINI.

In un precedente lavoro [1] avevamo dimostrato che l'estere metilico della D-valina (I) si addiziona all'estere metilico dell'acido  $\alpha$ -fenilacetammido acrilico (II) per dare gli esteri dimetilici degli acidi D- $\alpha$  e D- $\gamma$  detiobenzilpenicilloici (III).

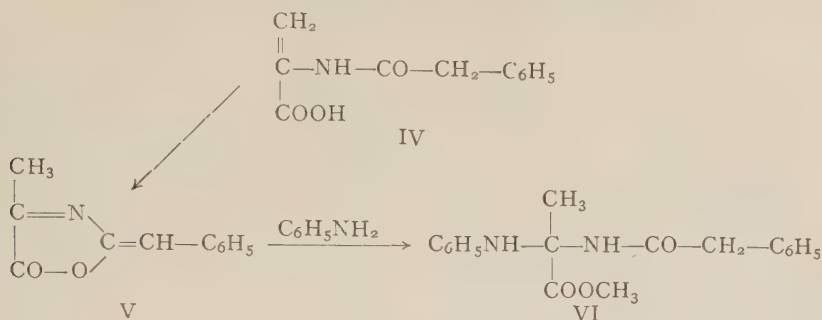


È noto ancora [2] che quando si fa reagire l'ossazolone corrispondente all'acido  $\alpha$ -fenilacetammido acrilico (IV), e cioè il 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone (V), con una soluzione metanolica di anilina contenente piccole tracce di N-etil-piperidina, si ha formazione dell'estere metilico dell'acido

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

$\alpha$ -anilino  $\alpha$ -fenilacetammido-propionico (VI). Cioè avviene un'addizione dell'anilina al sistema insaturo ed una alcoolisi dell'anello ossazolonico.



Pertanto, partendo dagli acidi acilammido-acrilici, è possibile preparare sia derivati dell'acido  $\alpha$ - $\beta$ -diammino-propionico (formule I, II, III) sia derivati dell'acido  $\alpha$ - $\alpha$ -diammino-propionico (formule IV, V, VI).

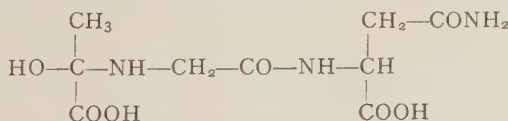
Dato che l'addizione di ammino-esteri semplici o a carattere peptidico non è stata tentata sul 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone, abbiamo cercato di indagare questa reazione in vista della preparazione di composti licomarasinomili<sup>(1)</sup>. Facendo reagire l'ossazolone (V) con l'estere metilico della D-L valina in soluzione metanolica, si ha una reazione istantanea e dopo pochi minuti si forma un abbondante precipitato cristallino che, dopo purificazione, dà un composto i cui dati analitici si accordano con la formula grezza  $\text{C}_{18}\text{H}_{26}\text{O}_5\text{N}_2$ . Il composto ottenuto ha uno spettro di assorbimento nell'ultravioletto diverso da quello dell'ossazolone di partenza (massimo a 242  $m\mu$ ) [3] e con i massimi caratteristici della funzione aromatica presente (fig. 1).



Fig. 1.

Ancora lo spettro nell'infrarosso risulta diverso da quello dell'ossazolone (V) [4] di partenza e molto simile, per quanto riguarda le bande com-

(1) La licomarasmia è una tossina che dovrebbe rispondere secondo D. W. WOOLLEY (« J. Biol. Chem. », 176, 1291 (1948)) alla seguente formula di struttura:



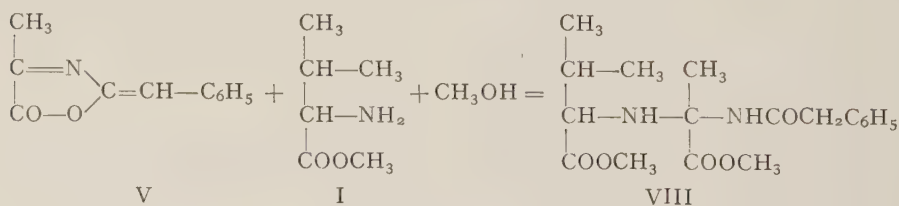
prese tra 5 e 7  $\mu$ , allo spettro dell'estere dimetilico dell'acido D- $\gamma$  detiobenzilpenicilloico (III) (fig. 2, fig. 3 e tabella I) <sup>(2)</sup>.

TABELLA I.

Gruppi	C=O		Ammide mono-sostituita
	Estere	Ammide	
Posizioni normali [5]	5,75	5,95-6,05	6,5-6,7
Estere dimetilico dell'acido D- $\gamma$ detiobenzil-penicilloico . . . . .	5,73 ; 5,78	6,06	6,56
Composto isolato dalla reazione ossazolone + estere valina . . . . .	5,72 ; 5,78	6,04	6,55

Nel caso di quest'ultimo (fig. 3) le due bande a 5,73 e 5,78  $\mu$  sono da assegnarsi al C=O delle funzioni di estere, quella a 6,06  $\mu$  al C=O della funzione ammidica e quella a 6,56  $\mu$  alla funzione ammidica monosostituita. Come si può notare osservando le figure 2 e 3 e la tabella I, anche nel caso del composto da noi precedentemente isolato, devono essere presenti lo stesso tipo di funzioni riscontrate a proposito dell'estere dimetilico dell'acido D- $\gamma$  detiobenzilpenicilloico, in quanto nella regione compresa tra 5 e 7  $\mu$  si ha quasi identità dei due spettri per quanto riguarda la posizione delle bande ivi comprese.

Dai dati precedentemente esposti si può quindi ammettere che la reazione sia avvenuta secondo il seguente schema, analogamente a quanto descritto per l'anilina, per dare il composto (VIII)



In accordo con la struttura assegnata al composto (VIII) da noi isolato, stanno inoltre le determinazioni dei metossili e del peso equivalente eseguito per titolazione potenziometrica con acido perclorico in acido acetico glaciale. Ancora, la formula di struttura (VIII) sarebbe confermata dall'idrolisi acida, in quanto il composto viene scisso in una miscela di acido piruvico, acido fenilacetico e valina. L'idrolisi viene eseguita per riscalda-

(2) Gli spettri nell'infrarosso sono stati eseguiti nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano. Gli spettri sono stati eseguiti in olio di paraffina.

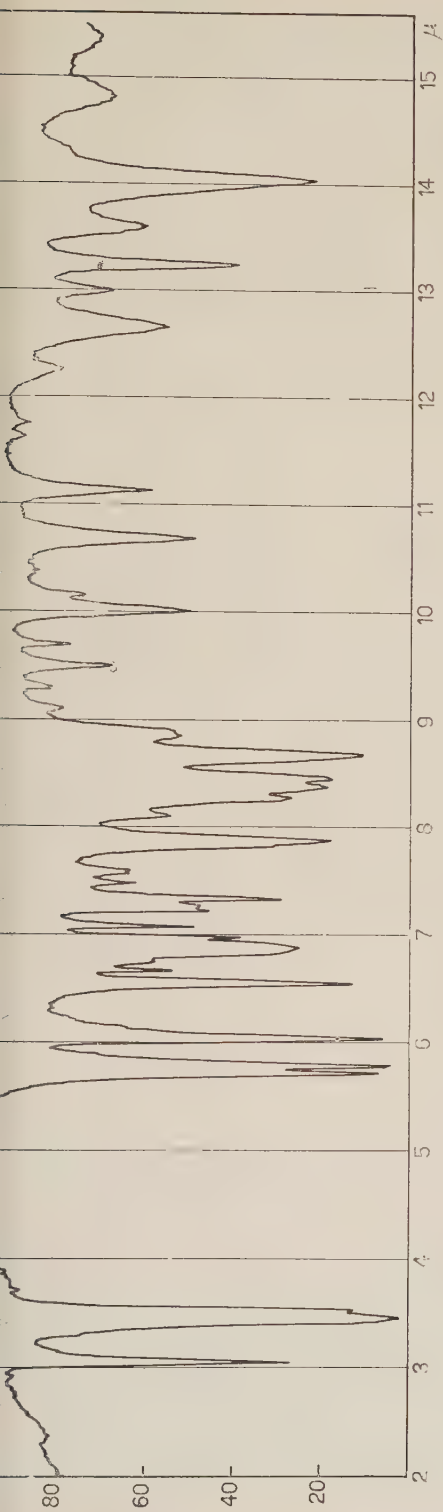


Fig. 2. - Spettro nell'infrarosso del prodotto ottenuto dalla reazione tra il 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone e l'estere metilico della D-L valina.

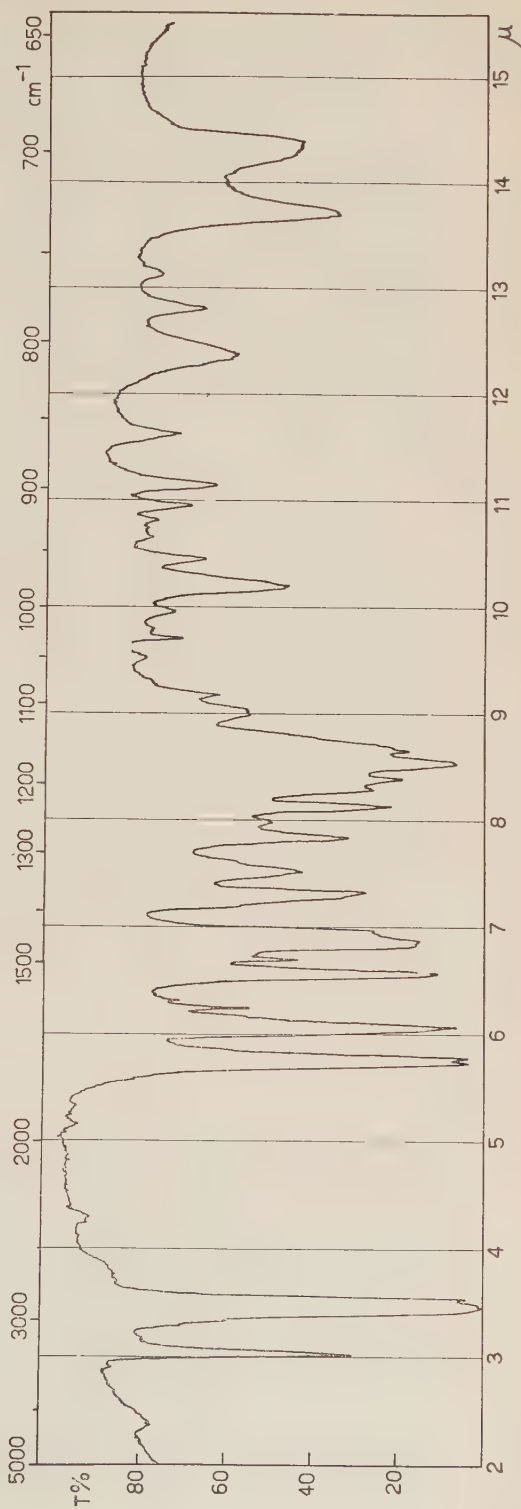


Fig. 3. - Spettro nell'infrarosso dell'estere dimetilico dell'acido D- $\gamma$  detiobenzilpenicilloico.



mento a ricadere di una soluzione del prodotto in acido cloridrico 2N, condizioni nelle quali sistemi derivati dall'acido  $\alpha$ - $\beta$ -diammino-propionico come gli acidi detiobenzilpenicilloici (III) non danno acido piruvico [6].

Facendo reagire sull'ossazolone (V) l'estere metilico della D-valina, con le stesse modalità seguite per l'estere metilico della D-L valina, abbiamo isolato un composto avente la formula grezza identica a quella del composto (VIII) e le stesse proprietà chimiche<sup>(3)</sup>.

Il composto isolato tuttavia presenta un punto di fusione più basso e una maggiore solubilità. In base a questi dati pensiamo trattarsi di uno dei due antipodi ottici corrispondenti al composto (VIII) che verrebbe quindi ad essere un racemato.

Torneremo in un prossimo lavoro sull'argomento.

#### PARTE SPERIMENTALE<sup>(4)</sup>.

*Reazione tra l'estere metilico della D-L valina e il 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone.* - In 35 cm<sup>3</sup> di alcool metilico al 90% sono stati sospesi 2 g di ossazolone. Alla sospensione sono stati aggiunti 4,6 g di estere metilico della D-L valina e si sono lasciati a temperatura ambiente. Dopo 10 minuti circa si è formato un precipitato bianco che è stato filtrato, pesa 1,7 g e fonde a 142°-145°. Per cristallizzazione da acetone-etero di petrolio si hanno cristalli fondenti a 148°-150°.

Le analisi elementari hanno dato i seguenti valori:

	trov %:	C 61,85	H 7,40	N 7,91, 8,02
per C <sub>18</sub> H <sub>26</sub> O <sub>5</sub> N <sub>2</sub>	calc.	61,70	7,48	8,00

La determinazione dei gruppi metossilici con il metodo Zeisel ha dato i seguenti valori:

trov. %:	(OCH <sub>3</sub> )	17,57
calc.		17,69.

(3) Nella reazione di addizione degli esteri della valina (I) all'ossazolone (V), procedendo la reazione come descritto con formazione del composto (VIII), dovrebbero isolarsi due prodotti diastomeri venendosi a creare nell'addizione un nuovo centro di asimmetria. Sia nel caso della reazione con la D-L valina che con la D-valina siamo riusciti ad isolare un solo prodotto. Pertanto pensiamo che l'altro diastomero si trovi nella frazione oleosa. Torneremo sull'argomento in un prossimo lavoro.

(4) I punti di fusione sono stati determinati in un blocco di rame, non sono stati corretti. Le analisi sono state eseguite nel Laboratorio di Chimica Organica del Politecnico Federale di Zurigo dal sig. W. Manser.

Gli spettri nell'U. V. sono stati eseguiti con uno spettrofotometro di Beckman D. U. usando come solvente alcool etilico al 95%.

Le titolazioni potenziometriche sono state eseguite con un potenziometro AESSE. Elettrodi: indicatore, quello di vetro; di riferimento uno a calomelano saturo del tipo a immersione diretta.

La titolazione potenziometrica con acido perclorico in acido acetico glaciale ha dato i seguenti valori:

peso equivalente	trov.	349,6
per $C_{18}H_{26}O_5N_2$	calc.	350,4.

*Reazione tra l'estere metilico della D-valina e il 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone.* — In 30 cm<sup>3</sup> di alcool metilico al 90%, sono stati sospesi 1,3 g di ossazolone. Alla miscela sono stati aggiunti 3 g di estere metilico della D-valina. Dopo circa 15 minuti si è avuta una soluzione completa; la soluzione è stata portata a secco a pressione ridotta e si è avuto un residuo formato da una miscela di cristalli e di olio, si separarono i cristalli per filtrazione. Per cristallizzazione da alcool metilico-acqua si ha un prodotto fondente a 90°-92°.

Le analisi elementari hanno dato i seguenti valori:

	trov. %:	C 61,88	H 7,46	N 7,94
per $C_{18}H_{26}O_5N_2$	calc.	61,70	7,48	8,00.

Potere rotatorio: grammi 0,210 in 2 cm<sup>3</sup> di alcool metilico,  $c = 1,05$ ;

tubo 1 dm  $[\alpha]_D^{20} = -25^\circ$ .

*Idrolisi acida del prodotto (VIII).* — 0,2 g di composto (VIII) sono stati fatti bollire a ricadere con 20 cm<sup>3</sup> di acido cloridrico 2 N. Dopo aver raffreddato la soluzione, su una parte è stata aggiunta una soluzione cloridrica di 2,4-dinitrofenilidrazina, si è avuto un precipitato che fonde dopo cristallizzazione da alcool metilico-acqua a 208°-210°. Il prodotto è stato identificato come il dinitrofenilidrazone dell'acido piruvico in base al punto di fusione in miscela e all'analisi elementare.

Le analisi elementari hanno dato i seguenti valori:

	trov. %:	C 40,40	H 3,07	N 21,00
per $C_9H_8O_6N_4$	calc.	40,30	3,01	20,89.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] AURELIO ROMEO, A. M. SCHIMBERNI, C. SAVIOLI, « Annali di Chimica », **46**, 1146 (1956).
- [2] *The Chemistry of Penicillin* edito da CLARKE H. T., JOHNSON J. R., ROBINSON R., Princeton University Press (1949), p. 799, Merck, M. 76.
- [3] J. A. KING e F. H. McMILLAN, « J. Am. Chem. Soc. », **72**, 835 (1950).
- [4] *The Chemistry of Penicillin*, p. 387.
- [5] *The Chemistry of Penicillin*, p. 409.
- [6] AURELIO ROMEO, G. DI MAIO, « Annali di Chimica », **47**, 624 (1957).

**Chimica.** — *Composti solfonamidici a nucleo dell'indolo.* — *Il 5-solfonammido-triptofano* <sup>(\*)</sup>. Nota I di RAFFAELE GIULIANO e MARIA LUISA STEIN, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. GIACOMELLO.

Sono molteplici e concordi le segnalazioni che attribuiscono al triptofano un effetto favorevole sullo sviluppo dei batteri. Ciò si può altresì desumere indirettamente da quanto è stato constatato a proposito dell'effetto degli antibiotici in presenza di triptofano. Infatti Woolley <sup>(1)</sup> ha riferito che il triptofano inibisce l'azione antibatterica della cloromicetina e Bergmann e coll. <sup>(2)</sup> hanno esteso tale osservazione anche ad altri antibiotici quali l'aureomicina e la terramicina. Altrettanto si verifica per i solfammidici nelle prove che sono state eseguite con la solfo-diazina <sup>(3)</sup>.

D'altra parte è stato segnalato che l'attività dei solfammidici viene aumentata di circa dieci volte in presenza di 5-metil-triptofano <sup>(4)</sup> al quale le esperienze di Beerstecher <sup>(5)</sup> fanno assegnare un'azione antibatterica.

La grande ripercussione su questo aspetto del comportamento biochimico del triptofano stesso, esercitata dalla introduzione di un gruppometilico in posizione 5, ha sorretto validamente la nostra idea di introdurre nella stessa posizione un aggruppamento a tale scopo tanto più qualificato, quale è quello solfonamidico.

Per di più in epoca molto recente Reisner <sup>(6)</sup> ha richiamato l'attenzione sui derivati solfonamidici degli ammino-acidi, sui quali la letteratura non è prodiga di notizie.

Per la preparazione del 5-solfonammido-triptofano abbiamo applicato la sintesi indolica di Fischer al 4-solfonammido-fenilidrazone dell'aldeide  $\gamma$ -acetammino- $\gamma$ ,  $\gamma$ -dicarbetossi-butirrica procedendo secondo il seguente schema di reazioni:

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) D. W. WOOLLEY, « J. Biol. Chem. », 185, 293 (1950).

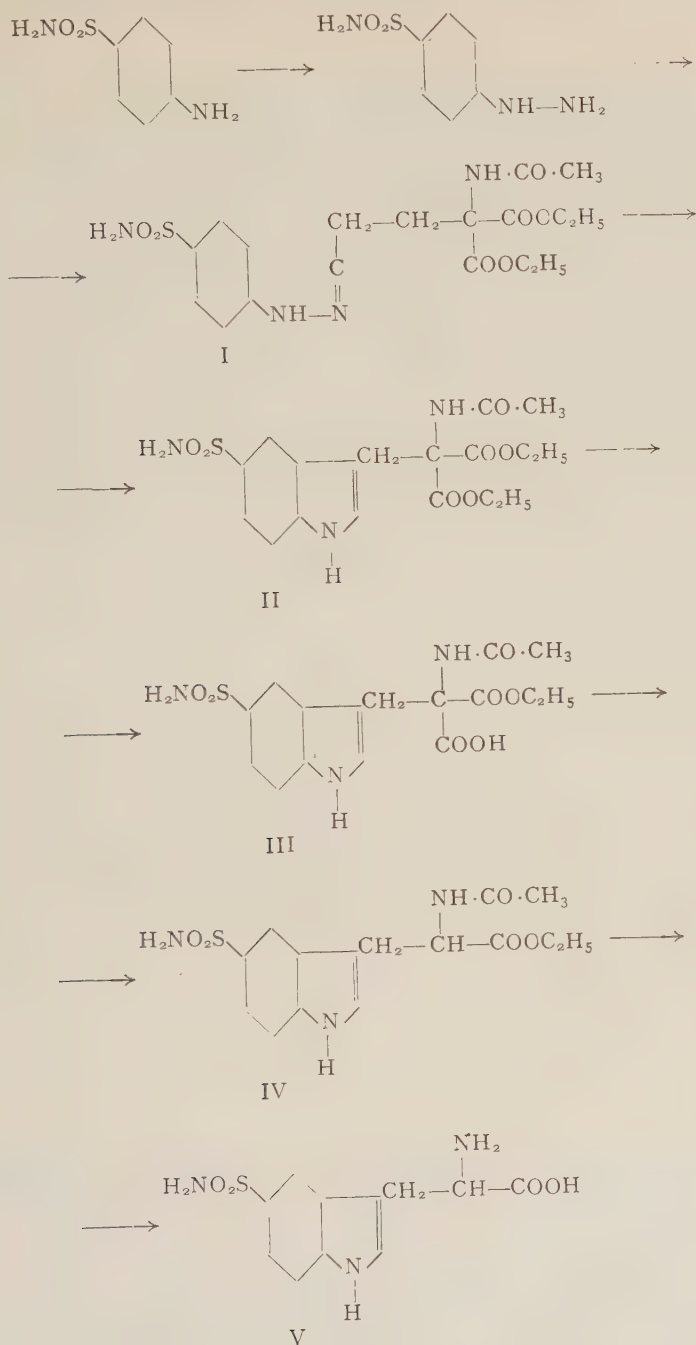
(2) E. D. BERGMANN, S. SICHER e B. E. VOLCANI, « Bull. Research Council Israel », 4, n. 1, 19 (1954); « Chem. Abs. », 49, 4078 (1955).

(3) U. MONDOLFO, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 24, 1082 (1948).

(4) U.S.P. 2.485.501, « Chem. Abs. », 44, 1233 (1950).

(5) E. BEERSTECHER, « J. Bacteriol. », 68, 152 (1954).

(6) D. B. REISNER, « J. Am. Chem. Soc. », 78, 5102 (1956).



Sono in corso prove intese a stabilire l'interferenza metabolica della sostanza nei confronti degli schizomiceti e dei miceti.

I più vivi ringraziamenti rinnoviamo qui al prof. G. Giacomello per i consigli che ci ha dato durante lo svolgimento di questo lavoro.



## PARTE SPERIMENTALE.

*4-solfonammido-fenilidrazina*. - È stata preparata dalla solfanilammide per diazotazione e riduzione del sale di diazonio con cloruro stannoso o con solfito di sodio <sup>(7)</sup>.

*4-solfonammido-fenilidrazone dell'aldeide  $\gamma$ -acetammino- $\gamma,\gamma$ -dicarbetossi-butirrica* <sup>(1)</sup>. - g 14 di 4-solfonammido-fenilidrazina vengono addizionati di 28 cc. di acido acetico e l'acetato dell'idrazina, che si forma visibilmente dopo qualche minuto, viene disciolto a lieve calore in 140 cc di acqua. A questa soluzione acetica si aggiunge la soluzione alcoolica di aldeide  $\gamma$ -acetammino- $\gamma$ ,  $\gamma$ -dicarbetossi-butirrica ottenuta facendo reagire g 16,2 di estere acetammino-malonico e g 4,80 di acroleina nelle condizioni descritte da Moe e Warner <sup>(8)</sup>. Dopo qualche tempo l'idrazone (I) si separa dapprima in parte oleoso e poi cristallino; dal liquido madre si ottengono ulteriori quantità del prodotto per successive diluizioni con acqua. Il composto cristallizza bene da alcool ed allo stato puro fonde a 142°.

Analisi:

per $C_{18}H_{26}N_4O_7S$	trov. %	S 7,22
	calc.	7,24

*Estere etilico dell'acido  $\alpha$ -carbetossi- $\alpha$ -acetammino- $\beta$  (5-solfonammido-indol-3)-propionico* (II). - g 5 dell'idrazione I si mescolano con g 5-6 di cloruro di zinco anidro polverizzato ed al miscuglio si aggiungono 20 cc di xilolo. Si fa bollire a ricadere per 2 ore, dopo di che si decanta lo xilolo ed il residuo seccato sotto vuoto, che si presenta come una pece chiara, si rimescola con acqua acidulata con acido cloridrico fino ad ottenere un prodotto solido, che viene raccolto e lavato con acqua. Cristallizzato da alcool etilico decolorando con carbone, esso si presenta sotto forma di piccoli cristalli bianchi che fondono a 214-215°.

Analisi:

per $C_{18}H_{23}N_3O_7S$	trov. %	S 7,29	N 9,79
	calc.	7,54	9,88

*Acido  $\alpha$ -carbetossi- $\alpha$ -acetammino- $\beta$  (5-solfonammido-indol-3)-propionico* (III). - g 3 dell'estere II si sospendono in 30 cc di alcool etilico e si aggiungono 30 cc di NaOHN. La soluzione si lascia per una notte a temperatura ambiente, indi si sottopone ad una corrente di CO<sub>2</sub> e poi si concentra per eliminare buona parte dell'alcool. Si filtra per separare piccole quantità di prodotto di partenza eventualmente presenti ed il filtrato si acidifica con acido cloridrico al rosso Congo. Per raffreddamento si separa molto lentamente un composto cristallino, molto solubile in alcool etilico, facilmente in acqua bollente, da cui si ottiene ben cristallizzato con p. f. 145° (dec.).

(7) G. B. CRIPPA e S. MAFFEI, « Gazz. Chim. Ital. », 72, 98 (1942); G. B. CRIPPA e M. GUARNERI, « Il Farmaco » ed. sc. 10, 695 (1955).

(8) O. A. MOE e D. T. WARNER, « J. Am. Chem. Soc. », 70, 2764 (1948).

Analisi:

per $C_{16}H_{19}N_3O_7S$	trov. %	S 7,78
	calc.	8,06

*Estere etilico del 5-solfonammido-N-acetil-triptofano* (IV). — Si ottiene per decarbossilazione del composto III mediante riscaldamento a 150–170° fino a che il prodotto, dapprima fuso, risolidifica. La decarbossilazione avviene egualmente evaporando a secco una soluzione acquosa del composto III; in questa maniera si possono utilizzare le acque madri della cristallizzazione ed anche il liquido idro-alcoolico da cui è stato separato il composto II secondo le indicazioni del paragrafo precedente. In quest'ultimo caso dal residuo dell'evaporazione, contenente anche cloruro di sodio, si estrae il composto IV con alcool assoluto.

Il composto IV cristallizza bene da alcool etilico sotto forma di cristalli bianchi, insolubili in soluzione di bicarbonato di sodio, con p. f. 218–219°.

Analisi:

per $C_{15}H_{19}N_3O_5S$	trov. %	C 50,70	H 5,41	S 9,31
	calc.	50,99	5,42	9,07

*5-solfonammido-triptofano* (V). — Si fanno bollire a ricadere per 12 ore g 1 del composto IV con 20 cc di  $H_2SO_4N$ , indi si aggiunge la quantità corrispondente di soluzione di  $Ba(OH)_2$ . Si filtra ed il filtrato si evapora a secco su bagnomaria.

Il residuo si purifica estraendo con alcool assoluto piccole quantità di prodotti di parziale saponificazione ed infine si cristallizza da acqua. Si ottengono così bei cristalli bianchi che fondono a 281° (dec.).

Il composto dà intensa colorazione violetta nella reazione con ninidrina.

Analisi:

per $C_{11}H_{13}N_3O_4S$	trov. %	N. 14,78	S 11,59
	calc.	14,84	11,32

**Chimica organica.** — *Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer* (\*).

Nota III di FRANCO PIOZZI, presentata (\*\*) dal Socio A. QUILICO.

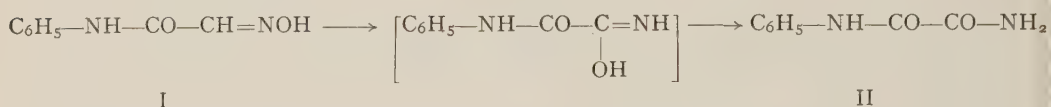
Gli ottimi risultati ottenuti da vari Autori in diverse reazioni di ciclizzazione-disidratazione mediante l'uso del cosiddetto «acido polifosforico» ci avevano spinto a sperimentare l'uso di questo e di altri agenti ciclizzanti in luogo dell'acido solforico concentrato nella sintesi isatinica di Sandmeyer via isonitrosoacetanilide I: ciò nella speranza di ottenere con l'acido poli-

(\*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

fosforico risultati ancora migliori di quelli, pur soddisfacenti, dati dall'acido solforico concentrato.

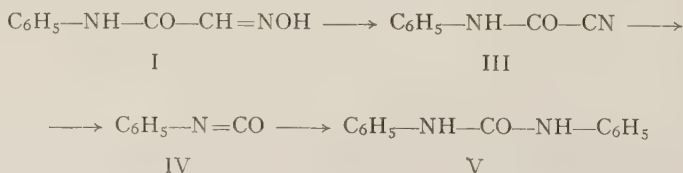
In un precedente lavoro <sup>(1)</sup> abbiamo riferito i risultati delle nostre esperienze con acido polifosforico. Contrariamente alle aspettative, le rese e il grado di purezza delle isatine ottenute sono stati più o meno nettamente inferiori a quelli ottenibili con l'acido solforico. Sono state isolate invece quantità variabili di fenilossammide II o di fenilossammidi sostituite, la cui formazione abbiamo logicamente attribuito a una trasposizione di Beckmann di prima specie:



In seguito abbiamo compiuto esperienze per osservare il comportamento dell'isonitrosoacetanilide con altri reagenti, quali l'acido fosforico (all'82 % in peso) e il pentacloruro di fosforo, nella speranza di ottenere egualmente la ciclizzazione ad isatina.

Con acido fosforico di densità 1,65 (all'82 % in peso), accanto ad abbondanti prodotti amorfi si è ottenuta una discreta percentuale di  $\beta$ -ossima dell'isatina: questa deriva evidentemente dall'azione dell'idrossilammina (proveniente dall'idrolisi dell'isonitrosoacetanilide in ambiente acquoso acido) sull'isatina formatasi in piccola quantità nelle condizioni di ciclizzazione; di isatina libera si sono trovate solo tracce rivelabili con la reazione dell'indofenina <sup>(2)</sup>.

Al contrario, per azione del pentacloruro di fosforo sull'isonitrosoacetanilide non si sono ottenute né isatina né sostanze ad essa collegate, bensì *cianformanilide* III, *fenilisocianato* IV e *difenilurea* V: la genesi di queste sostanze ci pare da attribuire a una cosiddetta trasposizione di Beckmann di seconda specie <sup>(3)</sup>:



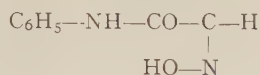
Ciò suggerisce tra l'altro una considerazione sulla struttura dell'isonitrosoacetanilide stessa: il fatto che essa subisca le trasposizioni di Beckmann di prima e di seconda specie con la formazione dei composti II e III

(1) F. PIOZZI e G. FAVINI, « Rend. Acc. Lincei » [8], 18, 647 (1955).

(2) La  $\beta$ -ossima dell'isatina non dà la reazione dell'indofenina.

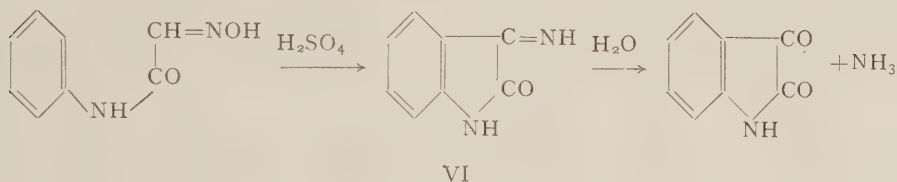
(3) Reazioni analoghe sulla isonitrosoacetanilide erano già state osservate: con cloruro di benzoile W. BORSCHÉ e A. FRITSCHÉ, « B. », 59, 275 (1926) avevano ottenuto difenilurea, mentre con cloruro di tionile P. KARRER, G. H. DIECHMANN e W. T. HAEBLER, « Helv », 7, 1031 (1924) avevano ottenuto cianformanilide.

si spiega meglio ammettendo per essa la configurazione  $\beta$  (*anti*) di una aldossima (4,5):



Ammissa come possibile per l'isonitrosoacetanilide la configurazione *anti*, ci siamo chiesti se ciò poteva avere interesse nei riguardi del meccanismo di reazione della ciclizzazione ad isatina.

È noto infatti, in quanto affermato da Sandmeyer (6) e da tutti accettato, che la ciclizzazione decorre con formazione intermedia della  $\beta$ -immide dell'isatina VI (7) secondo lo schema seguente



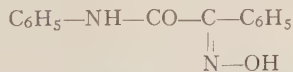
dal quale risulta tutt'altro che evidente nella scrittura il modo in cui avviene la reazione.

A parte ciò, non ci risulta che siano mai state avanzate ipotesi sul meccanismo della ciclizzazione.

L'isolamento della fenilossammide nella ciclizzazione con acido polifosforico indica che in quelle condizioni è avvenuta (sia pure in piccola parte se ne prendiamo come indice la resa in fenilossammide) una trasposizione di Beckmann di prima specie: ci si può quindi porre il quesito se la trasposizione stessa sia *a*) una reazione parassita collaterale alla ciclizzazione, oppure

(4) L'isonitrosoacetanilide è conosciuta in una sola forma, e si ritiene che le aldossime alifatiche esistano in genere solo nella forma *anti* stabile: tuttavia l'attribuzione della configurazione alle aldossime alifatiche è notoriamente difficile e dubbia.

(5) La configurazione *anti* sarebbe confermata dalla reazione dell'isonitrosoacetanilide con benzendiazoidrato, che porta alla  $\beta$ -ossima della fenilgliossil-anilide.



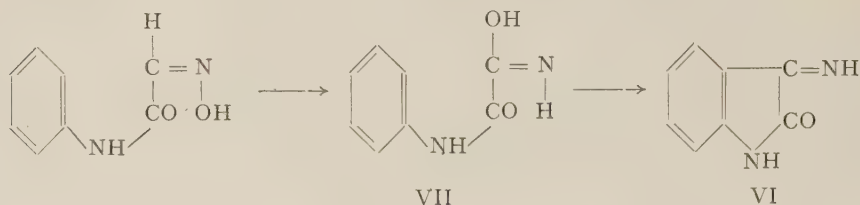
avente cioè configurazione *sin*-fenile: vedi W. BORSCHÉ e A. FRITSCHÉ, « B. », 59, 275 (1926). Condensazioni di tale genere provocano l'inversione della configurazione.

(6) T. SANDMEYER, « Helv. », 2, 234 (1919).

(7) A riprova della formazione di questo composto citiamo la colorazione rosso-violacea delle soluzioni solforiche o polifosforiche in cui si è fatta avvenire la ciclizzazione e l'identica colorazione rosso-violacea delle soluzioni solforiche o polifosforiche di  $\beta$ -immide dell'isatina, da noi preparata per il confronto secondo A. REISSERT e H. HOPPMANN, « B. », 57, 972 (1924); l'isatina invece si scioglie in detti acidi con colorazione aranciata. Inoltre la reazione dell'indofenina è negativa sia sulla  $\beta$ -immide dell'isatina, sia sulla soluzione solforica di ciclizzazione.



b) una reazione intermedia della ciclizzazione, che avverrebbe sulla forma enolica della fenilossammide VII secondo lo schema:



Se questa seconda alternativa b) fosse vera, il non ottenimento di fenilossammide nella ciclizzazione con acido solforico si spiegherebbe col fatto che questo nelle condizioni di reazione giunge a idrolizzarla facilmente ad anilina, come abbiamo verificato sulla fenilossammide sintetica <sup>(8)</sup>.

A favore della prima alternativa a) sta il fatto che nella ciclizzazione con acido polifosforico le rese in fenilossammidi aumentano col diminuire delle rese in isatine, a seconda del termine di isonitrosoacetanilidi sostituite preso in esame.

Dato l'equilibrio ovviamente esistente tra la forma chetonica e la forma enolica della fenilossammide, dovrebbe essere possibile trasformare questa sostanza in  $\beta$ -immide dell'isatina. Purtroppo non ci è stato possibile ciclizzare a isatina né la fenilossammide né vari suoi omologhi, quali l'*acido ossanilico* <sup>(9)</sup>, l'*estere etilico dell'acido ossanilico* <sup>(10)</sup>, l'*ossanilide* <sup>(11)</sup>; tutte queste sostanze sono state degradate dall'acido solforico, alcune anche dall'acido polifosforico. Ciò abbiamo attribuito all'essere la tautomeria chetoenolica completamente spostata verso la forma chetonica. In alcuni casi infatti, in cui anche la forma enolica è da ritenere presente in proporzioni apprezzabili all'equilibrio, risulta dalla letteratura che si è riscontrata la ciclizzazione a isatina, sia pure in tracce o in quantità molto modeste: è il caso della *ammide dell'acido tio-ossanilico*  $C_6H_5-NH-CO-CS-NH_2$  <sup>(12)</sup>, della *tio-ossanilide*  $C_6H_5-NH-CO-CS-NH-C_6H_5$  <sup>(12)</sup>, della  $\alpha$ -*anil-fenil-ossammide*  $C_6H_5-NH-C(=N-C_6H_5)-CO-NH_2$  <sup>(13)</sup>, del *cloruro di dianil-ossalile*  $C_6H_5-N=CCl-CCl=N-C_6H_5$  <sup>(14)</sup>. Per ultimo, ma non in ordine di impor-

(8) Preparata secondo A. REISSERT, « B. », 37, 3716 (1904), per azione di ammoniacca sull'estere etilico dell'acido ossanilico: P.F. 230°-231° dopo cristallizzazione da acido acetico o sublimazione nel vuoto. Nella reazione si forma anche dell'ossanilide, facilmente isolabile.

(9) Preparato secondo O. ASCHAN, « B. », 23, 1820 (1890) per ebollizione di anilina con acido ossalico: P.F. 150° dopo cristallizzazione da acqua. Nella reazione si forma anche poca ossanilide, facilmente isolabile.

(10) Preparato secondo H. KLINGER, « A. », 184, 263 (1877) da ossalato di etile e anilina: P.F. 66°-67° dopo cristallizzazione da alcool acquoso.

(11) Ottenuta come sottoprodotto della preparazione della fenilossammide e dell'acido ossanilico; cristallizzata da acido acetico o sublimata presenta P.F. 254°-255°.

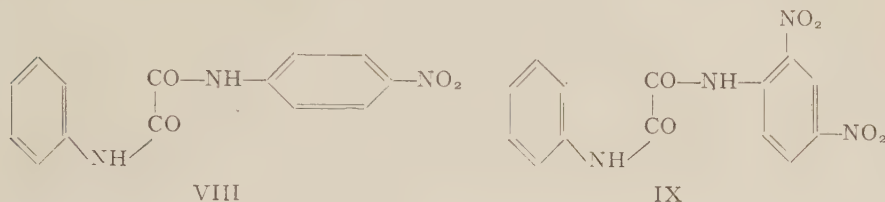
(12) A. REISSERT, « B. », 37, 3724 (1904).

(13) G. SCHULTZ, G. ROHDE e G. HERZOG, « J. pr. » [2], 74, 74 (1906).

(14) R. BAUER, « B. », 40, 2650 (1907).

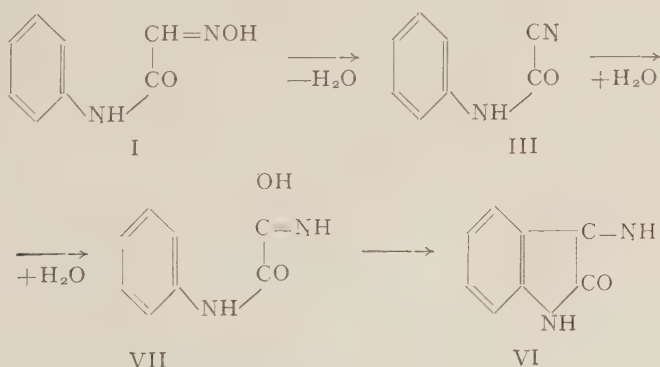
tanza, ricordiamo il caso della  $\alpha$ -anil-fenil-tioossammide  $C_6H_5-NH-C(=N-C_6H_5)-CS-NH_2$  nell'altra notissima sintesi di Sandmeyer dell'isatina (via difeniltiourea), la quale ciclizza con acido solforico concentrato ad  $\alpha$ -anil-isatina con resa quantitativa<sup>(15)</sup>.

Allo scopo di verificare questa ipotesi abbiamo quindi preparato alcune ossanilidi opportunamente sostituite per facilitare l'enolizzazione, quali la 4-nitro-ossanilide VIII<sup>(16)</sup> e la 2,4-dinitro-ossanilide IX: però solo da quest'ultima, pur non essendo stato possibile isolare isatina, si è avuta debole ma sicura reazione dell'indofenina



Per ritenere attendibile l'ipotesi che la formazione della  $\beta$ -immide dell'isatina decorra tramite la trasposizione di Beckmann, bisognerebbe ammettere che in acido solforico la velocità di ciclizzazione della forma enolica sia molto superiore alla velocità di tautomerizzazione: ciò nel caso del termine non sostituito. L'uso di un agente ciclizzante diverso (per es. l'acido polifosforico) e la presenza di sostituenti nell'anello benzenico varierebbero il rapporto delle due velocità rendendole dello stesso ordine di grandezza: questo spiegherebbe la prevalenza della formazione delle alogeno-fenilosammidi sulla formazione delle alogeno-isatine nella reazione con acido polifosforico<sup>(17)</sup>.

Come alternativa ad un meccanismo basato sulla trasposizione di Beckmann si potrebbe pensare ad un meccanismo di condensazione di tipo aldolico, oppure a una trasposizione di tipo benzilico, oppure ancora a una condensazione per disidratazione secondo lo schema



(15) T. SANDMEYER, « Z. Farb. Textile Chem. », 2, 129 (1903); vedi anche « Friedländers Forsch. Teerfarbenfabr. », 6, 578-582 (1904) e « Chem. Zentral. », 1900, II, 929, 1901, II, 750.

(16) Preparata secondo H. SUIDA jun., « M. », 31, 605 (1910) scaldando a 220° per due ore estere ossanilico e p-nitroanilina: aghi grigi da acetato di etile, P.F. 251°-252°.

A favore di quest'ultima ipotesi sta il fatto che la formazione di isatina si riscontra solo con agenti ciclizzanti contenenti piccole quantità di acqua; inoltre abbiamo riscontrato la formazione di tracce di isatina (rivelabili con la reazione dell'indofenina) scaldando la cianformanilide III con acido solforico concentrato <sup>(17)</sup>.

Nella parte sperimentale riferiamo brevemente sulle prove di ciclizzazione. Descriviamo inoltre la 2,4-dinitro-ossanilide, non nota nella letteratura.

#### PARTE SPERIMENTALE <sup>(18)</sup>.

1. *Reazione tra isonitrosoacetanilide e acido polifosforico. Trasposizione di Beckmann di 1<sup>a</sup> specie.* - Le modalità dell'operazione sono state già descritte <sup>(1)</sup>. La fenilossammide isolata è stata purificata per cristallizzazione da acido acetico glaciale o per sublimazione nel vuoto, e presenta P.F. 230°-231°.

2. *Reazione tra isonitrosoacetanilide e pentacloruro di fosforo. Trasposizione di Beckmann di 2<sup>a</sup> specie.* - Si mescolano in un palloncino g 1 di isonitrosoacetanilide e g 2 di pentacloruro di fosforo, si aggiungono 20 cm<sup>3</sup> di toluene secco e si bolle a ricadere per un'ora. Si lava la soluzione toluenica con acqua alcalina, poi al toluene (avente forte odore di *fenilisocianato*) si aggiungono 50 cm<sup>3</sup> di acqua e si distilla rapidamente fino ad aver allontanato tutto il toluene. Nel refrigerante si raccolgono abbondanti aghetti bianchi di *difenilurea*, P. F. 245° dopo cristallizzazione da acido acetico glaciale, senza depressione anche in miscela con *difenilurea* sintetica <sup>(19)</sup>. Analisi:

	trov. % N	13,16
per C <sub>13</sub> H <sub>12</sub> ON <sub>2</sub>	calc. % N	13,20

Nel distillato si percepisce ancora l'odore di *fenilisocianato*. Dal liquido rimasto nel pallone dopo raffreddamento si separano piccole quantità di *cianformanilide*, che si purifica cristallizzandola da benzolo oppure meglio sublimandola molto cautamente a 80° e 1 mmHg; al riscaldamento in tubicino capillare la sostanza decompone tra 125° e 135° fondendo <sup>(20)</sup>. Analisi:

	trov. % N	19,11
per C <sub>8</sub> H <sub>6</sub> ON <sub>2</sub>	calc. % N	19,17.

(17) La ciclizzazione di alcune cianformanilidi sostituite a isatine è stata realizzata da G. KRÄNZLEIN, A. WOLFRAM ed E. HAUSDÖRFER, U.S. Patent 1792170, «C.A.», 25, 1845 (1931) impiegando come condensante il cloruro di alluminio.

(18) I punti di fusione sono tutti corretti.

(19) Preparata per lenta reazione a freddo di *fenilisocianato* in etere umido; i grossi cristalli incolori ottenuti vengono cristallizzati da alcool o da acido acetico: P.F. 245°.

(20) La sostanza non ha un punto di fusione definito. Anche il confronto sul prodotto sintetico, preparato secondo P. KARRER e coll., «Helv.», 7, 1031 (1924), mostra che solo verso 135° si completa la fusione mentre si ha una progressiva alterazione già a partire da 120°. Vari Autori danno per il punto di fusione valori variabili tra 120° e 128°.

Al riscaldamento in provetta su fiamma diretta la sostanza svolge acido cianidrico (arrossa la cartina al tornasole) e fenilisocianato (riconoscibile all'odore caratteristico); bollita con acqua dà facilmente difenilurea, P. F. 245°.

3. *Reazione tra isonitrosoacetanilide e acido fosforico dens. 1,65.* — In una beutina si introducono 40 cm<sup>3</sup> di acido fosforico avente densità 1,65 (all'82 % in peso), si scalda con bagno d'olio a 110° e agitando con una bacchettina si aggiungono a porzioni 2 g di isonitrosoacetanilide: si scalda ancora per mezz'ora a quella temperatura poi si lascia raffreddare e si versa in acqua e ghiaccio. Il precipitato, costituito da una sostanza fioccosa amorfa di colore marroncino che imbrunisce all'aria, azotata (trov. % N 12,74), solubile in alcali caustici e non cristallizzabile da alcun solvente, viene allontanato per filtrazione; il filtrato intensamente giallo viene estratto ripetutamente con etere: seccato e svaporato l'etere, si ottiene un residuo giallo costituito da  $\beta$ -ossima dell'isatina con tracce di isatina (reazione dell'indofenina positiva): si ottengono g 0,35 di sostanza grezza, con resa del 17–18 % considerandola tutta  $\beta$ -ossima dell'isatina. La sostanza cristallizza agevolmente da acido acetico glaciale in piastrine dure e trasparenti di color giallo carico <sup>(21)</sup>, da acqua in feltro di lunghi aghi soffici giallo oro, da alcool 50 % in feltro di aghetti gialli minutissimi: presenta P. F. 217° dec. Analisi:

	trov. %	C 59,06	H 4,01	N 17,24
per C <sub>8</sub> H <sub>6</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	calc. %	C 59,26	H 3,73	N 17,28.

La sostanza è solubile in acido solforico concentrato con intensa colorazione rosso ciliegia, e in idrati alcalini con colorazione aranciata carica: acidificando il colore torna giallo dorato e si separa cristallina la  $\beta$ -ossima dell'isatina.

Le caratteristiche fisiche e chimiche corrispondono a quella della  $\beta$ -ossima dell'isatina sintetica preparata per il confronto <sup>(22)</sup>.

4. *Reazione tra cianformanilide e acido solforico.* — In 10 cm<sup>3</sup> di acido solforico concentrato mantenuto alla temperatura di 105° si aggiungono a porzioni g 0,5 di cianformanilide <sup>(20)</sup>, scaldando poi ancora per mezz'ora a tale temperatura. La soluzione di colore marrone rosso viene gettata in 100 g di ghiaccio ed estratta con etere: dall'etere resta dopo evaporazione uno scarso residuo oleoso da cui è possibile isolare per sublimazione nel vuoto

(21) Nelle acque madri acetiche usate per la prima cristallizzazione di alcune partite di prodotto grezzo si concentrano piccole quantità di una sostanza bianca azotata (trov. % N 8,62) avente P.F. 255° circa, solubile in idrati alcalini da cui riprecipita con acidi; riscaldata sotto vuoto decompone dando uno scarso sublimato giallastro. Se ne è trascurato l'ulteriore studio.

(22) Secondo W. BORSCHÉ e W. SANDER, « B. », 47, 2819 (1914), che danno P.F. 221°–222° dec.



minuti cristallini di isatina; questa si rivela anche nettissimamente con la reazione dell'indofenina. Rese trascurabili.

5. *Preparazione della 2,4-dinitro-ossanilide.* - Quantità equimolecolari di etere etilico dell'acido ossanilico e di 2,4-dinitro-anilina vengono scaldate a bagno d'olio a 230°-240° per due ore. La massa solidificata a freddo viene lungamente macinata con pochissimo acetato d'etile caldo per asportare i prodotti di partenza non reagiti: il residuo, sublimato a 200° e 1 mmHg, si presenta come polvere microcristallina giallastra avente P. F. 279°-280°. Analisi:

	trov. % N 16,84
per $C_{14}H_{10}O_6N_4$	calc. % N 16,97.

6. *Reazione tra acido solforico e derivati dell'acido ossanilico.* - La ciclizzazione a isatina è stata tentata sull'acido ossanilico, sul suo estere etilico, sulla fenilossammide, sull'ossanilide e sulla 4-nitro-ossanilide, riscaldando a temperature variabili tra 60° e 150° e per tempi da cinque a trenta minuti le sospensioni dei composti in acido solforico concentrato. Dopo la reazione la soluzione solforica veniva versata in acqua ed estratta con etere. In nessun caso è stata accertata la formazione di isatina (reazione dell'indofenina negativa). Accanto a prodotti resinosi bruni non estraibili con etere, nelle acque solforiche si è riconosciuta la presenza di piccole quantità di anilina, eccetto il caso della 4-nitro-ossanilide in cui si è isolata ovviamente p-nitro-anilina.

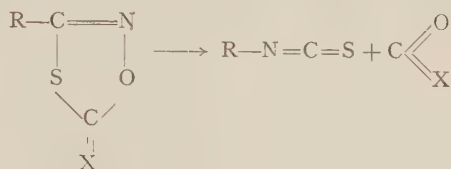
7. *Reazione tra acido solforico e 2,4-dinitro-ossanilide.* - La sospensione di g 0,5 di 2,4-dinitro-ossanilide in 5 cm<sup>3</sup> di acido solforico concentrato è stata scaldata per dieci minuti a 100°, poi gettata in acqua e ghiaccio: filtrati dei prodotti bruni, tra cui un po' della sostanza di partenza inalterata, il filtrato giallo è stato estratto con etere, che seccato e svaporato ha dato uno scarso residuo giallo rossastro. Un campione del residuo, cristallizzato da acido acetico, ha dato 2,4-dinitro-anilina, P. F. 176°; altri campioni con tiofene e acido solforico hanno dato lieve ma sicura reazione verdastra dell'indofenina.

8. *Reazione tra acido polifosforico e derivati dell'acido ossanilico.* - La ciclizzazione è stata tentata senza successo sui medesimi composti sperimentati con l'acido solforico. Dalle operazioni condotte sotto 100° si sono recuperati i prodotti di partenza, da quelle condotte sopra 100° si sono isolate anilina, p-nitro-anilina e 2,4-dinitro-anilina. La ciclizzazione dell'acido ossanilico con acido polifosforico è stata tentata anche in diossano all'ebollizione, ma con esito negativo.

**Chimica organica.** — *Decomposizione termica di 1-2-4-osodiazoloni-5. Una nuova sintesi di benzimidazoli* (\*). Nota di TULLIO BACCHETTI e ANDREINA ALEMAGNA, presentata (\*\*) dal Socio L. CAMBI.

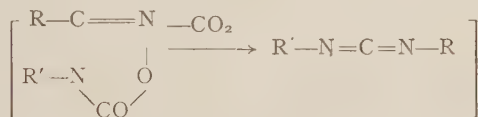
Nell'ambito delle ricerche in corso sugli acidi tioidrossammici è stata considerata una interessante trasposizione <sup>(1)</sup>.

Alcuni eterocicli, la cui struttura riteniamo corretta anche per quei termini ai quali è stata assegnata soltanto per analogia, si trasformano, o spontaneamente, o per debole riscaldamento secondo lo schema:

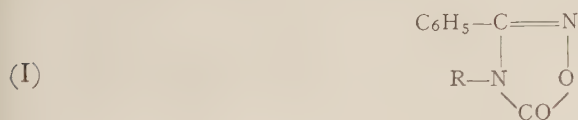


dove X = O, S, NH, N—C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>.

Ci siamo proposti di verificare se, anche nel caso degli 1-2-4-osodiazoloni-5, l'effetto della decarbossilazione potesse esplicarsi con la migrazione di un radicale R dall'atomo di carbonio ad uno di azoto. Avremmo ottenuto analogamente la sintesi di carbodiimmidi:



Al nostro scopo serviva un osodiazolone 4-sostituito per garantire la forma carbonilica della posizione 5 che, in caso contrario, viene a trovarsi in equilibrio tautomerico con quella carbinolica. Ci siamo serviti perciò, come primo termine, del 3-4-difenil-1-2-4-osodiazolone-5 già noto (formula I con R = fenile)



Sottoposto a graduale riscaldamento a secco ed a pressione ambiente esso perde CO<sub>2</sub> intorno ai 200°. Non si ha però formazione di carbodifenilimide bensì di 2-fenilbenzimidazolo con alta resa. Il medesimo trattamento è stato successivamente usato per altri termini del tipo I con

(\*) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Chimica Industriale Inorganica dell'Università di Milano.

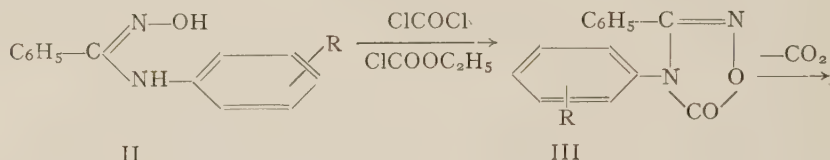
(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) R. FUSCO e C. MUSANTE, «Gazz. Chim. Ital.», 68, 665 (1938).

R = paratolil-, metatolil-, e paraclorofenil-. In tutti casi la reazione si è dimostrata applicabile con ottimi risultati.

Essa rappresenta un nuovo metodo di sintesi di derivati benzimidazolici la cui originalità consiste nell'evitare l'impiego, come materia prima, delle ortodiammine o derivati comune a tutti gli altri metodi finora noti.

La generalizzazione del metodo è allo studio. Possiamo però dire fin d'ora che è prevedibile un considerevole ampliamento del campo di validità nella serie dei benzoimidazoli veri e propri ed in altri tipi di eterocicli similari. L'esecuzione della sintesi:



prevede l'impiego delle anilidossime II e degli osodiazoloni III.

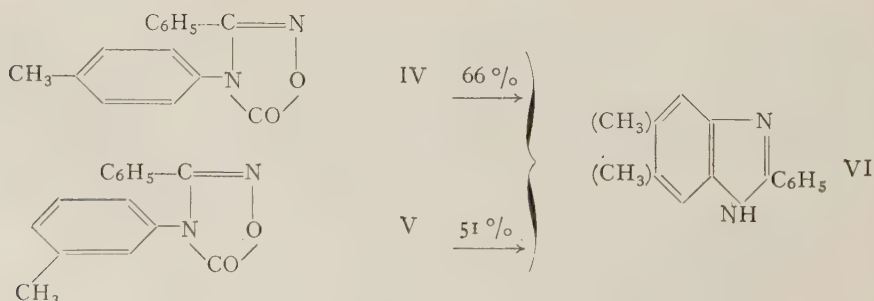
Tra i metodi applicabili alla preparazione delle prime abbiamo sperimentato l'azione dell' $\text{NH}_2\text{OH}$  sulle tioanilidi, quello delle ammine su i cloruri idrosammici ed analogamente la somma delle ammine sul benzonitrilossido.

Il primo è il più noto. Richiede molto tempo sia per la preparazione delle tioanilidi che dell'anilidossima e non sempre fornisce i risultati sperati. Gli altri due sono invece molto rapidi e portano a rendimenti in generale elevati.

Gli 1-2-4-osodiazoloni-5 sono stati preparati fino ad ora per azione del clorocarbonato di etile o del fosgene sulle anilidossime. La reazione si svolge regolarmente e con resa assai elevata costituendo il passaggio più favorevole dell'intera sequenza.

La decarbossilazione degli osodiazoloni avviene tra i 200 e i 240°, temperature alle quali una certa quantità di sostanza tende a carbonizzare. I benzimidazoli da noi preparati, pure essendo solidi relativamente alto fondenti, sono sostanze distillabili senza decomposizione nel vuoto, alcuni addirittura a pressione ambiente.

Tale caratteristica sembra comune a molti termini della serie per cui si prevede che un trattamento così drastico non limiterà eccessivamente l'applicabilità del metodo. Facciamo però notare come il rendimento della decarbossilazione del paratolilderivato IV sia superiore a quello dell'isomero metatolil V.



Poiché danno ambedue origine al medesimo benzimidazolo VI è probabile che tale differenza, che per quanto riguarda l'effetto orientante dei sostituenti avrebbe dovuto essere in favore dell'isomero V, sia dovuta alla minor stabilità al riscaldamento di questo composto.

Lo studio del meccanismo della reazione è in corso.

#### PARTE SPERIMENTALE.

##### *Benzanilidossima* <sup>(2)</sup>.

a) È stata preparata da tiobenzanilide <sup>(3)</sup> e  $\text{NH}_2\text{OH}$  secondo H. Müller con rendimenti molto variabili (50/80 %). La durata dell'operazione si è protratta in genere per più di una giornata (14/16 ore) impiegando una quantità di idrossilammina corrispondente ad 1,5 moli del teorico. P.f. = 136°.

b) Preparata da benzonitrilossido ed anilina secondo G. Speroni e M. Bartoli <sup>(4)</sup> con una resa dell'80 % circa aggiungendo anilina al nitrilossido in soluzione etanolica e filtrando dopo 12 ore.

c) Da 1 mole di clorobenzoidrossamico e 2 moli di anilina in etere mescolate a freddo. Dopo 6 ore si filtra e si cristallizza da etanolo diluito al 50 %. Resa circa 80 % del teorico. Anche questo tipo di preparazione era noto <sup>(5)</sup>.

##### *3-4-difenil-1-2-4-osodiazolone-5* <sup>(6)</sup>.

È stato preparato con un metodo simile a quello adottato da H. Müller <sup>(6)</sup>. 4 g di anilidossima vengono sciolti in  $\text{CHCl}_3$  e posti in un pallone con una certa quantità di  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  come corpo di fondo. Si aggiungono g 2,04 di  $\text{Cl-COOC}_2\text{H}_5$  in  $\text{CHCl}_3$  e si riscalda a ricadere. Man mano che la reazione procede precipita il cloridrato della base fioccoso che reagisce poi col  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  scomparendo. La reazione termina quando rimane soltanto il carbonato in eccesso col cloruro sodico formatosi come corpo di fondo e dura circa 2 ore.

Si filtra, si evapora il solvente ed il residuo si cristallizza da etanolo diluito. Resa g 4 pari all'89 % del teorico. P. f. 166-167°.

##### *2-fenil-benzimidazolo.*

G 2,75 di 3-4-difenil-1-2-4-osodiazolone-5 vengono introdotti in un tubo a tre bolle posto in una stufa che funge da bagno ad aria. Si riscalda fino a 166°, temperatura di fusione, quindi gradualmente fino a 210°. In

(2) H. MÜLLER, « Ber. », 19, 1669 (1886).

(3) E. KLINGSBERG e D. PAPA, « J.A.C.S. », 73, 4989 (1951).

(4) Lavoro in corso di pubblicazione.

(5) H. RHEINOLDT, M. DEWALD, F. JANSEN e O. SCHMITZ-DUMOND, « Ann. », 451, 161 (1927).

(6) H. MÜLLER, « Ber. », 22, 2401 (1889).



questo intervallo il prodotto decarbossila vivacemente. Quando si è notata la diminuzione di peso calcolata (g 0,51) si può cristallizzare direttamente il residuo da nitrobenzolo, ottenendosi una resa di circa il 90 %. P. f. 292° anche in miscela con un campione autentico.

Talvolta può risultare più comodo distillare il residuo della decarbossilazione. In tal caso si effettua l'operazione nello stesso tubo a bolle.

Si raccolgono così 0,265 g di teste costituite essenzialmente da benzonitrile e osodiazolone non decomposto. A 315° e 105 mm oppure 305° e 85 mm distilla il benzoimmidazolo; g 1,725 pari al 77 % del teorico. Residuano g 0,25 di prodotto carbonioso.

*3-fenil-4-(p-tolil)-1-2-4-osodiazolone-5* <sup>(6)</sup>.

È stato ottenuto dalla benzoparatoluidossima (il cui p. f. = 161/162° <sup>(5)</sup> e non 176° <sup>(6)</sup>) secondo le modalità descritte nell'esempio precedente e con una resa dell'86 %, P. f. = 163°.

*2-fenil-5 o 6-metil-benzimmidazolo.*

2,91 g di 3-fenil-4-paratolil-1-2-4-osodiazolone-5 vengono riscaldati tra i 220 e i 230° come detto precedentemente e fino alla perdita in peso calcolata. Distillando quindi a 2 mm passano 0,23 g di liquido di testa ed a 250° g 1,57 di metilfenilbenzimmidazolo con una resa del 66 % circa. P. f. = 240°. Residuano g 0,6 di prodotto carbonioso.

*Benzo metatoluidossima.*

È stata preparata con le solite modalità da benzonitrilossido e metatoluidina. Resa = 65 %. P. f. = 133° da etanolo diluito. All'analisi:

	trov. % : N	= 12,2
per C <sub>14</sub> H <sub>14</sub> N <sub>2</sub> O	calc.	: 12,4

*3-fenil-4-(metatolil)-1-2-4-osodiazolone-5.*

Da g 7,3 di toluidossima, 3,5 di ClCOOC<sub>2</sub>H<sub>5</sub> e 2 di Na<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> vennero ottenuti g 7 con una resa dell'86 %. P.F. 139-140° da etanolo. All'analisi:

	trov. % : N	= 11,05
per C <sub>15</sub> H <sub>12</sub> N <sub>2</sub> O <sub>2</sub>	calc.	: 11,1

*2-fenil-5 o 6 metil-benzimmidazolo.*

Il prodotto è lo stesso che si ottiene dal paratolilosodiazolone come già detto.

In questo caso si sono sottoposti a riscaldamento 2,85 g di 3-fenil-4 (metatolil)-1-2-3-osodiazolone-5 tra i 210° e i 240°.

Distillando poi a 2 mm si sono ottenuti 0,6 di prodotti liquidi di testa tra i quali sono stati riconosciuti il benzonitrile e la metatoluidina in piccola quantità. A 250° ed alla stessa pressione sono stati raccolti g. 1,2 di benzimidazolo che rappresentano una resa del 51 % sul teorico. Il residuo carbonioso pesava g. 0,55.

*3-fenil-4-(paraclorofenil)-1-2-4-osodiazolone-5.*

G 6,32 di benzo-paracloroanilidossima, preparata da paracloroanilina e benzonitrilossido al solito modo e con resa del 65 %, vengono trattati con 2,78 g di  $\text{ClCOOC}_2\text{H}_5$  e g 1,2 di  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  in  $\text{CHCl}_3$ . Dopo riscaldamento a ricadere per 2 ore si filtra, si concentra, e si cristallizza il residuo da etanolo. Ottenuti g 6 con resa dell'85 %. P. f. = 156°. All'analisi:

	trov. % : N = 10,46
per $\text{C}_{14}\text{H}_9\text{ClN}_2\text{O}_2$	calc. % : 10,3

*2-fenil-5 o 6-clorobenzimidazolo* <sup>(7)</sup>.

G. 2,88 di 3-fenil-4 (paraclorofenil)-1-2-4-osodiazolone-5 vengono riscaldati gradualmente fino a 210° e mantenuti a questa temperatura fino a completa decarbossilazione. Si distilla il prodotto a 0,15 mm raccogliendo 0,175 g di prodotti di testa ed a 215° g 1,832 di benzimidazolo con p. f. = 210°. La resa è del 76 %. Il residuo pesa g 0,407.

**Fisiologia vegetale.** — *Interazione tra glutatione e auxina nello stimolo della crescita* <sup>(\*)</sup>. Nota di ERASMO MARRÈ e ORESTE ARRIGONI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio S. TONZIG.

Risultati precedentemente ottenuti portavano alla conclusione che il sistema del glutatione rappresenta un anello di singolare importanza nella catena di reazioni attraverso cui l'auxina esplica i suoi effetti finali sulla crescita e sul metabolismo della cellula vegetale. Si era infatti osservato come il trattamento con auxina induca, parallelamente allo stimolo della crescita, un netto aumento del rapporto glutatione ridotto/glutazione ossidato (GSH/GS-SG) nei tessuti, mentre il blocco della crescita in seguito a carenza auxinica sperimentalmente indotta si accompagna ad una caduta dello stesso rapporto [1, 2]; come trattamenti diversi capaci di influenzare la crescita influiscano pure in modo ben definito sullo stato di ossidoriduzione del si-

(7) O. FISCHER e LINNÉR, « J.prakt. Chem. » (2), 74, 67 (1906).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

stema del glutatione [I]; e come, infine, il trattamento con glutatione ridotto possa stimolare nettamente, in presenza di auxina, la crescita, mentre quello con glutatione ossidato la inibisce [I].

Nella presente ricerca abbiamo studiato i rapporti tra azione del glutatione e azione dell'auxina sulla crescita di parti isolate di piante superiori. I risultati ottenuti dimostrano come il trattamento con glutatione ridotto modifichi profondamente la curva d'azione di concentrazioni crescenti di auxina sulla crescita per distensione: il glutatione, infatti, mentre da un lato appare potenziare in senso assoluto l'intensità degli effetti dell'ormone, dall'altro sposta in misura veramente significativa il momento in cui l'aumento della concentrazione in auxina nel mezzo si traduce, anziché in un ulteriore stimolo della crescita, in una sua progressiva inibizione.

Ne viene che l'effetto massimo dell'auxina viene osservato, in presenza glutatione, per concentrazioni in ormone fino a 100 volte superiori a quelle per cui esso compare in assenza del tripeptide.

È d'altra parte noto come il sistema del glutatione sia costantemente presente in tutti i tessuti ed organismi e come esso sia soggetto a estese variazioni, tanto assolute quanto del suo stato di ossido-riduzione, in dipendenza del variare dei più diversi fattori, fisiologici come strutturali. Il fatto qui rilevato della profonda incidenza, sulla capacità d'azione dell'auxina, di variazioni relativamente modeste, indotte sperimentalmente, del tenore in glutatione (e del rapporto  $GHS/GS \cdot SG$ ) nei tessuti, mentre conferma e accentua le conclusioni precedentemente raggiunte circa l'importanza del glutatione nei fenomeni di crescita in generale, e nel meccanismo d'azione dell'auxina in particolare, viene d'altra parte ad aprire interessanti prospettive anche per quanto riguarda il problema della estrema varietà di sensibilità all'ormone da parte di tessuti od organi di diversa natura, o in diverse condizioni fisiologiche.

#### MATERIALI E METODI.

Il materiale usato è stato fornito, come in esperienze precedenti [I] da segmenti lunghi 1 cm. prelevati dalla parte apicale del terzo internodio di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum* var. Alaska) di età di 7 giorni, coltivate all'oscurità a 25° C., e da segmenti subapicali, ancora lunghi 1 cm., di coleptili di avena (*Avena sativa*, var. Victory) preparati quando i coleptili avevano raggiunto una lunghezza tra 2,5 e 3 cm. I segmenti di fusto di pisello, lavati in acqua distillata per un'ora, venivano disposti in capsule di Petri contenenti acqua distillata, in presenza o meno di auxina (acido indolacetico, IAA) e glutatione (GSH) alle concentrazioni volute, dopo che il pH, in tutte le capsule, era stato portato a un valore di 6 con NaOH o HCl. L'aggiunta di tampone di fosfati 0,02 M, pH 6, praticata in esperienze di controllo, non è apparsa influire sensibilmente sui risultati. Nel caso dei segmenti di coleptili d'avena, il mezzo comunemente usato è invece consistito in una soluzione contenente saccarosio 3%  $MnSO_4$  0,01% e  $KH_2PO_4$  0,02 M [3, 4]. Anche con questo materiale, peraltro, risultati sostanzialmente analoghi, per quanto riguarda l'azione del glutatione in presenza o meno di auxina, si sono ottenuti usando come mezzo « di base » semplice acqua distillata. Tanto nel caso dei segmenti di fusto di pisello quanto in quello dei coleptili d'avena, la quantità del liquido nelle capsule era regolata in modo

che ad ogni segmento corrispondesse 1 cc. di liquido. I seguenti venivano mantenuti, durante il trattamento, a temperatura di 25 C., all'oscurità.

L'attività di crescita nelle diverse condizioni sperimentali è stata determinata misurando la diversa lunghezza dei segmenti all'inizio e alla fine delle esperienze, su lotti di almeno 15 segmenti; ogni esperienza è stata ripetuta almeno 4 volte, con prove in duplicato.

## ESPERIENZE E RISULTATI.

### A) *Azione del glutatione, ridotto e ossidato, in funzione della sua concentrazione e della presenza nel mezzo di auxina.*

Glutatione ridotto e glutatione ossidato, somministrati dall'esterno, in soluzione acquosa, penetrano facilmente nei tessuti e influenzano la crescita positivamente il primo, negativamente il secondo [1]. Le due forme sono agevolmente interconvertibili l'una nell'altra nel tessuto, e tendono a raggiungere un'equilibrio dipendente dalla concentrazione esterna della forma somministrata e dalle condizioni metaboliche dominanti nel tessuto. Il fatto è particolarmente evidente nel caso del GSH che, somministrato ad elevate concentrazioni, determina nel tessuto accumulo, oltre che di GSH, anche di GS·SG a concentrazioni tali da poter inibire la crescita. In base a queste considerazioni, e poiché lo scopo principale di questa ricerca era lo studio di un'eventuale interazione tra GSH e auxina nello stimolo della crescita, ci siamo in primo luogo preoccupati di definire una zona di concentrazioni in GSH tale da fornire il massimo effetto positivo sulla crescita. I risultati delle esperienze condotte a tal fine sono riassunti nel grafico 1, che dimostra come il GSH, pressoché inattivo in assenza di IAA, espliciti invece in presenza dell'auxina un definito effetto di stimolo quando presente a concentrazioni tra  $3 \cdot 10^{-4}$  e  $6 \cdot 10^{-4}$  M, mentre per concentrazioni superiori tale effetto si attenua fino a pratica scomparsa. Il glutatione ossidato, a concentrazioni corrispondenti, appare inattivo in assenza di auxina, mentre in presenza dell'ormone induce, specie alle più alte concentrazioni, un lieve effetto inibente; e ciò in accordo con i risultati delle ricerche precedenti, che rilevavano una netta azione inibente del GS·SG solo per concentrazioni superiori a  $10^{-3}$  M.

### B) *Effetto del glutatione ridotto sulla curva d'azione dell'auxina.*

I risultati delle nostre esperienze a questo riguardo, sui coleptili di avena come sui segmenti di fusto di pisello, sono riassunti nelle figure 2 e 3, scelte come rappresentative di un andamento che è apparso sostanzialmente costante in numerosi altri esperimenti, qui per brevità non riportati. Per entrambi i materiali le curve d'azione dell'auxina da sola, in funzione della sua concentrazione nel mezzo, presentano un massimo di effetto sulla crescita in corrispondenza di una concentrazione relativamente bassa in ormone ( $3 \cdot 10^{-6}$  per l'avena,  $10^{-5}$  per il pisello); l'ulteriore aumento della concentrazione in auxina determinando, anziché uno stimolo, un'inibizione sem-



pre più accentuata della crescita. Tale andamento è in pieno accordo con i dati della letteratura [5, 6], la minore intensità dell'effetto inibente delle concentrazioni superottimali apparendo determinata, nelle nostre esperienze, dalla brevità del periodo di permanenza dei segmenti nelle soluzioni auxiniche.

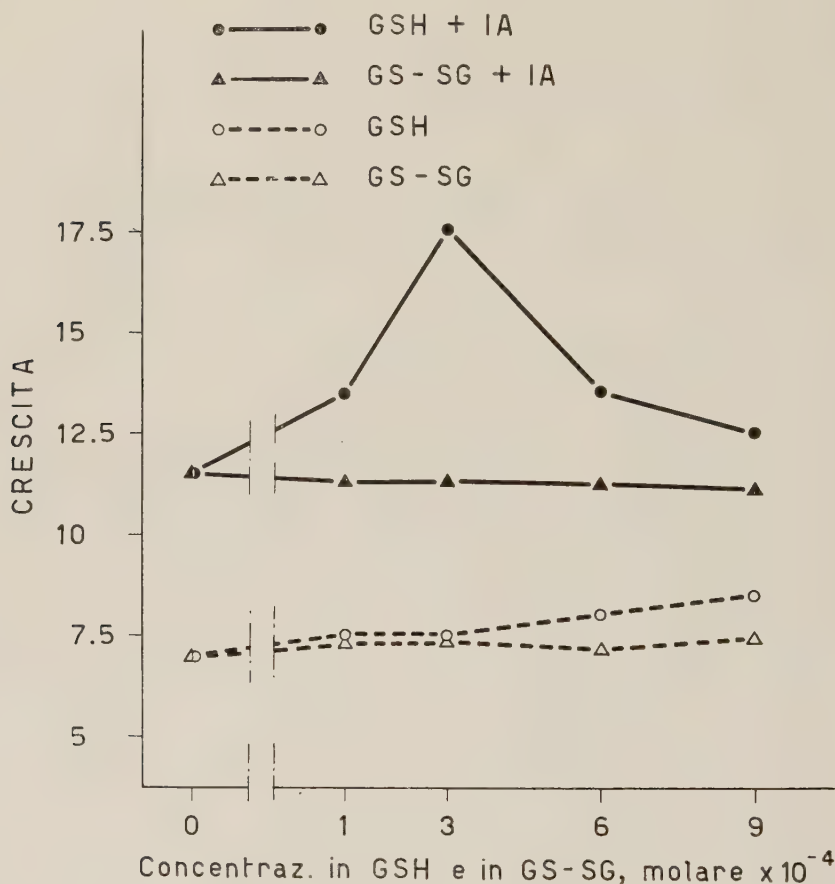


Fig. 1. - Azione del glutatione ridotto GSH) e del glutatione ossidato (GS.SG) in presenza o meno di acido indolacetico (IA)  $3 \times 10^{-5}$  sulla crescita di segmenti di internodio di pisello. In ordinata, crescita come aumento percentuale in lunghezza dall'iniziale. Durata dell'esperienza: 80 min. primi.

Dalle stesse figure 2 e 3 si osserva come la presenza di glutatione ridotto nel mezzo induca, nell'avena come nel pisello, una profonda modificazione della curva d'azione dell'auxina. I valori massimi di crescita raggiunti appaiono notevolmente aumentati: del 25% nel caso dell'avena, di oltre il 45% in quello dei segmenti di pisello. Inoltre, fatto a nostro avviso assai più notevole, concentrazioni in auxina che in assenza di glutatione risultano sopraottimali (per cui cioè già si rivela l'effetto inibente) inducono invece,

in presenza del tripeptide, un ulteriore evidente stimolo della crescita. Lo spostamento, indotto dal GSH, della concentrazione ottimale in auxina verso le contrazioni più alte risulta di circa 200 volte, per i coleottili d'avena, e di circa 100, per i segmenti di fusto di pisello. Per concentrazioni in auxina

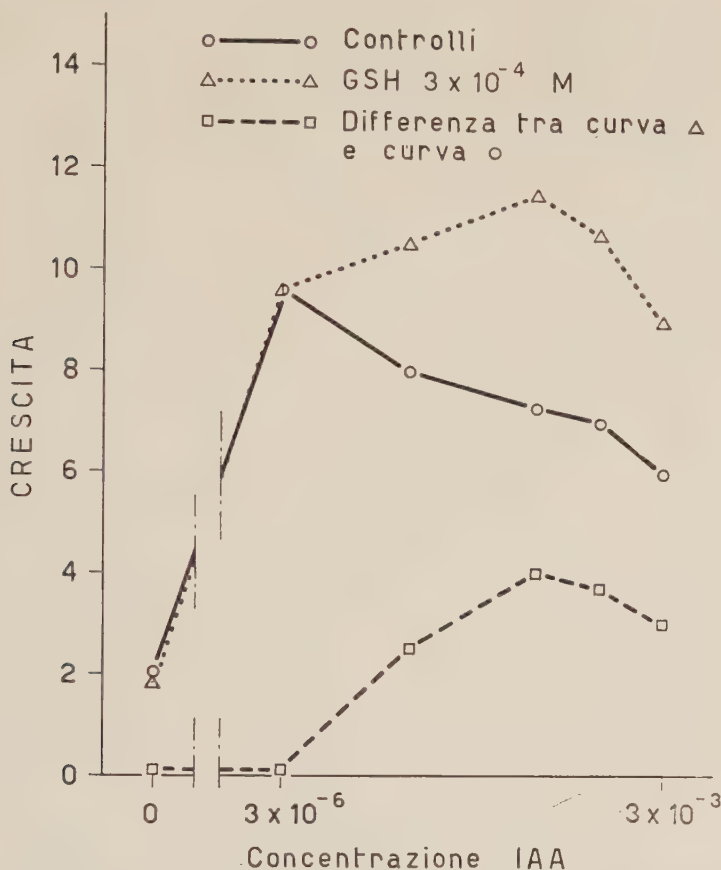


Fig. 2. — Azione del glutatione ridotto,  $4 \cdot 10^{-4}$  M, sulla crescita di segmenti di coleottili decapitati di avena, in funzione della concentrazione dell'auxina (IAA) nel mezzo. La curva tratteggiata in basso esprime la differenza tra crescita di auxina e glutatione e crescita in presenza di sola auxina. In ordinata, crescita come aumento percentuale in lunghezza. Tempo di trattamento: 90 minuti primi.

ancora più elevate la curva di crescita si flette, anche in presenza di glutathione; ma l'effetto «disinibente» del tripeptide permane ancora evidentissimo.

L'importanza della concentrazione esterna del GSH per quanto riguarda il fenomeno in esame risulta ben chiara dalla fig. 3, da cui si nota come il duplice effetto del glutathione ridotto sull'intensità assoluta dello

stimolo della crescita e sullo spostamento della concentrazione ottimale di auxina verso valori più alti sia molto più evidente per la concentrazione  $5 \cdot 10^{-4}$  M che per quella superiore,  $10^{-3}$  M, del GSH: in accordo, del resto, con quanto suggerito dall'esame della fig. 1.

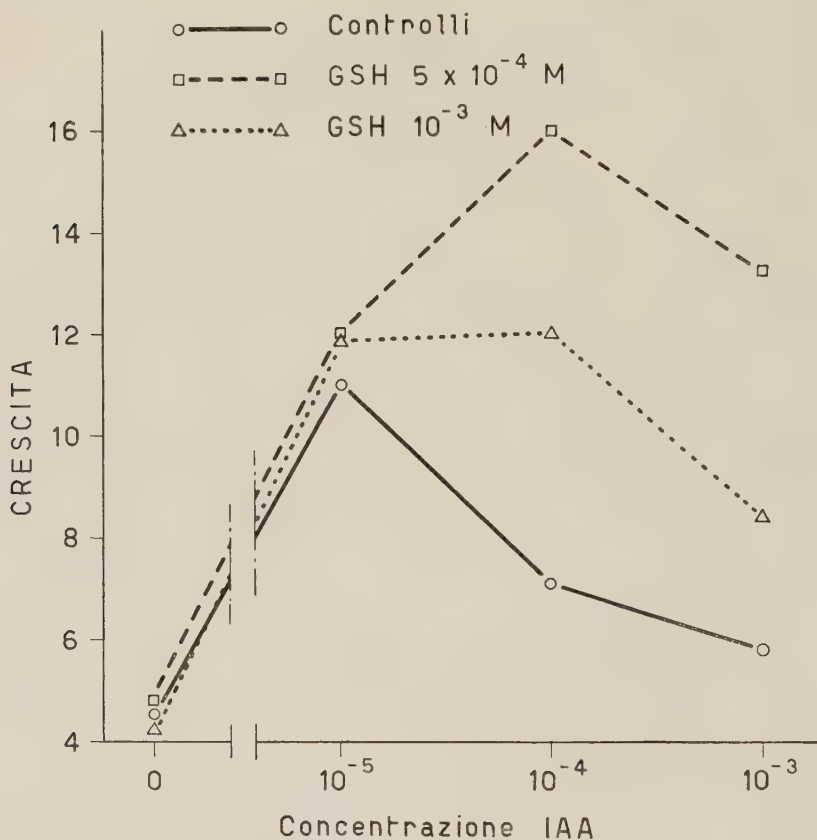


Fig. 3. - Azione del glutatione ridotto,  $5 \cdot 10^{-4}$  M e  $10^{-3}$  M sulla crescita di segmenti di internodi di pisello, in funzione della concentrazione dell'auxina nel mezzo. Tempo di trattamento: 90 minuti primi.

C) *Effetto del pretrattamento con glutatione ridotto sulla risposta dei tessuti all'auxina.*

Le esperienze sopradescritte, pur dimostrando con chiarezza un'interazione tra glutatione e auxina, lasciavano aperte possibilità d'interpretazione molto diverse nei confronti sia del meccanismo del fenomeno, che del suo significato fisiologico. In particolare, il fatto che il glutatione, in queste esperienze, venisse somministrato dall'esterno simultaneamente con l'auxina permetteva l'ipotesi che l'interazione avvenisse fuori della cellula, o in corrispondenza della sua superficie esterna, al limite tra ectoplasma

e parete cellulare. È evidente che una simile interpretazione limiterebbe di molto il valore fisiologico del nostro reperto, in confronto all'altra alternativa quella cioè di un'interazione tra glutazione e auxina *all'interno delle cellule*; ipotesi, quest'ultima, ovviamente implicante la probabilità che il glutazione

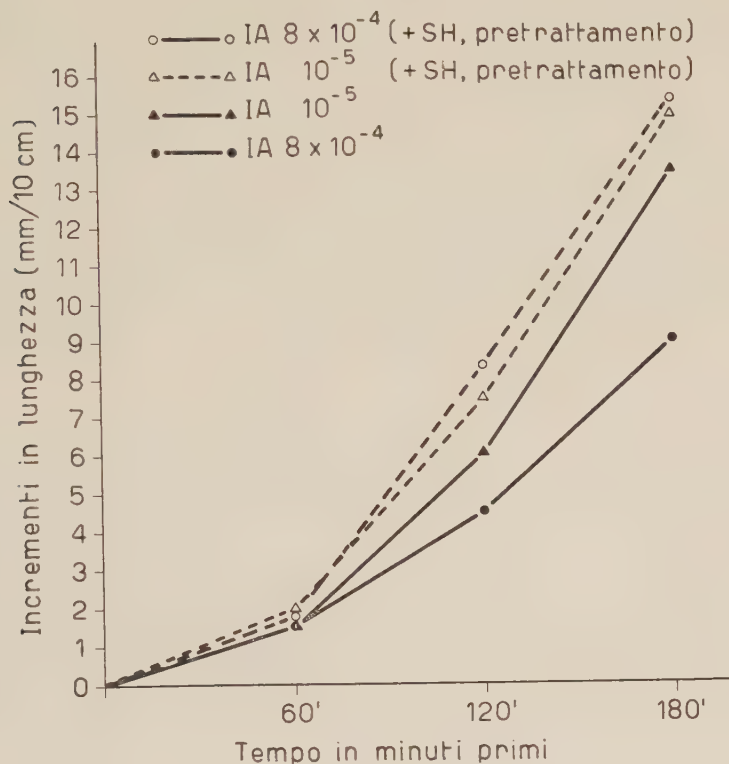


Fig. 4. - Diversa reazione della crescita al trattamento con auxina (acido indolacetico, IA) a concentrazioni ottimale ( $10^{-5}$ ) e superottimale ( $8 \cdot 10^{-4}$ ) in segmenti di internodio di pisello, tenuti prima del trattamento con auxina per un'ora rispettivamente in acqua dist. o in glutazione ridotto  $4 \cdot 10^{-4}M$ , e accuratamente lavati. In ascissa, il tempo di trattamento con IA

somministrato dall'esterno si unisca a quello già originariamente presente nel regolare e condizionare la risposta del tessuto all'auxina.

A risolvere questa alternativa abbiamo ritenuto potessero essere utili esperienze in cui il glutazione venisse somministrato non più simultaneamente, ma precedentemente all'ormone, e il materiale fosse liberato mediante lavaggio, nell'intervallo tra i due trattamenti, dal glutazione rimasto a impregnare le pareti cellulari. In queste condizioni l'effetto del pretrattamento con glutazione sulla successiva reazione dell'auxina alla crescita sembra debba



ritenersi essenzialmente imputabile all'aumentato livello interno del tripeptide, e la possibilità di un'interazione esterna praticamente esclusa.

I risultati di queste esperienze sono riassunti nei grafici della fig. 4, che mostrano come di fatto il pretrattamento con GSH influenzi la reazione dei tessuti all'auxina in modo sostanzialmente analogo a quanto sopra rilevato nel caso della simultanea presenza del glutatione e dell'auxina nel mezzo. Si osserva infatti come i segmenti pretrattati con glutatione reagiscano alle due concentrazioni in auxina, e cioè sia a quella ottimale ( $10^{-5}$ ) che a quella sopraottimale ( $8 \cdot 10^{-4}$ ), con un aumento della crescita nettamente superiore a quello dei segmenti non pretrattati; inoltre, come la concentrazione superiore d'auxina (inibente, in confronto a quella inferiore, in assenza di pretrattamento con glutatione) acquisti, nel tessuto arricchito di GSH, la capacità di fornire il valore massimo assoluto dello stimolo sulla crescita.

I grafici della fig. 4 rivelano un altro aspetto degno di interesse, in quanto permettono l'esame di come il fenomeno si sviluppi nel tempo. Gli effetti del pre-arricchimento con GSH si rivelano con una certa lentezza e, potremmo dire, solo dopo un periodo di induzione che si estende fin quasi al termine della prima ora del trattamento con auxina. La spiegazione di questo comportamento sembra potersi individuare nel fatto, già rilevato [1], che in assenza di auxina (periodo di pretrattamento) il glutatione che penetra dall'esterno nel tessuto si distribuisce nelle cellule secondo un rapporto GSH/GS·SG relativamente basso; rapporto che verrà però successivamente spostato a netto favore della forma ridotta proprio come conseguenza caratteristica del trattamento con auxina. L'effetto massimo di potenziamento della crescita da parte del glutatione penetrato nel tessuto deve quindi logicamente raggiungersi solo allorché l'auxina abbia determinato la condizione di massima riduzione del sistema GSH-GS·SG: va infatti ricordato quanto già abbiamo detto, che cioè solo il GSH stimola la crescita, mentre il GS·SG tende a inibirla.

#### CONCLUSIONI.

Riassumendo, i risultati di questa ricerca dimostrano come variazioni sperimentalmente indotte del tenore endocellulare in glutatione influenzino profondamente la risposta dei tessuti all'auxina. Tale effetto del glutatione si presenta con due aspetti distinti: in primo luogo, come un'esaltazione notevole del valore assoluto dell'azione dell'auxina sulla crescita, esaltazione tanto più evidente quanto più alta è la concentrazione dell'ormone nel mezzo; in secondo luogo come la soppressione o, quanto meno, come una forte riduzione dell'effetto inibente indotto dalle concentrazioni sopraottimali d'auxina. In altri termini, delle due azioni antitetiche dell'auxina (una stimolante, l'altra inibente), il glutatione sembra esaltare la prima, ed attenuare la seconda.

Una tale apparente duplicità d'azione del glutatione è evidente legata, nel suo meccanismo, alla duplicità di effetti indotti dall'auxina sulla cellula: un effetto stimolante, alle concentrazioni più basse, mascherato e infine soppresso da un secondo effetto inibente che si manifesta per le concentrazioni

più elevate, sopraottimali. Il glutatione ridotto risulta capace di spostare l'equilibrio a favore dell'effetto positivo, sia che questo avvenga per un'attivazione della componente auxinica stimolante, per una depressione di quella inibente o, infine, per una simultanea sua azione, in senso opposto, sulle due diverse componenti.

Una discussione circa l'ordine di probabilità delle diverse interpretazioni relative al meccanismo di questa interazione tra glutatione e auxina appare, al momento attuale, prematura ed esula dagli scopi del presente lavoro. I risultati precedentemente ottenuti suggeriscono che, ancora una volta, il sistema dell'acido ascorbico intervenga, anche in questo caso, con una parte di primaria importanza; ciò che può facilmente desumersi in base a quanto già noto circa gli stretti rapporti di correlazione tra il sistema dell'ascorbico e quello del glutatione, da un lato, e tra metabolismo dell'ascorbico e azione dell'auxina, dall'altro. Argomento su cui ci riserviamo di ritornare in una prossima pubblicazione, collegando i risultati qui esposti ad altri più di recente acquisiti.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ and O. ARRIGONI, « *Physiologia Plant.* », 10 (1957).
- [2] E. MARRÈ e G. LAUDI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », 20, 638 (1956).
- [3] C. L. SCHNEIDER, « *Am. J. Bot.* », 25 258 (1938).
- [4] J. BONNER, « *Am. J. Bot.* », 36, 323 (1949).
- [5] R. C. FRENCH and H. BEEVERS, « *Am. J. Bot.* », 40, 660 (1953).
- [6] R. J. FOSTER, D. H. MCRAE and J. BONNER, « *Proc. Nat. Acad. Sc.* », 38, 1012 (1952).

**Fisiologia.** — *Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di impulsi tattili e propriocettivi ovvero di variazioni del livello pressorio* (\*). Nota di PAOLO CREPAX, ALDO NIGRO e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata (\*\*) dal Socio G. C. PUPILLI.

In una Nota precedente [Crepax, Nigro e Parmeggiani <sup>(1)</sup>] abbiamo riferito intorno alla morfologia delle oscillazioni elettriche rapide [*spikes* secondo la terminologia di Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(2)</sup>] derivabili dalla corteccia cerebellare mediante elettrodi di piccole dimensioni approfondati nello strato dei corpi delle cellule di Purkinje ovvero in quello dei granuli.

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.

(1) P. CREPAX, A. NIGRO e P. L. PARMEGGIANI, « *Rend. Acc. Naz. Lincei* », Cl. Sc. fis., mat. nat., Ser. 8<sup>a</sup>, questo volume.

(2) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI e R. S. SNIDER, « *J. Neurophysiol.* », XIII, 465 (1950); XIV, 181 (1951).

Un aspetto singolare dell'attività unitaria corticocerebellare è rappresentato dal ritmo pulsatorio irregolare, discontinuo e spesso assai elevato (oltre 150 al sec), che caratterizza una notevole percentuale dei focolai esplorati<sup>(1)</sup>. Tale fatto è già stato rilevato da altri ricercatori<sup>(2)</sup>, i quali non ne hanno tuttavia chiarito in modo definitivo le cause.

Con le ricerche di cui riferiamo nella presente Nota ci siamo proposti d'indagare quali effetti esercitino sull'attività unitaria corticocerebellare le stimolazioni estero- e propriocettive e le variazioni del livello della pressione arteriosa generale.

Le nostre ricerche sono state eseguite in Gatti decerebrati a livello intercollicolare o retrocollicolare.

L'attività unitaria corticocerebellare è stata derivata con la tecnica descritta nella Nota già citata<sup>(1)</sup>: negli esperimenti eseguiti per indagare gli effetti delle stimolazioni tattili e propriocettive, l'esplorazione microelettroica della corteccia del *lobus anterior* è stata fatta nelle aree di proiezione corrispondenti all'arto stimolato, secondo lo schema riprodotto da Snider<sup>(3)</sup>; negli altri casi le derivazioni erano fatte dalla corteccia del lobulo V [Larsell<sup>(4)</sup>]. Per effettuare le stimolazioni periferiche il procedimento impiegato da Brookhart, Moruzzi e Snider<sup>(2)</sup>, consistente nell'esercitare una certa pressione sulla superficie plantare delle dita ovvero nell'imprimere movimenti passivi agli arti toracici o pelvici, è risultato assai più conveniente che non la stimolazione elettrica di nervi cutanei o muscolari; e di tale procedimento ci siamo serviti.

La pressione arteriosa, registrata mediante un manometro a mercurio collegato col capo centrale dell'A. femorale, veniva fatta variare mediante salasso ovvero iniezione intravenosa di isopropiladrenalina (10-20  $\mu$ g/kg).

Facciamo presente come nelle condizioni di derivazione da noi adottate la componente di gran lunga più significativa dell'attività unitaria corticocerebellare, registrata dopo il periodo irritativo iniziale (ossia almeno 5 min dopo che la punta dell'elettrodo ha raggiunto il focolaio esplorato) sia costituita da *spikes* monofasici negativi<sup>(1)</sup>: a tali oscillazioni, e più particolarmente a variazioni della loro frequenza, si riferiscono principalmente le nostre osservazioni. A fine d'indagare le modificazioni dell'attività unitaria corticocerebellare provocate da variazioni del livello della pressione arteriosa, abbiamo naturalmente preso in esame focolai caratterizzati da un'attività funzionale uniforme.

L'attività elettrica unitaria della corteccia cerebellare può farsi più frequente per effetto di stimolazioni tattili e propriocettive (fig. 1). Col procedimento di stimolazione da noi adottato una distinzione tra gli effetti degli impulsi estero- e propriocettivi non è possibile. Si tenga tuttavia presente che l'intensificazione di attività che può osservarsi quando si afferra l'arto dell'animale è generalmente assai fugace (1 sec circa), mentre per ef-

(3) R. S. SNIDER, « Res. Publ. Ass. nerv. ment. Dis. », XXX, 267 (1952).

(4) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953).

fetto dei movimenti passivi successivamente impressi all'arto stesso si osservano modificazioni più durature.

Gli effetti delle stimolazioni tattili e propriocettive si manifestano in modo assai netto e sono più volte riproducibili in alcuni focolai, mentre in altri il ritmo degli *spikes* non si modifica in alcun modo per stimolazioni ef-

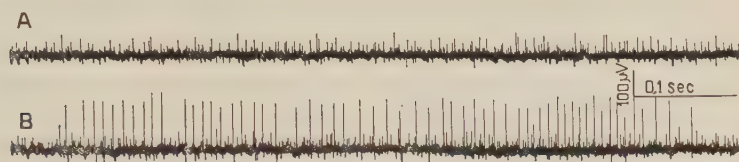


Fig. 1. — Attività unitaria derivata dalla corteccia cerebellare (parte emisferica destra della seconda lamella del *culmen* posta al davanti della *fissura prima*) nel Gatto decerebrato immediatamente avanti (A) e durante la stimolazione (B), che consisteva nell'esercitare una lieve pressione sui polpastrelli delle dita dell'arto toracico di destra.

fettuate nell'arto, la cui area di proiezione corrisponde alla zona di corteccia esplorata. D'altra parte, nell'atonia curarica, ossia in condizioni tali da abolire gl'impulsi propriocettivi che mantengono lo stato di ipertono dell'animale decerebrato, gli *spikes* derivabili dalla corteccia cerebellare presentano nell'insieme caratteri del tutto simili a quelli dell'attività unitaria derivabile dal cervelletto nell'animale decerebrato, per quanto concerne sia i diversi ritmi pulsatori sia i valori di frequenza (massimi, medi e minimi) rilevabili nell'attività di diversi *pools*.

Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(2)</sup> hanno indagato l'attività unitaria della corteccia cerebellare separata chirurgicamente dai nuclei cerebellari ovvero dopo sezione completa e bilaterale dei peduncoli; e hanno rilevato che l'attività medesima, in tali condizioni, non presenta caratteri che la distinguano da quella derivabile dal cervelletto integro. Gli AA. considerano tali risultati una prova della natura intrinseca dei fattori che intrattengono l'attività pulsatoria dei neuroni cerebellari; e rilevano che se pure nelle condizioni sperimentali anzidette l'isolamento della corteccia cerebellare non può ritenersi completo, il grado di isolamento raggiunto è quello massimo compatibile con la conservazione di una buona irrorazione sanguigna dei neuroni corticali, giacché « it is impossible to isolate the cerebellar cortex completely without impairing its blood supply ».

Il preparato di lembo isolato di corteccia cerebellare descritto da Crepax e Infantellina <sup>(5)</sup> ci è sembrato offrire le condizioni più opportune per chiarire ulteriormente la questione prospettata. Le registrazioni microelettrodeiche da noi eseguite in lembi isolati di corteccia cerebellare, ci hanno mostrato come i caratteri dell'attività elettrica unitaria derivata da diversi punti del lembo

(5) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8<sup>a</sup>, XX, 625 (1956).



non risultino sotto nessun aspetto modificati per effetto della recisione delle connessioni tra le lamelle esplorate e le restanti parti del cervelletto, sia per ciò che concerne i valori di frequenza (massimi, medi e minimi), sia rispetto al tipo dei ritmi pulsatori rilevabili nei diversi *pools* neuronici (fig. 2).

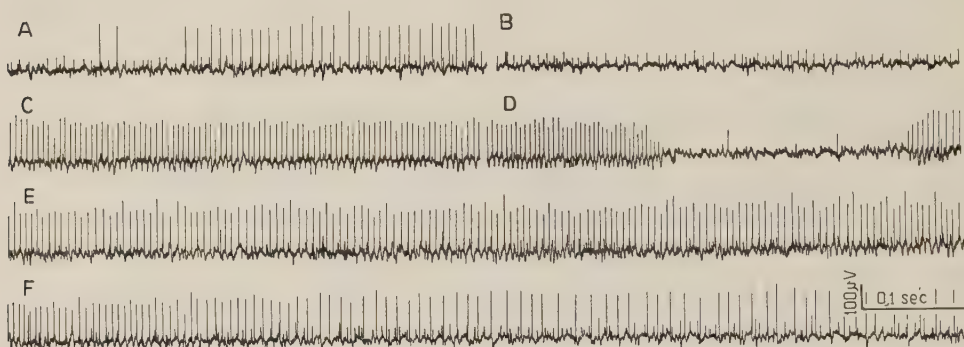


Fig. 2. — Attività unitaria derivata nel Gatto decerebrato da un lembo di corteccia cerebellare, le cui connessioni nervose estrinseche sono state recise: focolaio attivo caratterizzato da un ritmo di scarica durevolmente irregolare e discontinuo.

A: 10 min dopo approfondamento dell'elettrodo. B: 1 sec dopo A. C: 7 sec dopo B. D: 1 sec dopo C. E: 2 sec dopo D. F: 3 sec dopo E.

La registrazione della pressione arteriosa, effettuata contemporaneamente a quella dell'attività elettrica unitaria della corteccia cerebellare, permette innanzi tutto di assodare come le variazioni spontanee della frequenza degli *spikes*, che caratterizzano alcuni focolai attivi, siano manifeste anche quando la pressione del sangue nelle grandi arterie si mantiene costante.

Le modificazioni dell'attività elettrica cerebellare che possono osservarsi per effetto di un abbassamento del livello pressorio (fig. 3), non dipendono dal procedimento impiegato per provocare l'ipotensione (salasso ovvero introduzione intravenosa di isopropiladrenalina), ma soltanto dalla importanza e dalla rapidità dell'abbassamento e dal valore minimo di pressione raggiunto. La discesa della curva pressoria deve essere maggiore di 34-40 mm di Hg e piuttosto rapida (20-25 sec): per altro, una variazione che risponda a tali caratteristiche non comporta modificazioni significative della frequenza degli *spikes* derivabili dalla corteccia cerebellare, quando il livello pressorio minimo raggiunto risulti superiore a 150 mm di Hg. Solo quando l'abbassamento della pressione sia del valore indicato e la pressione sia scesa a un livello inferiore a quello anzidetto, compaiono modificazioni caratteristiche e costanti della frequenza di scarica dei *pools* neuronici esplorati; e ciò avviene in modo tanto più evidente quanto più intensa è l'ipotensione provocata.

Le variazioni di frequenza degli *spikes* consistono dapprima in un aumento transitorio, che si manifesta 20-40 sec dopo che la pressione ha raggiunto il valore minimo, e immediatamente dopo in una diminuzione rapidamente progressiva: i valori più bassi di frequenza sono generalmente riscontrabili 2-3 min dopo l'abbassamento del livello pressorio. In un tempo al-

trettanto breve, dopo che la pressione è risalita al livello di partenza, la frequenza degli *spikes* torna ad essere quella iniziale; ma se i valori della pressione arteriosa sono scesi fino a 70-80 mm di Hg, il ristabilirsi della frequenza originaria tarda maggiormente (10 min circa).

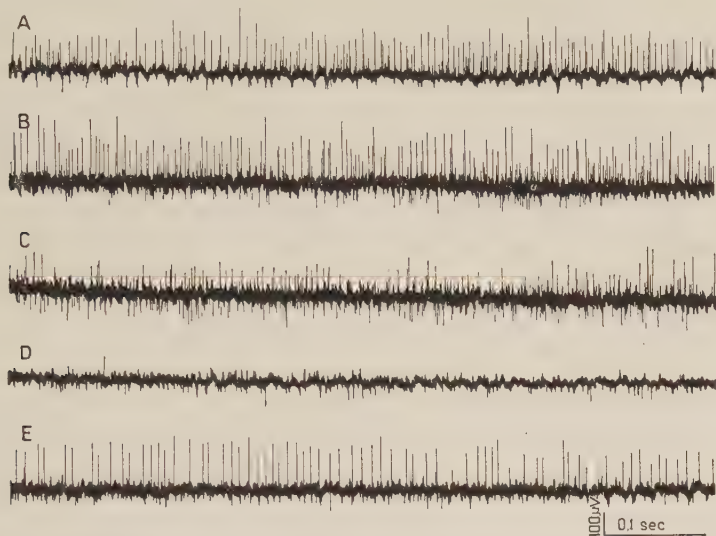


Fig. 3. — Effetti di un abbassamento della pressione arteriosa generale sull'attività unitaria derivata dalla corteccia cerebellare nel Gatto decerebrato.

Tra A e B, nella V. safena destra è stata effettuata l'iniezione di isopropiladrenalina (10  $\mu\text{g/kg}$ ). A: attività elettrica del focolaio registrata 7 min dopo approfondimento dell'elettrodo e 1 min e 30 sec avanti B; l'attività registrata in tale momento perdura con caratteri immutati da oltre 4 min; la pressione nell'A. femorale è di 165 mm di Hg. B: 30 sec dopo l'iniezione di isopropiladrenalina, quando la pressione è di 110 mm di Hg. C: 20 sec dopo B; la pressione è di 110 mm di Hg. D: 2 min e 10 sec dopo C; la pressione è di 125 mm di Hg. E: 3 min dopo D; la pressione è di 160 mm di Hg.

Le osservazioni da noi fatte nel loro complesso portano a ritenere che il ritmo pulsatorio delle unità corticocerebellari sia determinato essenzialmente da fattori intrinseci, il che è conforme alle conclusioni di Brookhart, Moruzzi e Snider<sup>(2)</sup>. Ciò vale per i ritmi pulsatori di bassa e media frequenza (da 20 a 50 al sec).

L'attività di frequenza assai elevata (fino a 150 al sec) che caratterizza alcuni *pools* neuronici va però considerata a parte: ci si deve chiedere infatti se tali ritmi pulsatori assai frequenti costituiscano un aspetto normale dell'attività del *pool* esplorato oppure siano la conseguenza di una lesione provocata dal microelettrodo. Invero, i valori di frequenza riscontrati sono troppo alti per poter essere considerati come propri di un ritmo pulsatorio basale: secondo Brookhart, Moruzzi e Snider<sup>(2)</sup>, l'elevata frequenza pulsatoria delle unità corticocerebellari osservabile nel Gatto decerebrato potrebbe dipendere dall'ipertono estensorio manifesto nell'animale così operato e avrebbe un significato essenzialmente fisiologico. Il fatto che un'attività avente i caratteri descritti possa derivarsi dal cervelletto di animali decerebrati e curarizzati esclude tuttavia che l'ipertono estensorio possa essere l'unica causa

dell'andamento a scariche discontinue e di elevata frequenza che presentano le oscillazioni derivabili dal cervelletto di Gatto decerebrato. Il che del resto è ancor più esplicitamente provato dalle osservazioni eseguite su un lembo di corteccia cerebellare, le cui connessioni con le restanti parti dell'organo siano state recise. Tali osservazioni mostrano come un'elevata frequenza di scarica e un andamento discontinuo e accessuale, possano contraddistinguere i potenziali derivati da singole unità anche in mancanza di un apporto di impulsi afferenti. L'altra ipotesi considerata da Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(2)</sup>, che l'attività di alta frequenza delle unità corticocerebellari sia di natura irritativa, potrà apparire più o meno convincente; ma è giusto quanto gli AA. citati affermano e cioè che « a crucial argument against this difficulty (ossia escludere la possibile genesi irritativa dell'attività a frequenza elevata) can hardly be expected ».

**Fisiologia.** — *Effetti della streptomycin e della diidrostreptomycin sul consumo di O<sub>2</sub> da parte di omogenati di cervello di ratto* <sup>(\*)</sup>. Nota di PIETRO D'ARCANGELO, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. AMANTEA.

L'azione della streptomycin e quella della diidrostreptomycin sui processi metabolici cellulari sono state studiate principalmente in riferimento alla cellula batterica, quale substrato che presumibilmente avrebbe potuto fornire in maniera più diretta indicazioni utili a chiarire il meccanismo della attività antibiotica delle due sostanze. Gli effetti di queste sul metabolismo delle cellule dei tessuti animali sono stati solo raramente oggetto di indagine. Le osservazioni più notevoli al riguardo appaiono quelle di W. Umbreit e Coll. <sup>(1)</sup>. Questi Autori, muovendo dai risultati di loro precedenti ricerche <sup>(2)</sup> condotte su ceppi sensibili di *E. coli*, in base ai quali avevano concluso che la streptomycin ostacola i processi ossidativi della cellula batterica inibendo probabilmente una reazione di condensazione tra piruvato e ossalacetato, estesero le loro indagini a tessuti di ratto per verificare se l'antibiotico esercitasse la sua azione inibente anche sui processi ossidativi delle cellule animali. Ebbero, così, modo di osservare che la streptomycin spesso non aveva alcun effetto su fettine o su omogenati di fegato e di rene preparati in mezzo isotonic, anche quando la sua concentrazione nel mezzo ambiente raggiungeva valori abbastanza elevati (200-300 µg/ml). Una netta azione inibente sull'ossidazione di miscele di piruvato + ossalacetato e di piruvato + fumarato si rese evidente, invece, anche per concentrazioni di streptomycin sensibilmente più basse, quando questa era stata in precedenza lasciata a contatto con gli omogenati (fegato, rene, cervello) per un tempo piuttosto lungo, o

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) W. W. UMBREIT e N. E. TONHAZY, « Jour. Bact. », 58, 769 (1949).

(2) E. L. OGINSKY, P. H. SMITH e W. W. UMBREIT, « Jour. Bact. », 58, 747 (1949).



quando veniva fatta agire su omogenati preparati in mezzo fortemente ipotonico (acqua distillata). Queste condizioni, secondo gli AA., avrebbero permesso che la streptomicina, per la quale si ammette che la cellula animale sia poco permeabile, penetrasse più facilmente all'interno delle strutture cellulari. Con l'impiego della diidrostreptomicina essi osservarono in condizioni simili un minor grado di inibizione, forse dovuto, a loro avviso, ad una minor capacità di penetrazione di questa sostanza all'interno della cellula. Essi giunsero alla conclusione che la streptomicina e la diidrostreptomicina inibiscono una reazione tra ossalacetato e piruvato nella cellula animale allo stesso modo che in quella batterica, solo che all'antibiotico si permetta di penetrare in quantità sufficiente nell'intimo della struttura cellulare e più precisamente nei mitocondri, dove si troverebbe l'enzima attivante la suddetta reazione.

Non ci risulta che queste ricerche abbiano avuto un ulteriore sviluppo. A nostro parere lo studio degli effetti della streptomicina e della diidrostreptomicina sui processi metabolici delle cellule animali merita di essere esteso ed approfondito non solo per l'interesse che esso può rivestire in campo di biochimica generale, ma anche perché potrebbe fornire dati di grande interesse per chiarire sia il meccanismo dell'azione antibiotica delle due sostanze sia alcune delle loro proprietà farmacologiche. Queste considerazioni ci hanno indotto ad intraprendere lo studio dell'azione di queste due sostanze su alcuni processi fondamentali del metabolismo delle cellule di diversi organi e tessuti animali.

Riferiamo qui i risultati di una prima serie di esperienze da noi condotte per studiare gli effetti della streptomicina e della diidrostreptomicina sul consumo di  $O_2$  da parte di tessuto cerebrale di ratto.

Abbiamo impiegato 8 ratti albini adulti (7 ♀ e 1 ♂), di peso corporeo variabile (da 130 a 229 g.). Gli animali vennero uccisi per decapitazione. L'intero cervello, asportato immediatamente dopo la morte, veniva rapidamente pesato e quindi omogeneizzato in circa 15 ml di soluzione di Krebs-Ringer, glicosata e tamponata con fosfati a pH 7,4<sup>(3)</sup>, mediante omogeneizzatore a lame, alla velocità di circa 20.000 giri al min per la durata di 3 min. L'omogenato veniva poi diluito con la stessa soluzione fino a raggiungere una concentrazione di 100 mg di organo fresco in 2,5 ml. La misurazione del consumo di  $O_2$  da parte dell'omogenato è stata eseguita con metodo manometrico, mediante l'apparecchio di Warburg, alla temperatura di 37° C e in ambiente di aria. Nelle vaschette manometriche (di forma conica e munite di pozzetto centrale) venivano immessi 0,2 ml di una soluzione di KOH al 15 %, nel pozzetto centrale, e 2,5 ml di omogenato nella cavità principale. Nelle prove di controllo venivano aggiunti all'omogenato in ciascuna vaschetta 0,5 ml del liquido di Krebs-Ringer glicosato e tamponato; nelle altre prove, 0,5 ml di una soluzione di streptomicina o di diidrostreptomicina disciolte nello stesso

(3) La soluzione veniva preparata aggiungendo glicoso alla concentrazione dello 0,1 % al liquido di Krebs-Ringer con tampone fosfato (ottenuto aggiungendo a 100 ml di una soluzione di NaCl 0,9 %: 4 ml KCl 1,15 %, 3 ml  $CaCl_2$  1,22 %, 1 ml  $KH_2PO_4$  2,11 %, 1 ml  $MgSO_4$  7  $H_2O$  3,82 % e 12 ml di tampone fosfato 0,1 M pH 7,4).



liquido di Krebs-Ringer. Abbiamo impiegato streptomycin e diidrostreptomycin in forma di solfato (Squibb).

Abbiamo esaminato gli effetti di concentrazioni di streptomycin e di diidrostreptomycin comprese tra 100 e 10.000  $\mu\text{g}$  di sostanza base per ml di omogenato. Sia nelle prove di controllo sia in quelle con streptomycin o diidrostreptomycin la determinazione del consumo di  $\text{O}_2$  da parte dell'omogenato è stata eseguita su campioni in doppio. Le letture manometriche sono state effettuate ogni 30 min, per la durata di 2 h. Riportiamo in tabella solo i risultati delle prove eseguite con concentrazioni di antibiotico di 100, 200, 300, 400, 1.000, 5.000 e 10.000  $\mu\text{g}/\text{ml}$ , omettendo per brevità quelli di altre prove con concentrazioni intermedie. I dati ricavati dalle letture manometriche sono stati espressi in  $\mu\text{l O}_2/\text{g}$  di tessuto fresco.

TABELLA <sup>(1)</sup>*Esperienza I*

(Concentrazione di streptomycin e di diidrostreptomycin: 100 e 200  $\mu\text{g}/\text{ml}$ ).

Tempo in min dal- l'inizio della prova	$\mu\text{l O}_2/\text{g}$ di tessuto fresco									
	Controlli		Streptomycin				Diidrostreptomycin			
			100 $\mu\text{g}/\text{ml}$		200 $\mu\text{g}/\text{ml}$		100 $\mu\text{g}/\text{ml}$		200 $\mu\text{g}/\text{ml}$	
0- 30	276,5		295,5		264,5		283,5		273,0	
30- 60	318,0	594,5	295,5	591,0	305,0	569,5	296,0	579,5	285,5	558,5
60- 90	264,0	858,5	263,0	854,0	253,0	822,5	264,5	844,0	253,0	811,5
90-120	306,0	1164,5	290,5	1144,5	287,5	1110,0	296,0	1140,0	306,0	1117,5

*Esperienza 2*

(Concentrazione di streptomycin e di diidrostreptomycin: 300 e 400  $\mu\text{g}/\text{ml}$ ).

Tempo in min dal- l'inizio della prova	$\mu\text{l O}_2/\text{g}$ di tessuto fresco									
	Controlli		Streptomycin				Diidrostreptomycin			
			300 $\mu\text{g}/\text{ml}$		400 $\mu\text{g}/\text{ml}$		300 $\mu\text{g}/\text{ml}$		400 $\mu\text{g}/\text{ml}$	
0- 30	339,0		301,0		281,5		308,5		259,5	
30- 60	316,0	655,0	306,5	607,5	281,5	563,0	295,5	604,0	279,0	539,0
60- 90	305,0	960,0	285,0	892,5	282,0	845,0	277,5	881,5	279,0	818,0
90-120	293,0	1253,0	279,0	1171,5	263,5	1108,5	277,0	1158,5	279,5	1097,5

(1) Per ciascuna prova i valori nella colonna di sinistra esprimono il consumo di  $\text{O}_2$  durante il corrispondente intervallo di tempo di 30 min, quelli nella colonna di destra il consumo complessivo di  $\text{O}_2$  dall'inizio della prova. Ognuno dei valori rappresenta la media di due determinazioni.

Segue: TABELLA.

*Esperienza 4*(Concentrazione di streptomicina e di diidrostreptomicina: 1000  $\mu\text{g/ml}$ ).

Tempo in min dal- l'inizio della prova	$\mu\text{l O}_2/\text{g}$ di tessuto fresco					
	Controlli		Streptomicina		Diidrostreptomicina	
			1000 $\mu\text{g/ml}$		1000 $\mu\text{g/ml}$	
0- 30	283,5		214,5		219,2	
30- 60	295,3	578,8	244,5	459,0	226,3	445,5
60-100	283,5	862,3	245,0	704,0	232,1	677,6
100-120	257,1	1119,4	219,9	923,9	214,0	891,6

*Esperienza 8*(Concentrazione di streptomicina e di diidrostreptomicina: 5000 e 10.000  $\mu\text{g/ml}$ ).

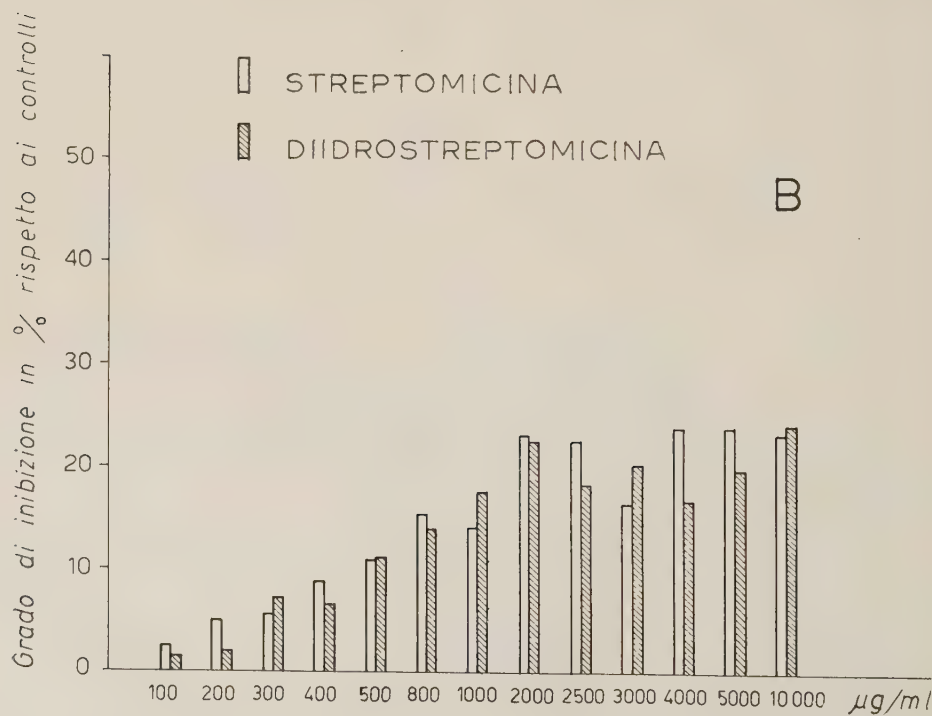
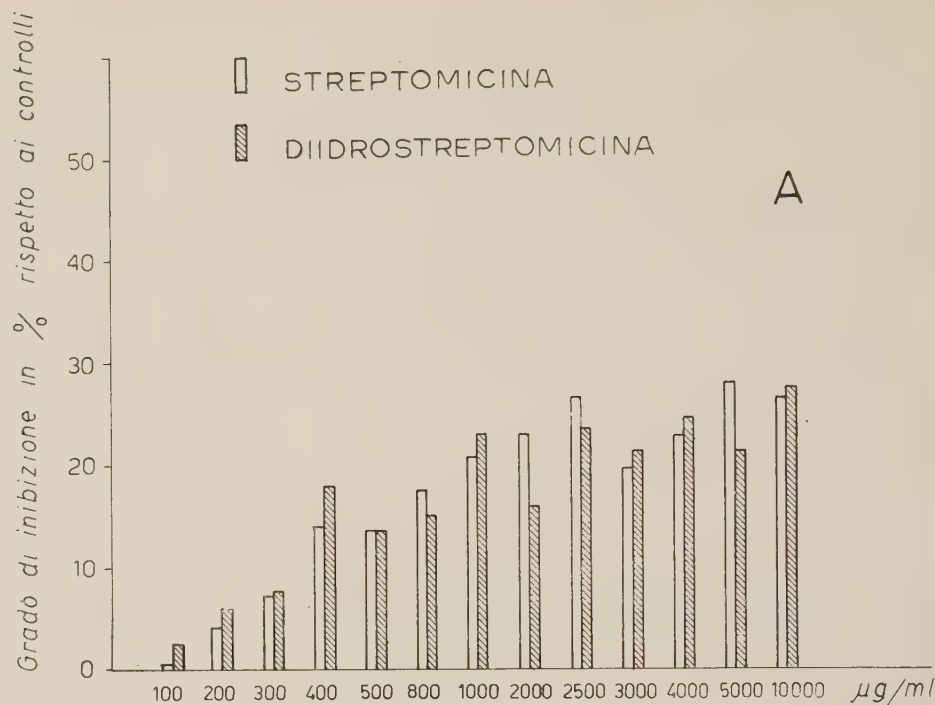
Tempo in min dal- l'inizio della prova	μl O <sub>2</sub> /g di tessuto fresco									
	Controlli		Streptomicina				Diidrostreptomicina			
			5000 μg/ml		10000 μg/ml		5000 μg/ml		10000 μg/ml	
0- 30	281,6		194,6		208,5		227,6		210,5	
30- 60	258,8	540,4	194,6	389,2	189,3	397,8	197,3	424,9	181,3	391,8
60- 90	259,2	799,6	188,2	577,4	189,1	586,9	199,9	624,8	193,0	584,8
90-120	235,6	1035,2	188,2	765,5	189,1	776,0	196,4	821,2	181,3	766,1

I principali fatti da noi osservati possono così riassumersi (vedi grafico):

a) In omogenati di cervello di ratto, preparati secondo la tecnica esposta, l'aggiunta di streptomicina o di diidrostreptomicina a concentrazioni comprese tra 400-500  $\mu\text{g/ml}$  e 10.000  $\mu\text{g/ml}$  ha provocato una netta diminuzione del consumo di  $\text{O}_2$ .

b) Concentrazioni di antibiotico inferiori a 400  $\mu\text{g/ml}$  non hanno esercitato un sicuro effetto inibente sul consumo di  $\text{O}_2$  da parte degli omogenati.

c) Per concentrazioni di streptomicina o di diidrostreptomicina inferiori a 1.000  $\mu\text{g/ml}$  il grado di inibizione del consumo di  $\text{O}_2$  degli omogenati è andato di regola crescendo con l'aumentare della concentrazione dell'antibiotico. Per concentrazioni superiori a 1.000  $\mu\text{g/ml}$  il grado di inibizione si è, invece, generalmente mantenuto sempre su valori di uno stesso ordine di grandezza.



Grado di inibizione esercitato da varie concentrazioni di streptomina e di diidrostreptomina sul consumo di  $O_2$  dell'omogenato di cervello di ratto:

A) durante la prima ora; B) durante la seconda ora di esperimento.

d) L'effetto inibente delle varie concentrazioni di streptomicina e di diidrostreptomicina sul consumo di  $O_2$  da parte degli omogenati è risultato evidente per tutta la durata di ciascun esperimento (2 h), con una lieve tendenza ad attenuarsi durante la seconda ora.

e) Nelle condizioni sperimentali adottate non sono apparse differenze significative tra il comportamento della streptomicina e quello della diidrostreptomicina.

Riteniamo opportuno aggiungere che accurate determinazioni potenziometriche del pH degli omogenati dopo aggiunta di streptomicina o diidrostreptomicina a concentrazioni variabili tra 100 e 10.000  $\mu\text{g/ml}$  ci hanno permesso di escludere che l'aggiunta dell'antibiotico, alle concentrazioni suddette, producesse negli omogenati variazioni della concentrazione idrogenionica di grado tale da giustificare di per sè le variazioni del consumo di  $O_2$  osservate nei substrati esaminati.

**Patologia.** — *Su la polmonite da « Pneumocystis carinii »* (\*).  
Nota di AMICO BIGNAMI e di CARMELA JOPPOLO, presentata (\*\*)  
dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Roessle e Loeschke (1928) furono i primi a segnalare casi di polmonite interstiziale plasmacellulare in lattanti non luetici. Nel 1952 Vanek e Jirovec, ed inoltre Giese indipendentemente dai primi autori, identificarono in questi casi un microorganismo che ritennero fosse da considerarsi l'agente patogeno della malattia. Secondo Giese si tratterebbe di un fungo del gruppo dei blastomiceti; secondo Vanek e Jirovec si tratterebbe invece di un protozoo parassita di numerosi animali domestici e di laboratorio, e che ha una distribuzione mondiale, lo *Pneumocystis carinii*. Tale discordanza perdura tuttora ed è dovuta al fatto che il parassita in questione è stato osservato in strisci, impronte e preparati istologici, ma nessuno fino ad ora è riuscito a riprodurre la malattia negli animali da laboratorio, né a coltivare l'agente eziologico (1).

Benché non sia, quindi, stabilito con certezza se lo *Pneumocystis carinii* sia o no l'agente eziologico della *polmonite interstiziale plasmacellulare del lattante*, riteniamo che la denominazione di « polmonite da *Pneumocystis* » impiegata da molti autori (Bird e Thompson, Le Tan Vinh, Dauzier e coll.), abbia il vantaggio di indicare una caratteristica molto importante della malattia, qual'è la presenza costante, di un microorganismo peculiare nel lume degli alveoli.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) Solamente Weller sarebbe riuscito a provocare il quadro della polmonite interstiziale, ivi compreso il reperto dei parassiti endoalveolari, in topi lattanti infettati con poltiglia di polmone prelevato da bambini deceduti di questa malattia.



La polmonite interstiziale plasmacellulare si osserva, per lo più, nei lattanti distrofici, oppure nei nati prematuri, della età di 2-5 mesi. La malattia è relativamente frequente in Svizzera, in Cecoslovacchia, in Germania ed in Finlandia, dove si sono avute anche delle piccole epidemie, specialmente nei brefotrofi e negli ospedali. La malattia sembra invece essere poco frequente nei paesi anglosassoni, dove, solo in questi ultimi anni, sono state pubblicate osservazioni di casi sporadici. In Italia sono stati segnalati casi a Trieste, a Milano, a Genova, a Torino ed a Catania. (Per la bibliografia vedi Reitano). A Roma, nella sala incisoria del Policlinico Umberto I, abbiamo osservato i primi casi di questa malattia in numero di quattro nel corso di pochi mesi.

Riferiamo le osservazioni da noi fatte, che s'inquadrano con quelle già note dei casi illustrati nella letteratura. Per tale corrispondenza, il nostro contributo di osservazione originale vale a confermare la individualità clinica e, più ancora, anatomica di questa malattia.

Clinicamente la malattia ha per lo più inizio subdolo, con dispnea e cianosi che vanno gradualmente aumentando. Vi è, in genere, poca febbre e l'esame obiettivo del torace può essere affatto negativo. In contrasto con la scarsità dei reperti obiettivi i reperti radiologici sono spesso imponenti e consistono nella presenza di opacità a margini sfumati in entrambe i campi polmonari. La durata della malattia va da uno a sei mesi, la mortalità varia molto nelle differenti casistiche (dal 15 al 100 %), probabilmente per la difficoltà di fare la diagnosi *in vivo*.

All'autopsia le alterazioni sono limitate al polmone e sono abbastanza caratteristiche per fare la diagnosi al tavolo anatomico. I polmoni sono notevolmente aumentati di peso ed hanno un rivestimento pleurico sottile e lucente. L'aspetto del polmone sulla superficie di taglio è stato paragonato a quello del pancreas (Bird e Thompson); il parenchima polmonare, infatti, è addensato ed ha colorito grigio, mentre i setti interlobulari, che sono, già normalmente, più evidenti nel bambino che nell'adulto, risultano ispessiti per una condizione di edema.

Il *quadro istologico* del polmone è caratterizzato da un notevole ispessimento dei setti alveolari, dalla proliferazione e dalla desquamazione delle cosiddette cellule di rivestimento della parete alveolare ed infine dalla presenza di un peculiare materiale schiumoso nel lume degli alveoli.

L'ispessimento dei setti è dovuto ad una infiltrazione cellulare costituita nella maggior parte dei casi da plasmacellule e da cellule di tipo linfomonocitario. L'infiltrazione plasmacellulare può essere così marcata che il Feyrter è stato indotto a parlare di *plasmocitoma del polmone*. In altri casi, invece, l'infiltrazione è costituita da cellule mononucleate, che comprendono poche plasmacellule.

La presenza di un peculiare *essudato schiumoso, microvacuolare, nel lume degli alveoli*, costituisce l'alterazione più caratteristica della polmonite da *Pneumocystis carinii*, e permette di differenziarla da polmoniti interstiziali di altra natura. La *identificazione dei parassiti* riesce facilmente negli

strisci, mediante la colorazione col Giemsa, mentre è più difficile nei preparati istologici. A noi è riuscito di mettere in evidenza « parassiti » anche nelle sezioni istologiche, adottando il metodo di impregnazione al carbonato di argento, secondo Del Rio Hortega, come è consigliato da Le Tan Vinh. Con questo metodo è possibile dimostrare la presenza di formazioni ovoidi o semi-lunari, la cui parete si colora più o meno intensamente in bruno a seconda della intensità della impregnazione, e che contengono fino ad otto granuli neri, nel loro interno.

Per concludere possiamo affermare che la *polmonite interstiziale plasmacellulare del lattante costituisce una malattia bene definita clinicamente, ma soprattutto anatomicamente. In questa malattia è costante il reperto di un peculiare microorganismo* nel lume degli alveoli. La natura di questo microorganismo, e quindi la eziologia della malattia stessa, sono tuttora oscure.

#### BIBLIOGRAFIA.

- BIRD T., e THOMSON J., «The Lancet», 277, 59 (1957).  
DAUZIER G., WILLIS D., BARNETT R. N., «Amer. J. clin. path.», 26, 787 (1956).  
FEYRTER, F., citato da Giese.  
GIESE W., «Verh. deutsch. path. Ges.», 36, 284 (1952).  
HAMPERL H., «Am. J. Path.», 32, 1, (1956).  
LE TAN VINH, «Arch. franç. Paediat.», II, 1035 (1954).  
LOESCHKE H., «Verh. deutsch. path. Ges.», 23, 291 (1928).  
REITANO R., *Relazione sulle Polmoniti interstiziali*. «Atti del II Congresso di Anatomia Patologica», Roma, marzo 1957.  
ROESSLE R., «Verh. deutsch. path. Ges.», 23, 289 (1928).  
TORRICELLI C., «Min. Ped.», 8, 356 (1956).  
VANEK J., JIROVEC O., «Zbl. Bakt.», 158, 120 (1952).  
WELLER R.; citato da TORRICELLI C.

**Patologia.** — *Dimostrazione di sinapsi in un ganglioneuroma periferico* (\*). Nota di AMICO BIGNAMI e di PIERLORENZO MARCHIAFAVA, presentata (\*\*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Abbiamo studiato mediante una modificazione del metodo di Bielschowsky-Gros (recentemente introdotta da Iabonero per lo studio delle terminazioni nervose) un ganglioneuroma, della grandezza di una arancia, che istologicamente risultava costituito da fibre e da cellule nervose mature, e che era stato asportato chirurgicamente dal mediastino posteriore di un soggetto adulto.

Cappell in un caso da lui pubblicato di ganglioneuroma retroperitoneale, aveva osservato alcune strutture che potevano interpretarsi come terminazioni attorno a cellule gangliari; tali reperti erano però, a detta dello stesso autore, assai rari e non del tutto sicuri. Nel nostro caso invece, abbiamo potuto dimostrare *numerosi e vari modi con i quali le sottili fibre nervose delle*

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

cellule del tumore entravano in rapporto con altre cellule gangliari del tumore stesso, o con i loro prolungamenti, in prossimità della loro origine, realizzando, in sede neoplastica, le fisiologiche apparecchiature delle sinapsi.

Tra i diversi tipi di sinapsi, che abbiamo potuto rilevare in questo nostro studio, il tipo più comune è rappresentato dalla *terminazione diretta delle fibre sul corpo cellulare, oppure sulla capsula*; le esili fibre formano come una sottile

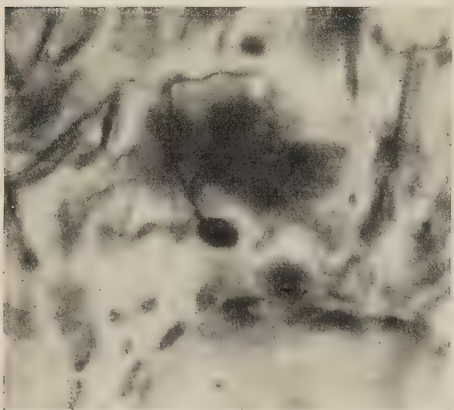


Fig. 1. - Terminazione pericapsulare con estremità a palla. Bielschowsky-carbonato d'argento.

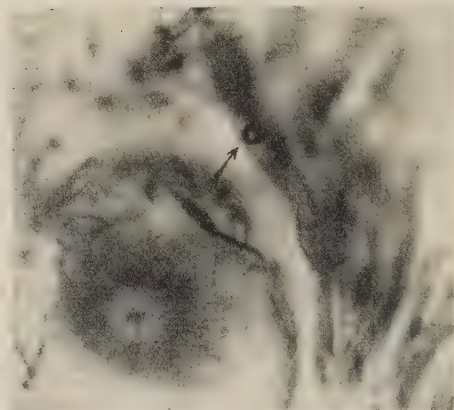


Fig. 2. - Terminazione ad anellino sopra un prolungamento cellulare. Bielschowsky-carbonato d'argento.

*rete*, attorno alla cellula gangliare: tale modalità ricorda quella degli apparati pericellulari, studiati da Hillarp (nel 1946).

Un'altra specie di sinapsi corrisponde a quella di fibre che terminano con *formazioni* di figura svariata (allungate, a mo' di *clava*, oppure rotonde) che raramente raggiungono il corpo della cellula gangliare, e che invece, quasi sempre, si arrestano nell'ambito della capsula pericellulare. In questo tipo di terminazione abbiamo osservato le modificazioni patologiche più pronunciate, per cui quelle terminazioni assumono, talvolta, proporzioni assai notevoli e configurazioni diverse.

In un terzo tipo, le fibre terminano a guisa di *anellini* adagiati sul corpo cellulare, oppure sui prolungamenti, in prossimità della loro origine. Il loro spessore non è costante, anche se di poco variabile. Gli anellini costituiscono, non di rado, l'estremità di una fibrilla; altre volte, risultano completamente isolati. Il reperto può agevolmente interpretarsi, in accordo con la teoria che li considera come apparati terminali non stabili, ma in continua degenerazione e rigenerazione. L'anellino infatti, attaccato alla fibra a mo' di peduncolo, si distaccerebbe assieme alla porzione terminale di questa dalle connessioni centrali, perdendo, quindi, ogni funzione sinaptica (Weber).

Infine abbiamo messo in evidenza un tipo di sinapsi di cui abbiamo osservato un solo esempio nel nostro caso: *tra due cellule situate a breve distanza* l'una dall'altra, si trova interposto un *ponte di esilissime fibrille* (al limite della



visibilità) le quali si intrecciano fra di loro e sono in contatto, alle due estremità, con i corpi cellulari.

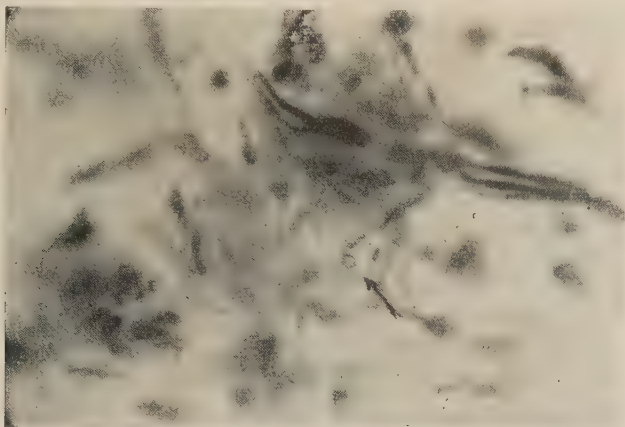


Fig. 3 - Terminazione ad anellino nello spazio capsulare. Visibili i nuclei e le fibre costituenti la capsula pericellulare. Bielschowsky-carbonato d'argento.

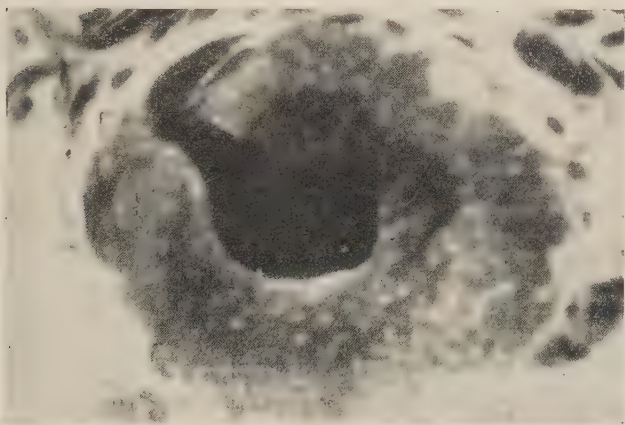


Fig. 4. - Terminazione ipertrofica ad ampolla adagiata sul corpo cellulare. Bielschowsky-Gros.

Per concludere possiamo affermare che le cellule nervose del tumore posseggono, per quel che è dato di giudicare dalla ricerca istologica, un completo substrato anatomico per esplicare l'attività propria della cellula nervosa, compresa quella della trasmissione dell'impulso nervoso.

#### BIBLIOGRAFIA.

- CAPPELL D. F., « J. Path. Bact. », 32, 43 (1929).  
HILLARP N. H., citato da Iabonero.  
IABONERO V., « Archivo Español de Morfología », X, 109 (1953).  
WEBER A., « Acta Neuroveget. », 7, 33 (1953).



**Biochimica.** — *Osservazioni sulla composizione proteica delle miofibrille cardiache* (\*). Nota di ANDREA CORSI e VINCENZO GALLUCCI, presentata (\*\*) dal Corrisp. M. ALOISI.

PREMESSA. — Un metodo per l'isolamento delle fibrille del muscolo scheletrico, fondato su omogenizzazioni ripetute e su centrifugazioni differenziali, è stato per la prima volta elaborato da Perry<sup>(1,2)</sup>. Tale metodo, fornendo materiale privo di nuclei e di sarcoplasma, rimuove alcune difacoltà inerenti ai metodi abituali per la preparazione delle proteine miofibrillari dal muscolo *in toto* e ha già permesso di fare osservazioni che integrano o correggono le nozioni precedentemente acquisite.

E stato tra l'altro osservato (Perry<sup>(3)</sup>; Perry e Corsi<sup>(4)</sup>) che il trattamento delle fibrille dei muscoli scheletrici con tamponi a bassissima forza ionica e a pH 7,1-8,3 estrae il 25-36 % delle proteine e che l'estratto è costituito principalmente da tropomiosina e da una forma inattiva di actina: il dosaggio della tropomiosina estratta ha dimostrato che questa si trova nel muscolo in quantità molto maggiore che generalmente non si ritenesse, perché rappresenta almeno il 10-12 % del contenuto proteico miofibrillare.

La presente Nota è dedicata ai primi risultati ottenuti estendendo lo studio alle miofibrille cardiache, in particolare all'estrazione con tamponi alcalini a bassa forza ionica.

#### MATERIALE E TECNICA.

Sono stati studiati cuori di vitello, di coniglio e di ratto. Il metodo per la preparazione delle miofibrille è fondamentalmente quello stesso usato in precedenti ricerche (Perry e Corsi loc. cit.) Tuttavia il mezzo di sospensione contenente cloruro di potassio 0,1 M ed etilendiaminotetracetato di sodio (EDTA) 0,005 M usato per il muscolo scheletrico, non è adatto al miocardio, perché non impedisce la rapida alterazione dei sarcosomi che si rigonfiano e aderiscono in gran numero alle miofibrille e non possono essere separati in alcun modo. Migliori risultati (fig. 1) ha dato una soluzione di saccarosio 0,4 M e cloruro di potassio 0,05 M con aggiunta di EDTA 0,01 M. Dopo le omogenizzazioni le miofibrille venivano risospese in cloruro di potassio 0,05 M + borato di sodio 0,039 M e infine in cloruro di potassio 0,1 M + borato di sodio 0,039 M.

(\*) Lavoro eseguito nel Centro per lo Studio della Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia generale dell'Università di Modena, con un contributo della «Muscular Dystrophy Associations of America, Inc.».

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) S. V. PERRY, «Bioch. J.», 51, 495 (1952).

(2) S. V. PERRY e T. C. GREY, «Bioch. J.», 64, 184 (1956).

(3) S. V. PERRY, «Bioch. J.», 55, 114 (1953).

(4) S. V. PERRY, e A. CORSI, «Bioch. J.», in corso di stampa.

Per l'estrazione, la preparazione di miofibrille era diluita con 2 o 3 volumi di tampone di TRIS (triossimetilaminometano) 0,005 M, dializzata contro 80-100 volumi dello stesso tampone per 2 giorni e poi trasferita in recipienti ben chiusi, con una traccia di toluolo nel tappo per limitare lo sviluppo dei microrganismi: dopo 3 o 4 giorni l'estratto era separato mediante centrifugazione a 20.000 g per 50 min a 0°.

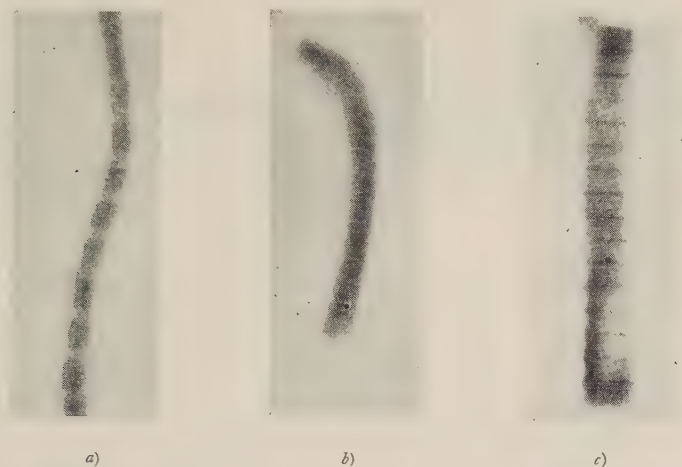


Fig. 1.

a) Miofibrilla cardiaca di ratto, presumibilmente non contratta. b) e c) Miofibrille cardiache di vitello, contratte in misura diversa.

Per l'indagine elettroforetica è stato usato l'apparecchio Perkin Elmer, Mod. 38 A. L'estratto veniva concentrato a circa un terzo, sospendendolo in un tubo da dialisi di fronte a un ventilatore a 0°.

Per il dosaggio della tropomiosina è stato usato il metodo di Perry<sup>(3)</sup> che riferisce la caduta di viscosità della soluzione in esame dopo aggiunta di cloruro di potassio in condizioni standard a una curva ottenuta da un campione di tropomiosina pura esaminata nelle stesse condizioni a diverse concentrazioni. In questo caso la curva di riferimento è stata ottenuta con un campione di tropomiosina preparata dal cuore di vitello secondo il metodo di Bailey<sup>(5,6)</sup>; la purezza è stata controllata con l'elettroforesi (cuspidine unica e simmetrica dopo 8 ore a pH 6,9).

#### RISULTATI.

I risultati dal punto di vista quantitativo sono stati assai simili a quelli ottenuti con le fibrille del muscolo scheletrico, e non si sono osservate differenze apprezzabili delle specie animali studiate. Infatti la quantità di proteine estratta è stata pari al 28-30 %. L'indagine elettroforetica ha dimostrato

(5) K. BAILEY, « Bioch. J. », 43, 271 (1948).

(6) K. BAILEY, « Bioch. J. », 49, 23 (1951).

la presenza di due componenti; uno più veloce, che ha la stessa mobilità della tropomiosina, e l'altro, più lento, che a volte è asimmetrico e dopo elettroforesi prolungata tende a scindersi in due, come l'actina inattiva identificata negli estratti delle fibrille del muscolo scheletrico (fig. 2 e 3). Anche negli

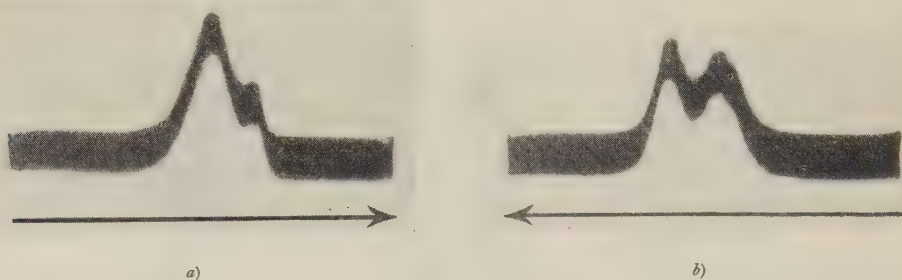


Fig. 2.

Immagine elettroforetica di un estratto in TRIS di miofibrille cardiache di vitello. 480 min di elettroforesi. a) fronte ascendente. b) fronte discendente.

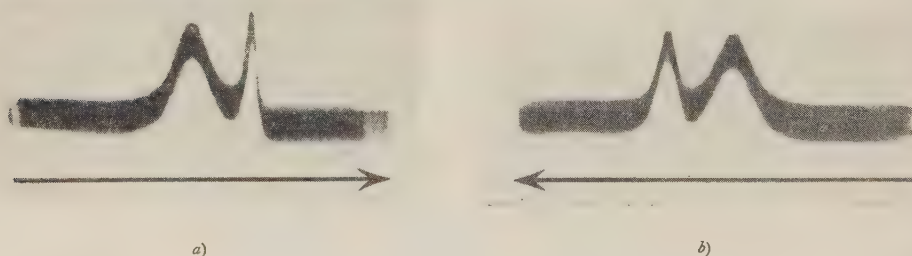


Fig. 3.

Immagine elettroforetica di un estratto in TRIS di miofibrille cardiache di coniglio. 450 min di elettroforesi. a) fronte ascendente b) fronte discendente.

estratti delle miofibrille cardiache il rapporto fra i due componenti è circa  $1 : 1,5-1 : 2$  e la tropomiosina corrisponde circa al 12% del contenuto proteico totale.

È però da notare che la tropomiosina cardiaca sembra qualitativamente diversa da quella del muscolo scheletrico, cioè considerevolmente meno sensibile, nel cambiamento di viscosità, all'aggiunta del cloruro di potassio. Su questo punto lo studio è ancora in corso.

**Biochimica.** — *Contenuto di flavine e sensibilità al cianuro e all'ossido di carbonio dei tessuti di «Octopus vulgaris» (Lam.)* <sup>(\*)</sup>.  
Nota di ANNA GHIRETTI-MAGALDI, A. GIUDITTA e F. GHIRETTI,  
presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. MONTALENTI.

Warburg <sup>(1)</sup>, in base all'analogia chimica dimostrata fra emocianine e fenolasi, avanzò l'ipotesi che in quegli organismi in cui la funzione di trasporto dell'ossigeno dall'ambiente esterno ai tessuti è svolta da pigmenti a rame, anche la respirazione terminale potesse essere svolta in tutto o in parte da enzimi respiratori a rame.

Per provare la validità di tale ipotesi egli suggeriva anche il metodo da seguire: studiare la respirazione cellulare in presenza di ossido di carbonio al buio e alla luce. L'irreversibilità alla luce della inibizione prodotta da ossido di carbonio indicherebbe la partecipazione di ossidasi a rame nella respirazione terminale dei tessuti.

I nostri esperimenti sono stati condotti su alcuni organi e tessuti di *Octopus vulgaris*. Fra tutti gli Invertebrati marini ad emocianina i Cefalopodi sono i più attivi ed i più altamente organizzati; la funzione respiratoria dell'emocianina è stata in essi dimostrata da numerosi Autori <sup>(2)</sup> e il loro fabbisogno di ossigeno è di gran lunga superiore a quello di tutti gli altri Invertebrati con e senza emocianina <sup>(3)</sup>.

Su questo materiale è stato studiato sia l'effetto dell'ossido di carbonio al buio e alla luce, che indica il grado di partecipazione alla respirazione delle ossidasi ad eme o a rame, sia l'azione del cianuro. L'insensibilità anche parziale della respirazione al cianuro indica infatti la presenza di una respirazione « residua » alla quale non partecipano né gli enzimi ferro-porfirici né quelli a rame, ma che avviene mediante sistemi flavinici autosidabili <sup>(4)</sup>.

Questi esperimenti sulla respirazione sono stati preceduti da determinazioni del contenuto in ferro, rame e flavine di diversi organi dell'animale considerato.

(\*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG-4845) del National Institutes of Health, United States Public Health Service.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) O. WARBURG, *Schwermetalle als Wirkungsgruppen von Fermenten*, Berlin (1946).

(2) H. P. WOLVEKAMP, « Z. Vergl. Physiol. », 25, p. 541 (1937-38); M. HENZE, « Z. Physiol. Chem. », 33, p. 370 (1901); Ibid., 43, p. 290 (1904); A. C. REDFIELD, « Biol. Rev. », 9, p. 175 (1934).

(3) H. WINTERSTEIN, « Z. für Vergl. Physiol. », 2, p. 315 (1925); E. H. HAZELHOFF, « Z. für Vergl. Physiol. », 26, p. 306 (1939).

(4) B. COMMONER, « Biol. Rev. », 15, p. 168 (1940).



## ESPERIENZE E RISULTATI.

*Contenuto in ferro e rame degli organi.* — Per evitare che l'emocianina circolante interferisse nelle determinazioni del contenuto in rame degli organi, l'animale veniva salassato e perfuso a lungo con acqua di mare filtrata fino a quando il liquido effluente non conteneva più tracce del pigmento respiratorio. In alcuni casi (rene, branchia) gli organi erano isolati ed ulteriormente perfusi. Il rame e il ferro erano determinati colorimetricamente col dietilditiocarbammato <sup>(5)</sup> e con l'acido solfosalicilico <sup>(6)</sup> rispettivamente. I risultati sono riportati nella Tabella I ed ognuno di essi è la media di 3-4 determinazioni. L'organo più ricco di ferro è l'epatopancreas; l'emolinfa ne è del tutto priva. Fra gli altri organi, il maggior contenuto in ferro è stato trovato nei cuori branchiali. Questi organi contrattili aventi probabilmente una funzione secretoria <sup>(7)</sup> sono intensamente colorati in rosso-viola per la presenza di un pigmento che contiene legato quasi tutto il ferro dell'organo <sup>(8)</sup>.

TABELLA I.

*Contenuto in Ferro e Rame degli organi di « Octopus vulgaris ». (γ/gr di peso secco).*

Organi	Fe	Cu
Epatopancreas . . . . .	1920	2550
Cuore branchiale . . . . .	399	93
Branchia . . . . .	188	111
Ventricolo med. . . . .	160	43
Rene . . . . .	112	48
Muscolo . . . . .	47	28
Emolinfa . . . . .	0	2450

I reni dei molluschi cefalopodi sono costantemente parassitati da un grandissimo numero di microrganismi pluricellulari appartenenti al gruppo dei Mesozoi : i Diciemidi <sup>(9)</sup>. Tutti i tentativi fatti per allontanare questi

(5) A. EDEN e H. H. GREEN, « Biochem. J. », 34, p. 1202 (1940).

(6) L. LORBER, « Biochem. Z. », 181, p. 391 (1927).

(7) L. CUENOT, BRUNTZ e MERCIER, « C. R. Soc. Biol. », 74, p. 1126 (1913); L. CUENOT, GONET e BRUNTZ, « Arch. Zool. exper. gén. », 9, p. 49 (1908); M. MITOLO, « Pubblic. Staz. Zool. Nap. », 17, p. 34 (1939-38).

(8) A. GHIRETTI-MAGALDI, (esperimenti in corso).

(9) H. NOUVEL, « Bull. Inst. Océan. Monaco », 599, (1932); « Arch. Biol. », 58, p. 59 (1947); « Arch. Biol. », 59, p. 146 (1948).

parassiti dall'organo (perfusioni, lavaggi, centrifugazioni) sono stati infruttuosi. Pertanto i risultati ottenuti col rene devono essere considerati con riserva. Secondo Emanuel e Martin <sup>(10)</sup> i Diciemidi conterrebbero rame, ma non ferro.

L'organo più ricco in rame è ancora l'epatopancreas, con un contenuto pari a quello dell'emolinfa. Molte sono le proteine dell'epatopancreas legate a rame <sup>(11)</sup>; esse appaiono sprovviste di attività fenolasica e sono probabilmente in rapporto con il metabolismo dell'emocianina. Il rame dell'emolinfa è tutto legato all'emocianina.

*Contenuto in flavine degli organi.* — La determinazione delle flavine è stata fatta fluorometricamente sugli omogenati totali prima e dopo idrolisi acida a 37° C secondo il metodo descritto da Bessey et al. <sup>(12)</sup> per gli organi dei Mammiferi. I valori ottenuti sono riportati nella Tabella II. Ognuno di essi è la media di almeno 4 determinazioni.

TABELLA II.

*Contenuto in flavine degli organi di «Octopus vulgaris».*

Organi	g/gr tessuto fresco			g/gr tessuto secco			FAD % del totale
	Riboflavina totale	FMN flavina libera	Ribo-	Riboflavina totale	FMN flavina libera	FAD	
Rene . . . . .	23,7	12,1		134,1	68,7	65,4	48
Epatopancreas . . . .	23,9	13,9		76,7	48,4	28,3	37
Ventricolo mediano . .	5,6	1,7		32,7	11,3	21,4	65
Branchia . . . . .	4,0	1,7		21,8	10,1	11,7	53
Cuore branchiale . . .	3,7	1,8		17,9	8,6	9,3	52
Ghiandola salivare . .	4,5	1,8		15,8	6,7	9,1	58
Ganglio ottico . . . .	2,7	0,9		14,7	5,1	9,6	65
Cervello . . . . .	2,6	0,9		14,6	5,0	9,6	66
Muscolo del mantello .	1,3	0,5		6,7	2,5	4,2	62

In *Octopus* il contenuto in flavine è piuttosto elevato in tutti gli organi esaminati ed i valori di FAD, FMN e riboflavina sono dello stesso ordine di grandezza di quelli trovati negli organi di mammifero <sup>(12)</sup>. Il rene e l'epatopancreas ne sono i più ricchi. Tale alto contenuto in flavine deve essere messo

(10) C. F. EMANUEL e A. W. MARTIN, «Z. Vergl. Physiol.», 39, p. 226 (1956).

(11) E. ROCCA (esperimenti in corso).

(12) O. A. BESSEY, O. H. LOWRY e R. H. LOVE, «J. Biol. Chem.», 180, p. 755 (1949).

in rapporto con la presenza in questi organi degli enzimi flavinici che operano la deaminazione ossidativa degli aminoacidi e delle amine (Blaschko e coll. <sup>(13)</sup>). Nel fegato e nel rene di *Octopus* infatti avviene l'ossidazione della tiramina, della 5-idrossitriptamina e di molti aminoacidi ad opera di ossidasi (alcune altamente specifiche) il cui gruppo prostetico è formato da nucleotidi flavinici.

TABELLA III.

*Effetto della tensione parziale di ossigeno sulla respirazione di «Octopus». T = 25° C.*

Organi	QO <sub>2</sub> (µl O <sub>2</sub> /mgr. peso secco/ora)	
	Aria	Ossigeno
Ganglio ottico . . . . .	1,86	4,76
Rene . . . . .	2,07	3,05
Ghiandola salivare . . . . .	0,83	2,81
Branchia . . . . .	1,64	2,43
Cuore branchiale . . . . .	1,76	1,74
Corpo branchiale . . . . .	1,13	1,42
Epatopancreas . . . . .	0,67	1,02
Muscolo del mantello . . . . .	0,42	0,88
Ventricolo mediano . . . . .	1,57	
Uova . . . . .	0,51	

*Respirazione endogena.* - Il consumo di ossigeno è stato determinato manometricamente a 24° C usando fettine di tessuto sospese in 3 ml. di acqua di mare filtrata e in presenza di aria o di ossigeno (Tabella III). La respirazione dei tessuti di *Octopus* è assai sensibile alla pressione parziale di ossigeno: i valori di QO<sub>2</sub>, piuttosto bassi in aria, sono talvolta più che raddoppiati in atmosfera di ossigeno. Questo fenomeno, ancora inspiegato, è piuttosto diffuso nei tessuti degli Invertebrati <sup>(14)</sup>.

(13) H. BLASCHKO, « J. Physiol. », 99, p. 364 (1941); « Biochem. J. », 52, p. 10 (1952); H. BLASCHKO e J. HAWKINS, « Biochem. J. », 49, p. 44 (1951); « Biochem. J. », 52, p. 306 (1951); « J. Physiol. », 118, p. 88 (1952); H. BLASCHKO e J. M. HIMMS, « J. Exper. Biol. », 31, p. 1 (1954); « J. Physiol. », 128, p. 7 (1955).

(14) E. S. G. BARRON, W. P. SIGHTS e U. WILDER, « Arch. Exper. Pathol. u. Pharmacol. », 219, p. 338 (1953).

*Azione del cianuro sulla respirazione.* — La sensibilità al cianuro è stata studiata facendo respirare i tessuti in atmosfera di ossigeno. L'inibitore, previamente neutralizzato, era aggiunto all'acqua di mare della vaschetta ed una miscela di alcali e cianuro alle concentrazioni indicate da Krebs <sup>(15)</sup> era posta nel pozzetto centrale. In quasi tutti i tessuti esaminati il consumo di ossigeno diminuisce dall'80 al 100 % in presenza di KCN 0,001 M (Tabella IV). Solo nell'epatopancreas l'inibizione non supera il 52 % e non aumenta con concentrazioni maggiori di cianuro.

TABELLA IV.

*Effetto del cianuro sul consumo di ossigeno degli organi.*  
KCN 0,001 M (conc. finale). T = 25° C.

Organi	QO <sub>2</sub>	QO <sub>2</sub> <sup>CN</sup>	Inibiz. %
Ganglio ottico . . . . .	4,60	0	100
Muscolo del mantello . . . . .	0,98	0	100
Corpo branchiale . . . . .	1,35	0,13	90
Rene . . . . .	3,01	0,33	89
Cuore branchiale . . . . .	1,70	0,28	84
Ghiandola salivare . . . . .	2,74	0,58	80
Epatopancreas . . . . .	1,00	0,48	52

Questi risultati indicano che nella maggior parte degli organi di *Octopus* gli enzimi che partecipano alla respirazione terminale sono metallo proteine, mentre nell'epatopancreas circa la metà della respirazione totale (respirazione « residua ») sembra essere catalizzata dagli enzimi flavinici.

*Azione sulla respirazione dell'ossido di carbonio al buio ed alla luce.* — La respirazione dei tessuti è stata studiata in presenza di miscele di ossido di carbonio e ossigeno (CO 95 % : O<sub>2</sub> 5 %). L'ossido di carbonio era preparato da acido formico e acido solforico a caldo e lavato con alcali. Gli esperimenti di controllo erano fatti in presenza di una miscela di azoto ed ossigeno nelle stesse proporzioni (N<sub>2</sub> 95 % : O<sub>2</sub> 5 %).

Per studiare l'effetto della luce sulla inibizione da ossido di carbonio le vaschette erano illuminate con luce monocromatica (435 mμ) ottenuta mediante lampade Philips al neon e filtri Chance posti entro il bagno termostatico. È noto che l'efficacia della luce è massima per lunghezze d'onda

(15) H. A. KREBS, « Biochem. J. », 29, p. 1620 (1935).



comprese tra 430 e 450 m $\mu$  <sup>(16)</sup>. La misura della inibizione al buio era fatta o spegnendo la luce ad intervalli regolari di tempo o usando vaschette di controllo rese opache con vernice nera.

I risultati di alcuni esperimenti tipici eseguiti con le ghiandole salivari sono riportati nella Tabella V. L'inibizione al buio della respirazione varia per questi organi dal 19 al 49 % ed è quasi sempre totalmente abolita dalla luce. Questi risultati dimostrano, almeno per gli organi studiati, la partecipazione di enzimi ferro-porfirinici nella respirazione terminale.

TABELLA V.

*Effetto dell'ossido di carbonio al buio e alla luce sulla respirazione delle ghiandole salivari. T = 25° C.*

N. esperimento	N <sub>2</sub> ; O <sub>2</sub> 95 % : 5 % QO <sub>2</sub>	CO buio		CO luce	
		QO <sub>2</sub>	% inib.	QO <sub>2</sub>	% inib.
Macropus 1 . . . . .	0,88	0,54	39	0,83	5
» 2 . . . . .	0,99	0,50	49	0,89	10
Vulgaris 1 . . . . .	0,98	0,80	19	1,06	0
» 2 . . . . .	0,94	0,60	36	0,92	0

## CONCLUSIONI.

I risultati degli esperimenti di inibizione della respirazione cellulare nei Cefalopodi con cianuro ed ossido di carbonio indicano chiaramente che la respirazione terminale è catalizzata da ossidasi ferroporfiriniche. La reversibilità della inibizione da ossido di carbonio alla luce è l'unico mezzo specifico per decidere della partecipazione di ossidasi a rame o a ferro alla respirazione terminale dei tessuti. Quando la respirazione è inibita dal CO le ossidasi terminali hanno certamente un metallo come gruppo prostetico. Se inoltre la inibizione da CO è sensibile alla luce, il metallo del gruppo prostetico è ferro. Questa regola stabilita da Warburg <sup>(16)</sup> fin dal 1926 non ha mai incontrato eccezioni. Noi la abbiamo applicata a diversi organi e tessuti dei Cefalopodi. Purtroppo non tutti gli organi si prestano egualmente bene per questi studi di inibizione per essere troppo intensamente pigmentati (epatopancreas, cuori branchiali, rene) o per avere un QO<sub>2</sub> troppo basso che diventerebbe insignificante alle tensioni di ossigeno necessarie per gli esperimenti di inibizione. Ricordiamo che questi esperimenti hanno avuto successo solo su sospensioni cellulari (eritrociti di mammifero, uova di riccio di mare, cellule del lievito) e sono ben note le difficoltà presentate dall'uso

(16) O. WARBURG, « Biochem. Z. », 177, p. 471 (1926); J. L. MELNIK, « J. Biol. Chem. », 146, p. 385 (1942).

di tessuti e di organi <sup>(16)</sup>. Tuttavia i risultati ottenuti con esperimenti fatti con fettine di ghiandole salivari di *Octopus* dimostrano che l'inibizione da CO è interamente abolita dalla luce e che di conseguenza il ferro è il gruppo attivo delle ossidasi terminali. Gli esperimenti eseguiti con gli altri organi anche se, per le suaccennate difficoltà tecniche, hanno dato risultati meno sicuri, hanno mostrato che essi si comportano come le ghiandole salivari verso l'ossido di carbonio al buio ed alla luce.

Gli esperimenti di inibizione con cianuro non solo confermano i risultati precedenti, ma indicano che le flavine, pur tanto diffuse negli organi dei Cefalopodi, non agiscono come ossidasi dirette nella respirazione terminale. L'elevato contenuto in flavine degli organi deve essere messo in rapporto con le numerose aminoacido ossidasi ed amino ossidasi presenti. Alcune di queste ossidasi sono attualmente allo studio per decidere se formano sistemi autossidabili o se un metallo è interposto lungo la catena dei trasportatori di elettroni dal substrato all'ossigeno.

Infine l'elevato contenuto in rame dell'epatopankreas indica che questo organo deve essere in qualche modo interessato nel metabolismo dell'emocianina. Esperimenti preliminari di separazione e identificazione delle proteine dell'epatopankreas hanno dimostrato che esistono nell'organo numerose frazioni proteiche contenenti rame. Se, come sembra, si deve escludere la partecipazione di enzimi a rame alla respirazione terminale dei Cefalopodi, è molto probabile che le proteine a rame degli organi (e in specie quelle dell'epatopankreas) siano connesse con la biosintesi dell'emocianina.

**Biologia (Microbiologia).** — *Sull'azione citopatogena della tossina stafilococcica, studiata per mezzo delle colture di tessuti in « vitro »* <sup>(\*)</sup>.  
Nota di GIUSEPPE PENSO e GIUSEPPE VICARI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal  
CorrISP. D. MAROTTA.

La tossina stafilococcica esercita azione citopatogena sulle colture di tessuti *in vitro*.

Tale azione si esplica su tutti i tipi di cellule comunemente usate in coltura ed è stata da noi particolarmente studiata su cellule tripsinizzate di fegato umano, di derivazione unicellulare e costituite da elementi epiteliali (ceppo Chang).

#### TECNICHE IMPIEGATE.

La tecnica impiegata è stata in tutto identica a quella adottata nello studio dell'azione citopatogena della tossina difterica e riferita a questa Accademia nella seduta del 13 aprile u. s.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

Le nostre esperienze sono state condotte con la tossina stafilococcica  $\alpha$  I.S.T., prodotta dallo stafilococco  $\alpha$ -emolitico e la cui D.M.E. era di  $1/1200 \text{ cm}^3$ , la D.C.E. uguale a  $\text{cm}^3 0,18$  e le U.A. 16 per  $\text{cm}^3$ , e la d.m.l. su coniglio  $0,35 \text{ cm}^3$ .

La tossina impiegata era liofilizzata, per cui al momento dell'uso la diluivamo in soluzione di Hanks, e le diverse diluizioni venivano aggiunte nella quantità di  $\text{cm}^3 0,5$  alle varie provette di coltura. Le diluizioni venivano fatte in maniera tale da ottenere, per ogni mezzo centimetro cubo, un numero noto di d.m.l. di tossina.

Per ogni esperienza venivano impiegati in media sei tubi di cellule per ogni diluizione approntata.

Le letture venivano effettuate dopo 30 minuti, un'ora, due ore, tre ore, sei ore, 24 ore.

#### RISULTATI OTTENUTI.

Le cellule delle colture di tessuto in cui sia stata aggiunta una d.m.l. di tossina stafilococcica, vanno incontro a fenomeni di sofferenza pochissimo tempo dopo l'aggiunta della tossina stessa. Contrariamente a quanto osservato con la tossina difterica, non si ha, con la stafilococcica, che un periodo d'incubazione brevissimo che non va oltre i 30 e 40 minuti. Dopo un'ora, infatti, l'effetto citopatogeno è già evidente. Naturalmente più la dose di tossina è alta, più intense saranno le manifestazioni citopatogene iniziali che si manifestano, però, sempre e in ogni caso oltre il trentesimo minuto.

La sofferenza delle cellule si manifesta macroscopicamente con fenomeni di degenerazione ben diversi da quelli osservati trattando le cellule con tossina difterica; la tossina stafilococcica infatti coarta i tessuti in coltura le cui cellule in gran parte si distaccano, mentre quelle che rimangono aderenti alle pareti sembrano avvizzite e coagglutinate tra loro.

Lo studio istopatologico delle cellule trattate con tossina stafilococcica dà ragguagli molto più precisi e completi sull'azione di questa sulle cellule in coltura.

Tali alterazioni riguardano la coltura nel suo insieme e le singole cellule.

La coltura globalmente considerata, presenta da un lato una rarefazione numerica delle cellule che la compongono, rarefazione visibile sia a fresco che nei preparati colorati, dall'altro una conglomerazione di gruppi di cellule che assumono un aspetto bottonoso, a placca.

Le lesioni cellulari sono di tipo e grado diverso, tutte a carattere regressivo-degenerativo e ad evoluzione rapidissima: esse si iniziano con un rigonfiamento e una vacuolizzazione del citoplasma e più o meno contemporanea riduzione volumetrica del nucleo che diventa ipercromico. Dopo due ore si ha ulteriore riduzione della massa nucleare accompagnata, questa volta, anche da riduzione della superficie citoplasmatica. Le cellule finiscono coll'apparire avvizzite, coagglutinate fra loro in piccoli ammassi che si presentano a placca o a forma di bottone.

L'attività moltiplicativa delle cellule viene bloccata gradualmente e dopo tre ore non si osservano più cellule in mitosi.

L'azione citopatogena della tossina stafilococcica sulle cellule in coltura si manifesta quindi – dopo un trascurabile tempuscolo d'incubazione: 30 minuti – con la seguente sequela di lesioni patologiche: rigonfiamento e degenerazione vacuolare – non dà fenomeni di steatosi del citoplasma delle cellule colpite, contrazione del citoplasma, riduzione volumetrica del nucleo e sua ipercromia, necrosi e dispersione di molte cellule, coagulazione di altre in tipici ammassi rotondeggianti a placca.

## COMMEMORAZIONI

### Commemorazione del Socio Nazionale Dante De Blasi

tenuta (\*) dal Socio VITTORIO PUNTONI

Ho scritto questa commemorazione di Dante De Blasi con animo veramente commosso, perché l'ho vergata nella stanza dove Egli lavorò durante gli otto anni nei quali fu Direttore dell'Istituto d'Igiene di Roma; nella « Sua stanza » ed al cospetto del Suo ritratto, che Egli mi consegnò, quando ebbi a succedergli nel 1943, con una affettuosissima dedica; nella Sua stanza, dove Egli svolse la propria attività di Direttore dell'Istituto d'Igiene di Roma con il cuore lacerato dal più grande dolore che possa colpire un padre!

Degli 83 anni della Sua vita terrena (cioè dalla Sua nascita, ad Uggiano la Chiesa in terra d'Otranto, il 25 ottobre 1873; al Suo trapasso in Roma, il 10 luglio 1956), 63 costituiscono ciò che si potrebbe chiamare un cammino progressivo verso una meta di universale estimazione per le Sue doti scientifiche e morali, di universale affetto per le sue doti umane.

Ho detto 63 anni, perché il primo passo col quale la Sua personalità cominciò ad affermarsi ed imporsi, fu all'età di 20 anni, quando, nel 1893, licenziato dagli studi medi, vinse il primo premio nella gara nazionale per lo scrivere italiano, indetta del Ministro Guido Baccelli, essendo Presidente della Commissione giudicatrice Giosuè Carducci.

Studente universitario a Roma, emerse per la Sua eccezionale preparazione, e per la Sua non meno eccezionale attitudine a mantener viva ed incancellabile ogni nozione appresa, come lo dimostra il fatto che Egli non si curò di superare esame per esame, ma riservò tutte le prove all'ultimo anno, superando ben 18 esami in una sola sessione con le massime votazioni, dal che si deduce come questo giovane volle dar prova della Sua preparazione in un modo totalitario ed integrale, anziché a tappe come si usa di solito.

(\*) Nella seduta del 13 aprile 1957.



Seguì la lode alla laurea conseguita nel 1899 ed il Premio Girolami per la miglior tesi di laurea.

Le Sue tendenze per la biologia lo attrassero ben presto verso l'Istituto d'Igiene, allora diretto da Angelo Celli, ove fu ammesso come assistente ordinario nel 1902 ed ove sostò ben 18 anni, come aiuto, fino al conseguimento della Cattedra; ivi si dedicò con grande passione ed originalità alle ricerche di sierologia e di microbiologia.

Per rendersi conto del valore delle ricerche giovanili di Dante De Blasi in questi campi occorre riferirsi all'epoca nella quale esse furono condotte, epoca nella quale, per quello che riguarda i *virus*, si brancolava nel buio, e per ciò che riguarda la sierologia si era in un periodo di assestamento.

Fino dall'inizio della Sua operosità scientifica Dante De Blasi affrontò problemi difficili che trattò con la precisione tecnica e col saggio discernimento di uno sperimentatore già maturo. Ed era infatti scientificamente maturo se si consideri che Egli attese l'età di 30 anni prima di cominciare a pubblicare; raro esempio di serietà se la si paragona alla leggerezza ed alla fretteiosità della maggior parte dei giovani nel voler pubblicare.

Il Suo primo forte contributo alla ricerca scientifica riguardò la natura del *virus* rabico; nel 1903 da più parti venne affrontato questo problema con studi contemporanei; apparvero prima le pubblicazioni di Di Vestea in Italia e di Remlinger a Costantinopoli sulla filtrabilità; seguirono immediatamente quelle di De Blasi, che non sono di conferma, ma originali, in quanto furono condotte contemporaneamente ed indipendentemente dai precedenti Autori, con lo stesso risultato.

Altre interessanti ricerche sulla filtrabilità di agenti morbosì, vennero da Lui condotte sulla agalassia contagiosa degli ovini.

Né meno importanti sono le ricerche da Lui compiute, in questo primo periodo della Sua feconda attività, nel campo della sierologia. Finissimo osservatore e sperimentatore Egli compì ricerche fondamentali sulle agglutinine, ed in particolare sulla loro eliminazione col latte e sul loro assorbimento intestinale.

Queste importanti pubblicazioni gli valsero, nel 1903-1904, la libera docenza in batteriologia; e quì è opportuno di fare ancora un rilievo sulla serietà di questo nostro illustre e compianto Maestro, il quale, benché avviato sulla strada dell'Igiene non si curò di aspirare ad una seconda libera docenza in questa disciplina, consapevole della fatuità dei titoli e dei diplomi in confronto del valore personale.

Le ricerche sierologiche vennero poi continuate sulle agglutinine, e misero capo alle interessantissime acquisizioni sul fenomeno paradossoso e sulle zone di inibizione intercalari; sulle emolisine, con le belle osservazioni sulle emolisine secondarie; ed ancora sulla reazione di Wassermann, alla cui tecnica ed alla cui interpretazione portò notevoli contributi; sulle opsonine e sulle aggressive.

Fra le indagini nel campo più strettamente igienico, un gruppo ve ne è di importanza notevole che riguarda lo studio dell'epidemiologia di febbre

tifoide di origine idrica che prese le mosse dalla sopravvenuta epidemia ad Albano Laziale. L'indagine epidemiologica ed i rilievi tecnici furono condotti con tale maestria, e l'interpretazione dei dati con tale acume che l'epidemia di Albano fu considerata come l'unica nella quale l'origine idrica fosse stata dimostrata e documentata in modo inconfutabile. Da questo studio derivò una nuova nozione: che cioè, a causa di particolari alterazioni dei giunti fra i vari segmenti delle tubazioni, può esservi aspirazione dei liquami infetti in un acquedotto nonostante la pressione positiva dell'acqua che in esso scorre.

La documentazione di questi studi, inviata a Strasburgo in occasione dell'esposizione scientifica internazionale per il centenario della nascita di Luigi Pasteur, gli valse la più alta distinzione accordata e cioè il «Diplôme de hors Concours».

Altro modello di indagine e di inchiesta igienica, è lo studio eseguito sulle condizioni delle manifatture dei tabacchi, che portò alla adozione di misure atte ad eliminare alcuni inconvenienti che si verificavano in tali stabilimenti.

Questi i principalissimi studi, fra i molti altri, che gli valsero la Cattedra nel 1920.

Salito alla Cattedra l'attività di Dante De Blasi, pur non abbandonando il campo sperimentale, si orientò soprattutto verso i problemi sociali, che Egli trattò con una competenza e con una autorità non minore di quelle che appaiono nella Sua produzione scientifica. Troviamo infatti originali contributi inerenti alla lotta antitubercolare, alla lotta antimalarica, alla profilassi della febbre tifoide, al risanamento ambientale, all'Igiene del latte, all'insegnamento dell'Igiene, alle organizzazioni sanitarie.

La carriera accademica di Dante De Blasi, iniziata con la Sua nomina ad assistente dell'Istituto d'Igiene di Roma nel 1902, è segnata dalle seguenti tappe:

libero docente nel 1903;

incaricato dell'insegnamento di Microbiologia nel 1905 e tale fino al 1920;

professore straordinario d'Igiene a Cagliari nel 1920;

trasferito alla Cattedra d'Igiene di Napoli nel 1921 dove rimase fino al 1935 ed ove fu incaricato di malattie esotiche e di altri insegnamenti;

infine trasferito nel 1935 alla Cattedra d'Igiene di Roma, presso la quale Egli si era formato nei 18 anni di permanenza come assistente e come aiuto, e dove ritornava a compiere il ciclo della Sua vita accademica ufficiale che terminò nel 1943 con il Suo collocamento a riposo per limiti di età, ma nel pieno vigore mentale, che gli permise di esplicitare ancora molte attività sul campo scientifico e sociale.

Il ritorno a Roma avrebbe dovuto essere, per Dante De Blasi, ambito premio alla Sua operosità ed al Suo valore, nonché fonte di gioia e di tranquillità. Il destino volle altrimenti! Pochi giorni prima di prendere le congedi dell'Istituto, e cioè il 14 ottobre 1935, il Suo amatissimo Figlio Giorgio,

studente del 5° anno di medicina, cadeva vittima del dovere in una sciagura aviatoria durante esercitazioni di servizio militare che Egli compiva nella Sua qualità di Ufficiale pilota di complemento.

Soltanto chi ha vissuto vicino a Dante De Blasi negli anni che seguirono questa fatale disgrazia, può aver compreso lo strazio del Suo cuore generoso. Immaginarsi che cosa doveva provare questo sventurato Padre quando si accingeva a far lezione agli studenti del 5° anno, fra i quali avrebbe dovuto trovarsi il figlio! La Sua salute ne soffrì crudelmente e per lungo tempo il Suo animo fu come smarrito.

L'attività di Dante De Blasi nel campo dell'Igiene e della Scienza va molto al di là del Suo lavoro accademico e scientifico. Egli prestò l'opera Sua, con assoluto disinteresse, dovunque fosse chiamato a presiedere o a collaborare nei più diversi consessi e nelle più varie contingenze. Per non citare che le più importanti fra le moltissime cariche da lui tenute, ricorderò:

- la direzione interinale dell'Istituto Antirabico di Roma;
- la direzione tecnica dell'Istituto Vaccinogeno di Roma;
- la direzione del Laboratorio patologico degli Ospedali riuniti di Roma;
- la direzione dei laboratori dipendenti dall'ispettorato di Sanità militare durante la guerra 1915-18;
- la partecipazione a molteplici Commissioni nell'ambito della Sanità militare;
- la presidenza della Società napoletana antitubercolare;
- la presidenza del Consiglio Superiore di Sanità;
- la presidenza del Comitato di Medicina e biologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche;
- l'appartenenza ai Consigli provinciali sanitari di Napoli e di Roma;
- l'appartenenza alla Consulta del Governatorato di Roma;
- la presidenza della Commissione per la Farmacopea Ufficiale;
- la presidenza dell'Associazione Italiana per l'Igiene;
- l'appartenenza a Commissioni internazionali per la Sierologia, sotto l'egida della Società delle Nazioni;
- la presidenza dell'Istituto italiano di antropologia;
- la presidenza del Convegno Volta del 1932, indetto dalla Reale Accademia d'Italia;
- e molte altre che sarebbe troppo lungo elencare.

Gran parte della propria attività Dante De Blasi dedicò alla Scuola, e molti di coloro che furono suoi allievi sono saliti all'onore della Cattedra: Vittorio Cianci, prematuramente scomparso; Mario Mazzeo, prof. d'Igiene a Napoli; Alessandro Alessandrini, professore d'Igiene a Bologna; Aldo Cimmino, professore di Microbiologia a Roma; Giulio Buonomini, professore di Igiene a Pisa; Antonio Tizzano, professore d'Igiene a Siena; Ettore Biocca, professore di Parassitologia a Roma. Altri suoi allievi ressero o reggono incarichi ufficiali d'insegnamento: Guglielmo Ascione, che se fosse vissuto sarebbe certamente salito alla Cattedra; Giuseppe Marinelli, Giovanni Labranca, Mario Talenti, Vittorio Del Vecchio. Inoltre moltissimi furono i suoi

allievi che ottennero onorevolmente la libera docenza in Igiene o materie affini.

L'alto sapere, il disinteresse, l'elevato senso morale, valsero a Dante De Blasi l'estimazione generale, in Italia ed all'estero; i suoi meriti furono apprezzati e gli vennero accordate le più grandi soddisfazioni alle quali un uomo di scienza possa aspirare.

Fra le massime onorificenze tributategli sono da ricordare le nomine a membro:

di questa nostra Accademia Nazionale dei Lincei, di cui fu anche Accademico Segretario;

della Reale Accademia d'Italia;

dell'Accademia dei Quaranta;

della Pontificia Academia Scientiarum;

della Deutsche Akademie der Naturforscher, che lo insignì della medaglia Cothenius;

di non meno di altre dodici Accademie italiane a carattere regionale.

Fu inoltre, Socio benemerito, Socio onorario e Presidente onorario di varie Associazioni.

Un così largo consenso parla per sè stesso e dimostra quale fosse l'estimazione e la fiducia posta in Dante De Blasi.

Ma vari aspetti della Sua personalità vanno ancora considerati.

Il primo riguarda la Sua eccezionale coltura al di fuori del campo scientifico nel quale direttamente militava. Egli era al tempo stesso poliglotta e conoscitore della matematica, cultore della Storia ed Umanista. La Sua vasta biblioteca, che a poco a poco invase quasi tutta la Sua casa, testimonia di questa Sua tendenza enciclopedica che lo portava a considerare la coltura sotto vastissimo angolo visivo.

Il secondo riguarda le Sue doti morali ed umane, che si riflettevano in ogni atto della Sua vita, nell'intimità familiare ed in quella della Sua Scuola, e che ritengo di poter concentrare in un esempio:

Dante De Blasi soffriva una pena incredibile quando doveva riprovare uno studente! Per lui bocciare era un tormento, vi si induceva con ripugnanza e poi rimaneva turbato, perché nel compiere un dovere, compiva altresì un atto contrastante col Suo spirito, generoso, buono ed indulgente.

Il 10 luglio 1956, giorno della scomparsa di Dante De Blasi, è stato giorno di grave lutto per l'Igiene, e di cordoglio profondamente sentito per tutti coloro che gli sono vissuti vicino, che hanno lavorato con Lui; per me in particolare, che sono stato suo successore nella Cattedra d'Igiene di Roma.

Nessun dolore per la scomparsa di un uomo, e di uomo della elevatezza di Dante De Blasi, può eguagliare quello della Famiglia; ma alla Sua Famiglia, quì presente, voglio assicurare che anche il dolore delle altre Sue Famiglie, di quella Accademica, costituita dai Soci dei Lincei, e di quella Universitaria costituita dai Suoi discepoli e dai Colleghi più vicini, è stato profondo, sincero, duraturo.



## Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Gola (1877-1956)

tenuta (\*) dal Socio GIOVANNI NEGRI

In una giornata del lontano maggio 1896, due studenti in medicina della Università di Torino, frequentatori per vocazione naturalistica dell'Orto Botanico del Valentino, si incontravano, nel corso di una delle consuete escursioni dell'Istituto, nella Conca di Susa, giustamente famosa per la sua ricchezza e per le sue rarità floristiche; e da quella occasionale conoscenza nasceva una sessantenne intimità fraterna, alla quale oggi il superstita deve l'onore di rievocare per Voi, Chiarissimi Colleghi, la vita, e l'opera dell'Amico, di Giuseppe Gola, mancato, quasi ottantenne, alla famiglia, agli amici, alla scienza, nella scorsa estate.

Nato a Novara il 26 febbraio 1877, Giuseppe Gola ha compiuto a Roma ed a Novara i primi studi, poi ha conseguita a Torino nel 1900 la laurea in Medicina e Chirurgia, frequentando, come interno, il Laboratorio di Farmacologia diretto dal prof. Piero Giacosa e successivamente, nel 1902, la laurea in Scienze Naturali, interno dell'Istituto Botanico del Valentino, ove, proprio allora, era stato chiamato a succedere a Giuseppe Gibelli, il prof. Oreste Mattiolo. All'Orto Botanico di Torino, ove era noto sino dagli anni del corso di Medicina, Gola, poco incline per temperamento e per disciplina di studio a viaggi od a soggiorni fuori sede, doveva trascorrere, assistente e successivamente aiuto e libero docente, un ventennio, interrotto soltanto dalle vacanze estive, normalmente dedicate ad attive erborizzazioni nelle Alpi Occidentali; e, dal 1916 ed il 1918, dal servizio di guerra compiuto come Capitano medico, direttore del Laboratorio di Batteriologia e dei Servizi Igienici dell'Ospedale Militare di Ancona ed, interinalmente, della stessa Provincia. Vincitore nel 1920 del primo concorso per Cattedre di Botanica del dopo guerra, assumeva la direzione dell'Istituto Botanico di Cagliari e l'anno successivo, per chiamata della Facoltà, di quello di Padova. A Padova Egli è rimasto definitivamente per tutto il resto della sua carriera accademica, ben presto Preside della Facoltà di Scienze, poi, dal 1940 al 1943, Pro-Rettore e dal 1943 al 1949, Rettore dell'Università, concludendo il suo compito al servizio degli studi quale Commissario della Facoltà di Agraria, da Lui voluta ed organizzata. Ha fatto parte, dal 1927, dell'Accademia dei Lincei, dalla fondazione, della Pontificia Accademia delle Scienze, dell'Accademia Italiana delle Scienze; è stato Presidente della Accademia di Scienze, Lettere e Agricoltura di Padova dal 1941 al 1947, membro attivo e, negli ultimi anni, Pre-

(\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

sidente dell'Istituto Veneto, Corrispondente della Accademia delle Scienze di Torino e Bologna e di altri sodalizi Italiani ed Esteri. È morto il 25 luglio 1956.

Uscito da una di quelle buone famiglie dell'alta borghesia provinciale, che hanno dato tanti uomini eminenti al servizio del Paese, Giuseppe Gola è entrato nella vita universitaria facendosi ben presto apprezzare a Torino da Maestri e compagni, ai quali non potevano passare inosservati l'ingegno pronto ed acuto, la vivace passione per la scienza, la capacità di lavoro di questo giovane, non meno che il suo dignitoso riserbo e l'inalterabile urbanità, temperati dalla naturale gaiezza e da una punta di sano umorismo, la grande e generosa sincerità, la modestia, l'assenza di qualunque posa o volgarità od intemperanza nel costume, nelle opinioni e nei discorsi. Buon compagno, ma uomo di pochi amici, ai quali era poi attaccatissimo, Egli accettava la disparità di educazione e di temperamento dei condiscipoli di cui aveva sperimentato la rettitudine e l'originalità, con liberale tolleranza, pago, anche fuori laboratorio, delle peripatetiche conversazioni serali sotto gli interminabili portici torinesi. Del resto, assiduo dell'Istituto dalle prime ore del mattino al tardo pomeriggio, a meno che una delle frequenti escursioni del gruppo dei floristi che faceva capo all'Orto del Valentino, non offrisse l'occasione a quell'ottimo camminatore che Egli è sempre stato di una grande giornata di raccolte e di osservazioni all'aperto, Gola ha dovuto la sua feconda attività di studioso alla fermezza con la quale seppe sempre difendere il raccoglimento e la semplicità della sua esistenza, schivo, non soltanto di ogni distrazione mondana, ma anche di ogni deviazione intellettuale che potesse pregiudicare il preciso piano di attività studiosa che si era prefisso sino dai primi anni della vita universitaria. Benché dotato di una memoria eccezionale Egli coordinava con una assidua schedatura, ben nota agli amici che ne approfittavano abbondantemente, le sue estesissime letture, non soltanto nel campo della letteratura botanica, ma anche in quello delle dottrine, delle pratiche tecniche e delle utilizzazioni del mondo vegetale, che potessero offrirgli l'occasione di rispondere a qualunque domanda che gli fosse fatta in proposito, nonché di utilizzare il vasto campo della economia e della tecnica agraria e forestale, per la documentazione ed interpretazione di osservazioni e di sviluppi di carattere teorico. Avveniva così che Egli potesse fornire indicazioni e dare preziosi consigli a studiosi estranei al suo proprio campo e ad industriali, come avvenne per esempio allorché, pregato di tenere un breve corso di microscopia per la Conceria Scuola di Torino, trasformò questo impegno in un vero insegnamento regolare, redigendo anche un trattatello in cui Egli, «botanico», introdusse, a lato della tabella di determinazione delle cortecce concianti, anche una chiave di classificazione delle principali pellicce del commercio. Né il passaggio alla vita coniugale, avvenuto nelle più felici circostanze di affetto e di illimitata comprensione, né il conseguimento della cattedra, né la fortunata paternità, dovevano mutare sensibilmente la pacata vicenda delle sue tranquille ed assortite giornate di lavoro, anche se l'impegna-

tiva chiamata alla successione di P. A. Saccardo, doveva rappresentare uno svolto notevole nella sua consuetudine di vita. I collaboratori e allievi padovani diranno, meglio di quanto io possa, quale sia stata l'esistenza cattedratica di Gola dopo la cessazione della nostra ventenne convivenza torinese. Un'occhiata all'elenco, ormai purtroppo chiuso, delle sue pubblicazioni e la notorietà giustamente acquisita da lui nella sua vita di cattedratico, consentono tuttavia di distinguere due fasi della sua attività, ugualmente importanti nei risultati, anche rimanendo l'intimità dell'Uomo e dello Studioso essenzialmente immutata. La prima va essenzialmente sino alla conquista della cattedra ed al soggiorno di Cagliari, la seconda s'inizia col passaggio da Cagliari a Padova.

È specialmente a proposito della sua produzione durante il periodo torinese che è stato osservato come gli argomenti da Lui studiati presentino una sensibile eterogeneità; ma si è aggiunto che Egli, *naturae curiosus*, e perfettamente disinteressato nelle sue indagini, doveva appagarsi soprattutto della soddisfazione di toccare il maggior numero possibile di problemi. D'altra parte, ogni suo gruppo di ricerche è stato costantemente svolto sino al raggiungimento, meditato, faticato, tecnicamente ineccepibile e molto spesso ingegnoso, sempre criticamente controllato, di una fase della ricerca che poteva, in ogni modo, venire considerata come un risultato positivo, una approssimazione, in corrispondenza della quale l'indagine poteva anche sostare. Egli riteneva infatti che le conclusioni del naturalista, giustificate su basi essenzialmente empiriche, abbiano il carattere di logiche e graduali progressioni verso la verità, pure non raggiungendola mai definitivamente, tanto che ogni tappa, in una certa misura conclusiva, richieda di essere assoggettata a nuove meditazioni, di essere « lasciata riposare ». E naturalmente è avvenuto, più di una volta, che altri e diversi problemi, proposti incessantemente alla sua cultura in via di permanente arricchimento, attirassero la sua attenzione, facendo passare in secondo piano le indagini precedenti, che non venivano tuttavia mai completamente abbandonate e che noi possiamo anche ritrovare inserite in qualche altro ciclo di ricerche. Tutta l'opera di Gola appare tuttavia coordinata da una incontestabile unità di pensiero.

Gola ha del resto trovato nell'Istituto Botanico torinese l'ambiente più favorevole che potesse desiderarsi al perfezionamento ed alla valorizzazione delle sue felicissime attitudini di studioso. Che cosa sia stato l'Orto del Valentino, nel primo quarto del secolo, non può esser dimenticato da coloro che hanno avuto la fortuna di vivervi. Buon laboratorio, strumentalmente e bibliograficamente bene attrezzato per il suo tempo e, sotto il secondo aspetto, integrato dalle ricche biblioteche accademiche e cittadine, buon erbario generale ed eccezionale erbario regionale, ma, soprattutto, cenacolo che riuniva tre generazioni di entusiasti, disinteressati, gioiviali lavoratori; il vecchio Gibelli, lucido rappresentante, per qualche anno ancora, di una grande tradizione; Oreste Mattiolo, chiamato allora dalla cattedra di Firenze a quella di Torino nel momento migliore della sua fattiva e contagiosa attività; Saverio Belli, che doveva, dopo qualche anno di direzione dell'Istituto di Cagliari,



ritornare malato, ma non stanco, a Torino e conservare all'Orto del Valentino ed ai giovani che vi si formavano, per lungo tempo, l'assistenza cordiale della sua profonda dottrina e della sua acutissima critica; l'irrequieto e disordinato, ma coltissimo e geniale Luigi Buscalioni; Enrico Ferrari, l'infaticabile esploratore della flora piemontese e conservatore degli erbari; gli assistenti, gli allievi interni, una pattuglia di ardenti botanofili locali; un piccolo mondo nel quale la diversa dignità accademica sfumava nella cordialità della amicizia, non meno studioso in laboratorio, che sportivamente praticante della botanica in campagna, non chiuso del resto pedantemente nella sola esecuzione del quotidiano compito scientifico, perché il coltissimo direttore, formatosi, oltre che alla scuola del Gibelli, anche a quella di De Bary a Strasburgo e, d'altra parte, mente di storico ed anima d'artista, professava in laboratorio la più liberale ospitalità per tutti gli orientamenti della sua scienza, sapeva essere, oltre che Maestro cordiale, compagno dei suoi giovani e rievocare, soprattutto nel corso delle escursioni, a lato del commento scientifico dell'ambiente naturale, le tradizioni, la storia, i monumenti di ogni angolo del suo Piemonte.

Gola è stato il più brillante esponente dei giovani formati in questa vivace e simpatica Scuola, assumendo subito, sotto la guida del Belli, l'elaborazione critica delle raccolte eseguite dalla attivissima pattuglia erborizzante, mentre le osservazioni biologiche, fatte in campagna, arricchivano la cultura che Egli si andava facendo sulle grandi opere trattatistiche che, proprio in quello scorcio di tempo, avevano determinato una profonda trasformazione della fisiologia vegetale e poste le basi della chimica fisiologica e dell'ecologia - la seconda edizione della «Fisiologia vegetale» di Pfeffer, l'«Ecologia vegetale» di Warming la «Geografia botanica su basi fisiologiche» di A. F. W. Schimper - orientando la mentalità di ecologo che doveva costituire il fondo di tutta la sua produzione. Frutto di questa attività floristica sono, oltre ad alcune note critiche su specie rare della flora piemontese, le due importanti memorie *Piante rare e critiche per la flora del Piemonte* (1908) e *Le Avene piemontesi della Sezione Avenastrum Koch* (1911), mentre le escursioni più propriamente organizzate da Lui, andavano accumulando i documenti per due notevoli monografie fitogeografiche *La vegetazione dell'Appennino Piemontese* (1912) ed *I Caratteri della vegetazione della Valle Maira* (1929) seguito da *Le Piante Vascolari di Val Maira (Alpi Cozie)* (1933); questi due ultimi lavori rimasti in sospenso per parecchi anni a cagione degli impegni della guerra, dei concorsi e dei primi anni di cattedra e pubblicati poi a Padova, benché appartenenti al periodo torinese. Contemporaneamente Egli si cimentava anche alla sistematica di un gruppo di crittogame, le Epatiche, al quale si era interessato probabilmente sotto la suggestione delle notevoli ricerche compiute molti anni prima da Oreste Mattiolo sulla biologia di questa singolare classe di Briofite, determinando svariati gruppi di materiali esotici inviati a Torino da diversi viaggiatori: dal Ruwenzori (1908), dalle Isole Canarie (1911), dal Kashmir (1914), dall'Abissinia (1914), dal Kenia (1914), dal Katanga (1920), dalla Terra del Fuoco (1922).



Questa ragguardevole produzione speciografica, floristica e geobotanica, alla quale era doveroso accennare, non soltanto per il suo pregio, ma anche perchè il Nostro ha conservato per essa una notevole simpatia, ritenendo che una preparazione sistematica, fondata sulla esperienza personale di un gruppo, sia indispensabile alla formazione di un naturalista, assume tuttavia una posizione di secondo piano in confronto alla attività ecologico-fisiologica svolta da Lui e per ispirazione e sulla guida sua, dalla sua scuola. Effettivamente la sua vocazione ed il suo temperamento lo orientavano piuttosto verso ricerche di chimica fisiologica e di ecologia e questa tendenza si era accentuata in seguito al tirocinio fatto nell'Istituto di farmacologia, durante il quale aveva acquisito, sotto la guida e del Prof. Piero Giacosa e del suo assistente Marco Soave, «analista perfetto e scrupoloso e profondo conoscitore della vita delle piante», come scrive lo stesso Gola, la padronanza della sperimentazione biochimica. Indici del progresso di questa preparazione sono anzi una Nota *Sul comportamento di alcuni composti di ferro nella digestione artificiale* (1899) e la sua tesi di laurea in Medicina: *Il comportamento del mercurio nell'organismo* (1900). Passato poi all'Istituto Botanico ed incoraggiato dal prof. Mattiolo a coltivare le ricerche chimico-fisiologiche, Egli non ha mancato di accettare l'invito e cominciato dal raffinare la sua preparazione in proposito, collaborando alla Enciclopedia di Chimica del prof. Icilio Guareschi, al quale il suo direttore lo aveva presentato. Quale sia stato l'approfondimento della sua cultura in questo campo, grazie alla collaborazione, proseguita, senza interrompere la contemporanea attività di botanico, sino al 1916, è dimostrato dagli articoli, vere sintesi monografiche di argomenti speciali, da Lui redatti per il periodico citato: 1907, *L'Acido cianidrico ed i glucosidi cianogenetici nel regno vegetale*; 1908, *Le basi puriniche nel regno vegetale*; 1913, *La clorofilla*; ed inoltre il capitolo *Biochimica vegetale*, pubblicato nel 1916 nel volume XIII della «Enciclopedia di Chimica», abile e diligente repertorio delle notizie e delle teorie che interessano la biochimica delle piante, inquadramento di molte ricerche future compiute poi da Lui stesso o pensate ed anche iniziate e fatte poi proseguire dai suoi allievi.

Passando poi alle ricerche originali, deve citarsi anzitutto la sua tesi di laurea in Scienze sullo *Zolfo ed i suoi composti nella economia delle piante* (1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> 1902, 3<sup>o</sup> 1903), rendiconto delle ricerche che lo condussero a constatare la presenza, nei tessuti vegetali dotati di grande attività funzionale, di un aminoacido solforato, *cisteina*, da cui si originerebbe la *cistina*, costituente delle sostanze proteiche. Gola ha preceduto, su questa via, di molti anni, l'isolamento del glutatione compiuto da Hopkins (1929). Egli ritiene che il ciclo biochimico dello zolfo sia legato strettamente a quello dell'azoto, essendo entrambi questi elementi normalmente assorbiti dall'ambiente esterno come composti di maggiore ossidazione, elaborati in seno all'organismo vegetale per fenomeni di riduzione, legati poi ai composti organici di carbonio, per collegarsi assieme a formare dapprima glucosidi ed aminoacidi, poi le sostanze proteiche. Due anni dopo compaiono contemporaneamente le prime contribuzioni tre nuovi cicli di indagini. Gola, che aveva studiato a fondo

le ricerche anatomico-fisiologiche di Oreste Mattiolo e Luigi Buscalioni sui tegumenti delle leguminose, riprendeva sperimentalmente in esame, sui semi di oltre 400 specie, la biologia dei tegumenti, dimostrando, in due Memorie pubblicate nello stesso anno (1905): *Ricerche sui rapporti tra i tegumenti seminali e le soluzioni saline*, e *Ricerche sulla biologia dei semi a tegumento permeabile*, che il passaggio delle soluzioni saline attraverso i tegumenti è regolato, oltre che dalla presenza di strati di elementi pectinizzati e più o meno sclerificati, anche dall'esistenza di una particolare membrana anista semipermeabile situata nella parte più profonda del tegumento e così bene individuata da poter venire isolata e funzionare come un osmometro, quando venga applicata all'estremità di un tubo di vetro; scoperta che viene erroneamente attribuita ad A. J. Brown, che ha constatato, soltanto due anni dopo, (1907) una disposizione analoga nelle cariossidi di orzo. Alla biologia dei semi venivano portati poi dal Nostro contributi ulteriori nel 1906: *Sulla attività respiratoria dei semi durante il periodo della quiescenza*; nel 1920: *Sulla presenza di composti chimici nel tegumento seminale di alcune Centrosperme* e finalmente nel 1924: *La respirazione dei semi durante la maturazione dei frutti, specialmente in quelli carnosì*. D'altra parte, nello stesso 1905, Egli comunicava all'Accademia delle Scienze di Torino i primi risultati delle sue indagini: *Sulla respirazione intramolecolare delle piante palustri*, premessa alla maggiore Memoria, *Sulla funzione respiratoria delle piante acquatiche* comparsa nel 1907. In questi due lavori Gola ebbe di mira due ordini particolari di fenomeni connessi con l'anareobiosi degli organi vegetali e dei semi quiescenti affondati nel fango delle acque lentamente fluenti o stagnanti, cioè in un ambiente nel quale si svolgono attivi fenomeni di riduzione. L'uno è il prolungamento fisiologico del regime di respirazione intramolecolare, cioè di produzione di energia mediante la scissione del destrosio in alcool ed in anidride carbonica, processo fisiologico, che avviene cioè senza perdita della possibilità della ripresa della normale funzione respiratoria alla cessazione delle condizioni di asfissia, quale si verifica, per esempio, nei semi della *Trapa natans*, che svernano ed iniziano in primavera la germinazione sotto questo regime e sono perciò straordinariamente ricchi di riserve amilacee; fenomeno analogo del resto a quello che il Nostro ha osservato, in condizioni particolari, anche nei tessuti dei frutti: *Osservazioni sulla fermentazione della cosiddetta composta* (1906). L'altro fenomeno è la funzione dei composti organici di ferro, associati spesso anche a composti di manganese, la cui presenza è segnalata nei tessuti superficiali dei frutti e delle vecchie radici delle piante acquatiche da una caratteristica colorazione nero-violacea, di servire di veicolo all'ossigeno; composti che possono presentare diverse forme di combinazione, variabile da alcuni tannati evidentemente formatisi per combinazione del tannino col ferro del limo circostante, a composti di origine completamente cellulare aventi il ferro labilmente legato alla molecola organica, fino a composti con tali elementi assai stabilmente legati, tanto da non essere riconosciuti che dopo incinerazione della sostanza organica. La funzione di trasporto dell'ossigeno è poi condizionata, se-

condo Gola, alla presenza nelle cellule di perossidasi, la distribuzione delle quali sta effettivamente in rapporto con quella dei composti ferruginosi labili.

In terzo luogo e sempre 1905, compariva una prima Memoria *Studi sui rapporti fra la distribuzione delle piante e la composizione fisico chimica del suolo*, alla quale, cinque anni dopo, ne teneva dietro una seconda: *Saggio di una teoria osmotica dell'edafismo* (1910). Questi due lavori, unitamente ad alcune Note successive di carattere applicativo o polemico: 1911, *Osservazioni sopra i liquidi circolanti nel terreno agrario*; 1912, *Il terreno forestale*; 1915, *Su alcune pubblicazioni pedologiche sui terreni libici*, svolgono una dottrina pedologica originale, nella quale il Nostro ha certamente data la misura delle perspicacia colla quale sapeva affrontare un grande e discusso problema biologico, della elegante semplicità dei suoi metodi sperimentali e della ingegnosità delle sue interpretazioni. È noto, come, ancora al principio del secolo, le discussioni fra i partigiani della interpretazione fisica e quelli della spiegazione chimica dei rapporti fra terreno e vegetazione, non avessero condotto che alla constatazione dell'insufficienza di entrambe le interpretazioni, senza fornire alcun elemento di una spiegazione nuova, né che combinasse l'influenza delle influenze fisiche con quelle chimiche. Gola ha senz'altro abbandonate le teorie tradizionali e, movendo probabilmente dalla sua esperienza della specificità della reazione dei tegumenti seminali alla penetrazione delle soluzioni saline, acquisita attraverso l'esame diretto di parecchie centinaia di specie, ne ha applicata la conclusione allo studio della distribuzione geografica e della localizzazione stazionale delle specie, della quale le continue osservazioni di campagna gli dimostravano la varietà. La teoria di Gola è fondata infatti su due principi. Il primo è quello dell'esistenza nel terreno di soluzioni circolanti in condizioni di concentrazione molto varia, a seconda della composizione petrografica del suolo, del suo grado di trasformazione chimica e di dilavamento ed anche dell'eventuale liberazione, nel corso delle influenze fisiche degradatrici o della evoluzione della vegetazione soprastante, di corpi in natura colloidale, capaci di formare composti di assorbimento con alcune delle sostanze saline circolanti e di abbassare così la pressione osmotica della soluzione. La nota terminologia di Gola, che distingue i terreni in *aloidi* - altamente mineralizzati ed a pressione osmotica elevata - e *geloidi* - a mineralizzazione e pressione osmotica bassa -, corrisponde al verificarsi di questi due opposti casi. Il secondo concetto è quello del grado di stabilità o di labilità della concentrazione delle soluzioni circolanti; il primo caso è quello dei terreni geloidi, ove la pressione osmotica della soluzione si mantiene sempre bassa e poco variabile - *terreni eustatici* -, il secondo quello dei terreni aloidi, nei quali la pressione osmotica può essere più o meno od anche molto elevata, ma essenzialmente molto largamente e rapidamente variabile, - *terreni anastatici* -. Il primo concetto spiega il meccanismo dei rapporti fra terreno ed organismo vegetale, il secondo definisce il carattere edafico delle stazioni delle singole specie. Non è il caso di insistere qui sui particolari della teoria di Gola, in base alla quale le di-



stinzioni precedentemente in uso di piante calcicole o silicicole, psammofile o pelofile, alicole od umicole, risultano poco corrispondenti al rapporto effettivo fra il terreno e l'organismo vegetale, la qualifica di specie indifferente, così largamente applicata un tempo, perde ogni significato e la differenza di reazione edafica delle specie sotto climi differenti appare giustificata e parimenti spiegabile l'affiancamento, anche molto, stretto, di specie ad appetenze edafiche discordanti, nel mosaico della popolazione di una stessa comunità vegetale. Gola può così essere, a buon diritto, considerato come il primo che in Italia abbia interpretato le comunità vegetali su basi strettamente autecologiche e la sua teoria rappresenta un tentativo riuscito di riprendere l'interpretazione dei rapporti fra piante e substrato e quelli dell'assetto proporzionale degli individui appartenenti alla varie specie nelle popolazioni stazionali, su basi completamente nuove. La teoria osmotica dell'edafismo è stata largamente discussa in Italia soprattutto in confronto alla concezione dell'azione chimica del terreno, è stata adottata in parecchi importanti lavori ecologici, insegnata nei corsi e nei trattati di geobotanica, di agraria, di selvicoltura; all'estero le Memorie di Gola sono state tradotte in larga parte e discusse da Cl. Roux, negli « Annales de la Société Linnéenne » di Lione; da F. Cavers, nel « Journal of Ecology »; ed, anche recentemente (1951), Braun-Blanquet ha ricordato, con un largo cenno nella seconda edizione della sua *Pflanzensoziologie*, che a Gola risale la prima applicazione delle ricerche di chimica colloidale ai problemi geobotanici. Ma il diffondersi, di poco posteriore alla pubblicazione del Nostro, della dottrina dell'acidità del terreno e la sua facile ed estesa applicazione nel campo dell'ecologia e della geobotanica in genere, grazie alla rapida e sufficientemente esatta determinazione del pH edafico, doveva, unitamente al sopraggiunto servizio di guerra, interrompere la sperimentazione di questi problemi, esigenti estesi e ripetuti accertamenti in natura. Non cessarono però mai le meditazioni e le ampie letture del Nostro in proposito, perché Egli si era reso bensì conto dell'interesse della nuova concezione, ma anche del parallelismo sensibile, nel campo dei risultati pedologici, fra le determinazioni osmotriche e quelle jonometriche. Così avvenne che, attratto da altre indagini, e ben presto distratto dagli impegni della cattedra conquistata poco dopo la guerra, Gola non riprendesse in esame diretto, malgrado le numerose sollecitazioni in proposito, la possibilità di un ulteriore sviluppo della sua teoria, neppure dopo che Wiegner (1926) ebbe pubblicato la sua classificazione chimico-colloidale dei terreni. Le conversazioni e la corrispondenza con gli amici autorizzano a considerare come espressione ultima del Suo pensiero in proposito, la frase con la quale Egli chiude il paragrafo dedicato all'edafismo nell'ultima edizione del Suo trattato (1951): *ciascuna di queste tre interpretazioni, la chimica, l'osmotica e l'idrogenionica, ha i suoi aspetti favorevoli ed altri negativi; è più probabile che la soluzione del problema sia, non tanto nelle diverse proprietà nelle soluzioni del terreno quali sono state indicate, quanto nella possibilità che ogni organismo vegetale riceva nella misura sufficiente gli elementi nutritizi che sono necessari al complesso chimismo di ogni specie; e che l'assor-*



*bimento di essi non abbia a dar luogo ad accumuli di materiali superflui che possono agire come tossici* (pp. 429-430).

Più fortunate, sotto l'aspetto della continuazione, sono state le ricerche del Nostro sui composti ematoidi di ferro delle cellule vegetali, pubblicate, immediatamente prima ed immediatamente dopo la guerra, nei Rendiconti dei Lincei: *Sulla presenza nelle piante di composti ematoidi di ferro* (Nota I e II, 1915; Nota III, 1919). La preparazione di Gola ad occuparsi del significato biologico dei composti ferrorganici, risale, come abbiamo veduto, fino agli anni dell'internato di farmacologia ed è poi stata sfruttata già nel corso delle ricerche sulla funzione dei composti di ferro nella respirazione delle piante acquatiche. In queste nuove indagini viene presa in considerazione, da un punto di vista generale, l'azione biocatalitica del ferro nei tessuti delle piante superiori ed il risultato è stato di avere per il primo, accertato l'esistenza di composti ferropirrolici di tipo emina, isolando anche una vera emina e studiandone la localizzazione e l'importanza nei processi respiratorii ed enzimatici. È stato giustamente osservato dal Cappelletti, che la funzione dei composti ferropirrolici nel metabolismo cellulare viene, per lo più, erroneamente attribuita a Fischer ed Helger (1924) ed a Keylin (1925), con palese disconoscenza della priorità di Gola. Per quanto riguarda la funzione enzimatica, Gola si accosta, in massima, all'ipotesi di Bertrand, secondo la quale le proprietà degli enzimi perossidanti sarebbe dovuta al ferro. A suo avviso però si deve ritenere che nelle piante, la funzione perossidasica sia, nel maggior numero dei casi, sostenuta, oltre che da veri e propri enzimi, anche da combinazioni svariate di ferro, probabilmente prodotti di catabolismo di composti più elevati e complessi quali quelli ematoidi, combinazioni per la maggior parte incrostanti la membrana cellulare e che, per il loro stato fisico, sono atte ad agire come catalizzatrici fra le sostanze ossidabili ed i perossidi. Che lo stato fisico debba avere importanza in ciò, è dimostrato anche dalla perdita delle proprietà perossidasiche che si verifica in seguito all'essiccamento.

Al periodo padovano appartengono, quantunque siano stati redatti nei primi tempi del soggiorno a Padova, gli *Studi sul ricambio dei composti ternari nel clima Mediterraneo* (1924), frutto delle osservazioni compiute nel 1920, a Cagliari ed a Monte Argentario, complessivamente su 5000 campioni rappresentanti oltre 500 specie. In una prima Nota l'Autore che, già alcuni anni prima, aveva guidato una tesi (Badalla 1910) sulla saccarofillia nella ibernazione delle sempreverdi nel clima del Piemonte, ha studiato la diminuzione, spinta sino alla scomparsa, dell'amido nelle cellule del mesofillo durante l'estate mediterranea. Questa anamilofillia sta in dipendenza dell'azione combinata della luminosità e della secchezza eccessiva dell'estate mediterranea e si accompagna, oltre che alla riduzione della quantità del pigmento verde, alla comparsa, nel plastidio od in vicinanza di esso, di lipoidi particolari, che, probabilmente, debbono considerarsi come espressione della fatica del cloroplasto stesso. Nella seconda Nota, dedicata ai lipoidi nel sistema assimilatore, viene sostenuto che tali secreti sono

prevalentemente di natura fitosterinica, si formano con tanto maggiore intensità quanto minore è la quantità di acqua di cui dispone la cellula verde, cioè si fanno tanto più abbondanti quanto più secco è l'ambiente e quanto più spiccata l'organizzazione xerofitica della pianta; essi appaiono quindi come risultato della stanchezza del cloroplasto. È possibile che la loro origine vada ricercata nel fitolo clorofilliano e, che formatisi in conseguenza della penuria di acqua nella cellula, possano alla loro volta, servire come materiali di difesa contro il secco; in quanto le sterine hanno la proprietà di associarsi all'acqua in modo straordinariamente stabile. Finalmente nella terza Nota, trattante dell'amido e dei lipoidi nel sistema caulinare epigeo, viene riferito che, nel clima della Sardegna meridionale, le piante legnose, tanto spontanee quanto acclimatate, elaborano, nel corso del ricambio dei composti ternari, amido di riserva, oppure passano attraverso a fasi di produzioni dei polisaccaridi diversi, quasi mai amido. Le specie a caule amilifero trasformano, durante la stagione secca, l'amido in soluzioni concentrate di monosaccaridi (*saccarocaulia*); in altri casi i monosaccaridi subiscono polimerizzazioni o riduzioni analoghe a quelle che sono note come secrezioni di manna. La scomparsa dell'amido non dà luogo alla formazione di grassi in misura tale da poterli considerare come riserve, o, se grassi si riscontrano in alcuni fusti, essi non dipendono dalle alternative stagionali più di quanto non possano esserlo gli accumuli di grassi o di amido nella maturazione dei semi, ma vanno qualificati come sterinolipoidi od anche come fosfolipoidi, aventi il significato di costituenti chimici di cellule fra le più attive dell'organo che si considera e come prodotti dell'attività funzionale delle cellule stesse.

A Padova Gola giungeva nel 1921 accolto dall'aspettativa più cordiale e col sicuro affidamento che il suo indirizzo fisiologico ed ecologico era gradito alla Facoltà e che gli sarebbero stati dati i mezzi per sistemare ed attrezzare il laboratorio e la biblioteca, da lunghi anni specializzati dal suo illustre Predecessore nel senso della micologia sistematica e della storia della Botanica. La necessità tuttavia di mantenere attivo questo centro di consultazione micologica mondiale, anche dopo la scomparsa di P. A. Saccardo, s'impondeva al Nostro che, vi provvedeva senz'altro, non solo prendendo tutte le disposizioni, perché la grandiosa collezione — 18500 specie e 4150 autotipici di miceti in 69000 esemplari — e la biblioteca specializzata, acquistati dall'Università, potessero essere sicuramente conservati ed agevolmente consultati, ma ne redigeva anche un catalogo, contenente, per ogni specie, tutte le indicazioni museografiche indispensabili e ne commemorava l'Autore (1929-1930). Contemporaneamente, sin dal 1925, veniva completamente ordinata e schedata la biblioteca generale dell'Istituto e, con una serie di provvedimenti che dovevano estendersi fino al 1936, senza che il progressivo sviluppo dell'attività scientifica e didattica dell'Istituto subisse ritardi, erano demolite le costruzioni più vecchie e sostituite e completate con nuovi edifici, in modo che la Scuola, i Laboratori e la Biblioteca, assumessero un assetto pratico e moderno. Lo stesso si dica per quanto riguarda la revi-

sione e l'incremento delle collezioni verdi e delle serre ed il rifacimento del relativo impianto idrico, facendo sì che l'intero Istituto, pure conservando il simpatico e monumentale aspetto, acquistasse, in poco più di un decennio, le possibilità funzionali connesse con una organizzazione ed una attrezzatura moderna. Particolare interesse presenta poi la sistemazione e l'arricchimento degli erbarii, che Gola volle ordinati analogamente a quelli torinesi, distinguendovi cioè, a lato di una buona Collezione di consultazione generale, già esistente, ma, che Egli provvide ad aumentare con numerosi acquisti, un Erbario regionale veneto, ottenuto mediante la fusione del nucleo, preesistente nell'Erbario generale, di piante delle tre Venezie, con importanti doni ed acquisti di raccolte private venete, gli Erbarii Forti (1930), Ugolini (1930), Pfaff (1935), Pampanini (1936) ecc. E mi sia lecito ricordare qui, come doveroso omaggio, la collaboratrice, infaticabile per un trentennio, della sistemazione e dell'aumento dell'Erbario veneto, la professoressa Silvia Zenari, immaturamente mancata, per fatale accidente, qualche settimana prima del Maestro, che ne appoggiò per tanti anni l'entusiastica attività di esplorazione floristica della sua Regione, ed alla quale l'Erbario veneto deve l'aumento di decine di migliaia di esemplari raccolti nell'Alto Adige, nel Cadore, nel Comelico, nelle Prealpi Bellunesi, nel Friuli ed in gran parte criticamente studiati. Né minore incremento hanno avuto le collezioni crittogamiche: basti accennare al munifico lascito di Achille Forti, l'Erbario e Biblioteca algologica del quale, oggi, si affiancano degnamente alle collezioni micologiche saccardiane. Grandiosa raccolta legata all'Istituto padovano, come scrive il Nostro, commemorando l'amico, . . . *non come dono, ma come consegna, perché lo strumento di lavoro che Egli aveva preparato con tanta cura, non doveva, né rimanere inerte collezione di museo, né in attesa, spesso remota, di chi potesse di nuovo valersene per gli studi; ma, trasferito in un centro nel quale continuamente giovani intelligenti e volenterosi si avviano alla scienza, deve ritrovare subito chi, riprendendo l'opera rimasta per un momento sospesa per la caducità della vita, se ne valga di nuovo per il progresso del sapere e per le nuove conquiste della scienza.* E gli studiosi italiani sanno che effettivamente, attraverso le collezioni algologiche di Padova, l'opera di De Toni e di Forti continua.

Questa funzione di accantonamento e di conservazione in museo di materiali, non semplicemente tesaurizzati, ma destinati a rientrare sollecitamente nel ciclo della ricerca e la corrispondente larga disponibilità dell'attrezzamento bibliografico e strumentale dell'Istituto, corrispondono alla concezione che Gola aveva della funzione e dei doveri del docente di qualunque grado e delle necessità e dei diritti dell'attività scientifica dei giovani e del pubblico scientifico in genere, resa possibile dalla sua organica ed aggiornata erudizione e dalla ingegnosità di sperimentatore, grazie alle quali Egli poteva rispondere ad una domanda di schiarimenti, discutere originalmente un'opinione, suggerire un ripiego di fronte ad una difficoltà della ricerca, con la sicura competenza e bonarietà del Maestro. Anche nei riguardi degli orientamenti di studio originali degli Assistenti e degli allievi Egli dava prova di



una grande e liberale comprensione ed, occorrendo, sapeva farne una critica serrata, ma non scoraggiante; e nella concessione in studio di dati di cui Egli personalmente disponesse o di materiali inediti, privati o che Egli sapeva esistere in Museo, era di una illimitata generosità. Di ciò può rendersi conto chi conosca la produzione botanica italiana del suo tempo e più, chi abbia seguito, nei quotidiani colloqui, poi nella corrispondenza, durata per un lungo andare di anni, il succedersi continuo nella sua mente di vedute nuove, il lavoro della sua fantasia scientifica incessantemente alimentata dallo studio; e riconosca, vanto massimo di un Maestro, nella produzione scientifica degli allievi, parecchi dei quali oggi sono alla loro volta arrivati alla cattedra, numerosi sviluppi di indagini iniziate dal Maestro o suggerite da Lui e seguite poi da Lui con interesse e con soddisfazione paterna, paga del brillante successo delle creature del suo pensiero e della sua sollecitudine. Per questo Gola è stato apprezzato ed amato da ogni categoria di allievi; ma anche perché, pure disinteressandosi presto degli sconclusionati e dei pigri e soprattutto scartando risolutamente gli elementi presuntuosi ed infidi, Egli, così severo per sé, ha umanamente compatito le intemperanze giovanili, anche nel campo degli studi e si è sforzato di proporzionare il suo insegnamento ad ogni grado di mentalità e di coltura. Così, mentre procurava di preparare i giovani dotati di un ingegno pronto, di capacità di lavoro e di una vera vocazione per gli studi, sia alla carriera scientifica, sia a sperimentare praticamente ed a mettere in opera nel campo delle industrie agrarie od almeno a comprendere i progressi che la tecnica ha diritto di attendere dall'applicazione delle più progredite concezioni teoriche, Egli si asteneva scrupolosamente dal sovraccaricare il corso di Botanica Generale, destinato a fini essenzialmente propedeutici professionali, di nozioni insufficientemente accertate o di teorie astratte o tuttora discusse; fondando cioè l'insegnamento generale su poche idee chiare, su abbondanti dimostrazioni pratiche, su esercitazioni facilmente ricordabili. Ciò appare bene anche dai suoi lavori trattatistici e di divulgazione; dal *Trattato di Botanica* da Lui diretto (1<sup>a</sup>-3<sup>a</sup> edizione 1935-1951), dai libri elementari: *Nel mondo dei viventi* (1937) e dalla sezione « Botanica » degli: *Elementi di Biologia Vegetale ed Animale* (1938), pubblicati in collaborazione con Pasquini, dalle rare, ma limpide conferenze, dal volume *La vita delle piante* (1951), che è stato una delle Sue ultime e non lievi fatiche. Oggi, Egli scrive, nella prefazione di questo ultimo libro, sono numerose le pubblicazioni sulla scienza di avanguardia; questa pubblicazione riguarda meno i problemi di avanguardia che non quelli che sono oggi patrimonio definitivo (se definitiva può dirsi la scienza) delle discipline botaniche; un tempo non erano rare pubblicazioni di tal genere. Oggi si potrebbe dire più nuova una pubblicazione come la presente, che può valere solo a delineare le basi di ricerca e di interpretazione ai futuri studiosi di avanguardia (pag. V.)

A queste preoccupazioni del Direttore dell'Istituto e dell'Insegnante coscienzioso, si aggiunsero ben presto quelle inerenti alle cariche universitarie, attraverso le quali sono passati, fra il consenso generale, la sua carriera



Universitaria ed i suoi rapporti Accademici e Cittadini. Ma è mirabile come ad onta di essi si sia mantenuto attivo e fecondo l'appassionato studioso. Indipendentemente infatti dai temi di ricerca suggeriti ai collaboratori dell'Istituto Padovano, l'attività del pensiero critico dell'erudito e la sua immaginazione scientifica non rimanevano inoperative e ne sono testimonio le Note, sempre stringate, ma dense di pensiero e di vedute originali, risultato di osservazioni ripetute, di lunghe meditazioni, di esperimenti mandati avanti nei ritagli di tempo dei quali Egli poteva disporre per se e dimostranti come, sino ai limiti della sua vita, il carattere teorico, fondamentalmente ecologico della sua mentalità naturalistica, sia rimasto dominante. Tale è la comunicazione fatta nel 1923 alla Società Medico Chirurgica di Padova su: *La teoria del micoplasma e la trasmissione ereditaria delle malattie delle piante*, prospettante l'esistenza, nel mondo vegetale, di forme di vita simbiotiche, mutualistiche od antagonistiche, nelle quali uno dei due simbionti, il meno elevato nella scala vegetale, può assumere forme così semplificate da conservare, solo funzionalmente, gli attributi degli organismi viventi, mentre, morfologicamente, per quanto consentono di stabilire le nostre possibilità tecniche, sembra spogliarsi di tutti quei caratteri che siamo soliti attribuire alla cellula vivente; tale l'articolo: *Sulla membrana dei tessuti fellogenicici delle radici di «Diospyros Lotus» L.* (1924), ove, riferendosi ad una struttura analoga dei tegumenti seminali di talune Centrosperme, studiati da Lui nel 1920, interpreta il fatto della riduzione della membrana suberificata delle cellule del fellogeno ad un sottile strato contiguo alla lamella mediana, mentre il rimanente appare nero, carbonioso e fragile, come un nuovo modo di trasformazione della membrana cellulare con l'acquisto di una particolare resistenza agli agenti chimici esterni, mediante la combinazione della cellulosa con sostanze umiche; tale ancora l'aggiornamento, in forma di rivista, delle nozioni: *Sui lipoidi nelle piante* (1925), con speciale riguardo ai citolipoidi del gruppo degli sterino e cromolipoidi, a proposito dei quali l'Autore espone l'ipotesi che la loro formazione e tutta la loro evoluzione ulteriore, tragga origine dal gruppo fitolico clorofilliano e da una funzione secondaria del cromoplastidio definibile come secrezione interna, in quanto essa non è più legata alle funzioni del ricambio, ma vale come regolatrice di una quantità di funzioni di relazione con l'ambiente esterno. Particolarmente importanti poi e frutto di una lunga preparazione che risale al periodo torinese, nel quale il Nostro ebbe lungamente e criticamente ad interessarsi ai problemi relativi all'azione delle radiazioni luminose ed ultraviolette sui vegetali e sulla tecnica delle indagini relative, nonché programmazione, in questo campo, di una serie di indagini, alle quali l'Istituto Padovano doveva poi contribuire con importanti ricerche dei suoi migliori allievi, sono anzitutto una conferenza tenuta nel 1925 alla XIV Riunione della S.I.P.S. su: *La luce come antagonista della vita vegetale*, conclusione essenziale della quale è che ogni specie vegetale è esattamente adattata ad un fotoclimate che le è proprio, cosicchè i fenomeni di sofferenza debbono venire attribuiti ad anomalie delle condizioni stazionali. Soprattutto l'eccesso di luce riesce nocivo all'organismo

vegetale in caso di carenza di altri fattori ambientali ed essenzialmente dell'acqua; la siccità aggrava sensibilmente la sensibilità dei plastidi ad un eccesso di luminosità. Segue nel 1927 una Nota: *Sulla riflessione di radiazioni ultraviolette per parte di alcuni organi vegetali*, nella quale vengono riferite ricerche eseguite su di una quantità di organi e parte di organi di piante esposti alla luce di Wood e fotografati, oppure fotografati in luce ordinaria ed usando come filtro di luce, un vetro di Wood; tali oggetti riflettono le radiazioni con un comportamento differente da quello delle radiazioni della parte visibile dello spettro. È stato osservato così che i fiori azzurro-violacei (antocianici), che sembrerebbero non dover limitare bruscamente la loro riflessione di radiazioni rifrangibili alla porzione visibile dello spettro, appaiono invece assolutamente assorbenti le radiazioni ultraviolette, mentre il gruppo dei colori gialli, di origine lipocromica, è fortemente riflettente. Le foglie hanno, in generale, un completo potere assorbente delle radiazioni ultraviolette; le foglie lucenti sono riflettenti, ma per riflessione speculare. Esiste poi una relazione fra la diffusione dei tessuti capaci di reagire alle radiazioni ultraviolette e le condizioni proprie degli organismi ai quali tali organi appartengono.

Negli anni successivi, intercalate a lavori di carattere agrario e forestale, sono state pubblicate le ricerche geobotaniche alle quali ho già accennato, sulla Val Maira (Alpi Cozie) e su alcune specie rare per la flora piemontese; poi, verso il limite della carriera, cessate le gravi responsabilità del Rettorato accentuatesi durante il periodo bellico, riaffiorano le testimonianze dell'incessante meditazione botanica proseguita lungo tutto questo tempo e queste vicende e non turbata, neppure allora, dal grave per quanto gradito impegno di organizzazione della Facoltà di Agraria. Tale è la breve, ma sostanziosa sintesi sui: *Problemi di Biologia vegetale della Laguna di Venezia* (1941), nella quale sono prospettati, sulla base dei contributi portati recentemente da Béguinot, Schiffner, Vatova, Minio, alla conoscenza della vegetazione dell'Estuario Veneto, parecchi spunti interessanti di ulteriori ricerche. Assai importante poi è la Nota: *Sulla nutrizione dei meristemi e l'ingiallimento dei tessuti verdi* (1946) nella quale l'A. prospetta il principio, assai importante per la fisiologia del ricambio, che alcuni particolari aggregati atomici si trasferiscano da una cellula all'altra di uno stesso organismo, dopo una limitata disintegrazione, durando assai più a lungo che non le cellule che, per le prime, li hanno formati e migrando dall'una all'altra a costituire il substrato della vita. Si tratta di aggruppamenti che, avendo fatto parte di altre cellule viventi, sono già completamente equilibrati fra di loro e che, senza lasciare speciali scorie, che potrebbero essere dannose alle nuove cellule in via di sviluppo, possono essere rapidamente e completamente assimilati, con un coefficiente di assimilazione elevatissimo, dalle nuove cellule delle quali entrano a far parte. La nutrizione dei tessuti nuovi non ancora differenziati si svolge così nelle piante in modo ben distinto da quanto ha luogo nei tessuti differenziati. I primi abbisognano di alimenti, specialmente di proteine, che abbiano la costituzione molecolare complessa e caratteristica per ogni entità

biologica e non siano quindi denaturati; i secondi invece richiedono composti organici assai più semplici, anzi denaturati sino ad entità molecolari assai piccole, talora fino a composti organici da organicare. Tali composti possono, dopo l'organicazione, esser legati strettamente alle molecole costituenti il plasma primitivo delle cellule e così assimilati fino ad aumentarne la massa; la quale, in un tempo ulteriore, quando per le cellule si inizia la fase di decadenza, va soggetta ad un processo di lisi, formando così, in misura maggiore (corrispondente cioè al patrimonio iniziale della cellula giovane, più quanto essa ha assimilato nel corso della sua attività funzionale), quel materiale non disintegrato che andrà a costruire nuove e più numerose cellule embrionali dell'individuo adulto. Allo stesso anno appartiene la nota presentata alla Pontificia Accademia delle Scienze su: *I materiali igroscopici delle piante e lo sviluppo delle muffe* ove, partendo dalla osservazione che la grande sensibilità all'attacco delle muffe, che si verifica negli organi vegetali essiccati, si manifesta con una certa variabilità, che appare legata allo stato igrometrico dell'aria, l'A. osserva anzitutto che la germinazione delle spore e delle muffe e lo sviluppo successivo del micelio, sono dovuti all'assorbimento di acqua libera. Ora, l'acqua contenuta nei tessuti vegetali, anche se morti, deve essere considerata sotto due distinte forme, l'una legata come materiale assorbito ai tessuti vegetali stessi e come tale non suscettibile di separarsene che come vapore, quando esistano le necessarie condizioni ambientali; l'altra libera, e rappresentante un materiale di imbibizione che può contenere, in misura varia, materiali disciolti, cosicché tali soluzioni possono penetrare nelle cellule vive in conformità delle leggi della permeabilità del plasma vegetale, dominate dal fattore osmotico. L'ulteriore sviluppo dei funghi germinati non può quindi verificarsi che se esiste questa acqua libera. Quanto alle condizioni nelle quali il vegetale disseccato diventa capace di contenere acqua libera, esse sono determinate dalle condizioni idrometriche ambientali. Pure interessante dal punto di vista medico è la comunicazione su: *Il plancton dell'atmosfera e le pollinosi* (1947), interessante saggio critico sulle considerazioni che il botanico deve tenere presenti nell'esame pollinico del plancton aereo e nella scelta dei granuli di polline da impiegarsi nella cutireazione; possibilità di reazione limitata a specie vegetali assai prossime ai luoghi di inalazione, eventuale lunga esposizione dei granuli agli agenti meteorici, eventuale impurezza del plancton pollinico per presenza di materiali estranei al polline, mancanza di attività allergiche di una parte delle specie presenti, presenza nel plancton di polline di specie allo gene acclimatate. L'A. propone poi che, dato che il problema della cutireazione viene complicato dal numero grandissimo di saggi che si debbono eseguire, si riunisca in gruppi un certo numero di pollini in modo da circoscrivere il problema ad un numero limitato di cutireazioni, salvo poi ad affinare il reperto con esami speciali entro il gruppo: propone inoltre che, poiché esistono soggetti ribelli alla desensibilizzazione, si creino rifugi speciali, per esempio isole, ove folti piantamenti di specie vegetali arboree adatte, possano costituire una barriera ai pollini eventualmente sopravvenuti, tali che questi pazienti possano trascor-



vervi la stagione della fioritura. Particolare importanza poi ha la Nota su: *La simbiosi cloromicetica* (1949), l'ultima pubblicazione originale del Nostro e certo una di quelle, fra le sue, che apre più vaste prospettive di meditazione e di ricerca nel campo dell'ecologia. Tre modi distinti hanno le piante verdi per procurarsi le sostanze minerali necessarie al loro metabolismo: un primo modo è quello dell'assorbimento dei sali solubili e circolanti nel terreno allo stato libero, per mezzo dei peli radicali; un secondo tipo è quello dell'assorbimento di sostanze solubili esclusivamente attraverso l'attività di miceli fungini simbiotici, i quali le traggono dall'humus accumulato nel suolo e che è costituito, in gran parte, dai residui organici dalle piante che vi hanno vegetato da moltissimi anni; un terzo tipo è rappresentato dalle piante che mantengono una circolazione fra le parti verdi, in via di accrescimento ed i tessuti di parti morte, rimaste aderenti ed invase da ife miceliari in rapporto con le radici giovani invase dalle micorrize. Gola ha chiamato *cloromicetica* questa simbiosi fra i funghi e le piante verdi ed ha rilevato il rapporto di vicinanza topografica e di comuni esigenze tra le piante semiparassite e le carnivore e quelle a simbiosi cloromicetica e l'estensione ad una gran parte della superficie del Globo del rapporto necessario ed indissolubile fra la vita autotrofa delle piante verdi e quella eterotrofa dei funghi. Del resto questa simbiosi non presenta soltanto un valore trofico e quindi essenzialmente ecologico, ma anche riflessi fisiologici importanti, quali si verificano nei fenomeni di antibiosi dei quali ogni giorno appare maggiore l'estensione e nell'azione antimitotica ed antidistensiva esercitata dai veleni fungini sugli elementi dei tessuti radicali; nonchè nella simbiosi lichenica, caratterizzata dalla incapacità dell'alga, divenuta protetta del fungo, di passare alla fase di moltiplicazione sessuale; e che appaiono parimenti riflettersi sulla fisiologia dello sviluppo e della riproduzione delle piante superiori, con influenze morfogene e fisiologiche. L' A. si chiede, concludendo, se i funghi, che vengono, per lo più, considerati sotto aspetto antitetico a quello della vita delle piante verdi, non sieno invece attivissimi collaboratori della conservazione della vita vegetale superiore su aree che oggi, senza il loro intervento, ne sarebbero prive.

Ho già detto che un gruppo speciale dei lavori posteriori al trasferimento del Nostro a Padova, merita una particolare menzione; gruppo di ricerche suggerite dalla intelligente e continua attenzione prestata dal Gola alle questioni agricole e forestali, così intimamente connesse colla economia delle provincie venete. La sua tradizione familiare, l'attenzione prestata durante il periodo torinese ai lavori di quella antica Accademia di agricoltura, nella quale il Nostro è stato Direttore dell'Orto sperimentale ed è rimasto Socio emerito, la Sua competenza di fisiologo vegetale sulle reazioni biologiche dell'organismo vegetale alle condizioni climatiche ed alle modificazioni artificiali del chimismo del suolo e soprattutto la Sua tendenza a considerare l'agricoltura come una fonte incomparabilmente ricca e vasta per il Naturalista, di osservazioni e di esperimenti di ecologia vegetale, dovevano presentare la collaborazione con



gli agrari e i forestali come un interesse ed un dovere. Gola ha tracciato programmaticamente la via di questo intimo connubio fra la pratica rurale e la biologia vegetale nell'interesse reciproco delle due attività, nel discorso di inaugurazione dell'anno accademico 1929-30, animato dalla coscienza che la sua collaborazione ed il suo consiglio avevano già cominciato ad essere apprezzati dagli agricoltori e dai frutticoltori delle province venete, che non gli lesinarono mai, col consenso, anche i mezzi per l'eventuale sperimentazione; ed io non posso a meno che riportare qui un vivace profilo di questi rapporti, del quale sono grato al nostro collega Tonzig, per tanti anni fedele collaboratore ed oggi brillante continuatore nella Sua Scuola, della parte più caratteristica dell'opera del Maestro. «Colla Cattedra ambulante di Agricoltura, poi con l'Ispettorato agrario succeduto ad essa, Gola aveva rapporti molto stretti, nel senso che, per ogni problema, per ogni dubbio, per ogni difficoltà da risolvere, sempre più spesso ricorrevano a Lui, interpellandolo per avere spiegazioni, indicazioni, previsioni e persino direttive di ogni genere. Era invalsa l'abitudine, divenuta pressoché quotidiana, di prospettargli ogni tipo di questione che avesse relazione con la vita delle piante. Egli se ne occupava volentieri, discuteva, insegnava, sperimentava e si appassionò sinceramente e sempre intensamente a tale tipo di problemi, persuaso di non avere il diritto di estraniarsi dalle questioni pratiche alla cui soluzione la sua preparazione e la sua sensibilità potevano efficacemente contribuire. Egli affrontava ogni richiesta con la massima serietà e si può dire che, sino a che rimase alla direzione dell'Istituto, non cessò di sperimentare su questioni agrarie che lo affascinarono, perchè a Lui particolarmente adatte: rapporti fra piante e terreni, possibilità di modificare opportunamente le proprietà fisiche del terreno, rapporti tra resistenza, resa e sviluppo delle piante da una parte e, dall'altra, struttura del terreno, possibilità di padroneggiare le piante, intervenendo con concimazioni chimiche opportunamente scelte, sia nei riguardi della qualità, che in quelli della quantità ecc. Ma Egli non sdegnava di essere utile anche per problemi del tutto diversi, come quello del riconoscimento delle varietà di pesca dalla morfologia dell' "Osso" ... insomma egli mise sempre volentieri la sua dottrina e la sua sensibilità di sperimentatore a servizio della problematica agraria, non per abitudine di cortesia verso gli interpellanti, non con la superficialità di chi intenda, con la sua risposta, chiudere la questione, ma con la coscienza e la sensibilità del fisiologo che traeva, da questioni anche banali, motivo di riflessione e di sincero interesse, enucleando problemi vivi di schietto interesse da ogni traversia della pratica agraria, problemi sui quali Egli poi indagava e sperimentava fino a chiarirne il fondamento teorico. Per questo Egli affascinò tanti agricoltori, fossero essi tecnici ufficiali o capitani d'industria, col suo dotto entusiasmo». (Tonzig. *in litteris*).

Questa è stata la trama della vita padovana di Gola e l'occasione di quelle pubblicazioni, apparse nell'ultimo trentennio nella sua vita di studioso, che possono essere considerate come documenti dell'intima armonia e del reciproco profitto fra la speculazione biologica e la consulenza tecnica, alle

quali si è accennato. 1925: *Sopra alcuni ibridi fra Pinus Pinaster, P. halepensis e P. brutia dei dintorni di Grado*. Le dune di questa località dell'estuario veneto, sono state rimboschite da alcuni decenni con piantagioni di queste tre specie di pino, che vi hanno vegetato rigogliosamente, dando luogo allo sviluppo di un'abbondante novellame già in completa riproduzione e nel quale si possono distinguere numerosi ibridi tra le tre specie. 1928: *Osservazioni sui danneggiamenti delle piante legnose della regione veneta in seguito ai freddi dal gennaio-febbraio 1928*. Studio anatomo-patologico delle lesioni constatate sulle piante esotiche conservate nell'Orto Botanico e nei giardini della città, ma anche su quelle delle culture di peschi e di viti della regione, in seguito all'azione del gelo. 1929: *Il problema nazionale dell'alimentazione ed il contributo della biologia vegetale*. È il discorso inaugurale dell'anno accademico, già citato, documentazione serrata dei servizi che la Biologia vegetale può rendere all'economia rurale e della considerazione in cui essa deve essere tenuta dagli agricoltori e dai forestali. 1930: *Osservazioni sopra l'azione fisiologica delle irrorazioni cupriche sulle bietole da zucchero*. Interpretazione dell'aumento della percentuale zuccherina consecutivo al trattamento cuprico delle culture di barbabietola invase da *Cercospora viticola*: sviluppo più rigoglioso delle piante, limitazione dei danni del parassita, concentrazione zuccherina conseguentemente aumentata anche in seguito alla accresciuta resistenza al secco dell'apparato vegetativo ed alla conseguente prolungata attività dei tessuti assimilatori. 1930: *I nuovi sistemi di granicoltura dal punto di vista della fisiologia vegetale*. Giustificazione, documentata anche morfologicamente, della tecnica delle concimazioni invernali e della coltivazione delle razze precoci ottenute dallo Strampelli, in quanto, anche nel corso dell'inverno, si verifica un assorbimento dei nitrati e si accumulano nelle giovani piante nitrati, fosfati e sali potassici, cosicché la concimazione fosfonitrica precoce determina, già nelle fasi embrionali, il numero degli abbozzi florali della spiga e quindi quello delle cariossidi della spiga matura. 1931: *Le condizioni naturali della provincia di Padova in rapporto con la vegetazione spontanea e coltivata*. Quadro dei rapporti ecologici nell'ambiente geofisico padovano col suo rivestimento vegetale e dimostrazione della necessità che di essi debba venir tenuto conto nei provvedimenti a vantaggio delle economie rurali. 1931: *L'albero*. Conferenza di propaganda forestale illustrante la sensibilità dell'assestamento naturale delle comunità arboree e l'aumento di labilità della copertura arborea nelle regioni soggette all'azione permanente dell'uomo; ed affermante la necessità che, tanto le norme dello sfruttamento forestale, quanto, quelle della ricostruzione delle foreste distrutte, siano conformi alle esigenze ecologiche delle comunità arboree. 1933: *Criteri per una sistemazione e descrizione delle principali varietà di pesco nella provincia di Padova*. 1935: *Necessità di una limitazione delle varietà coltivate di pesco, adattandole alle condizioni ambientali*. 1936: *I caratteri delle principali varietà di pesco coltivate nella regione veneta*. Applicazione di criteri sistematici rigorosi alla revisione ed alla descrizione, classificazione e selezione delle razze di pesco coltivate nel Veneto, con lo scopo di mettere ordine nella

confusione delle forme colturali, raggruppandole attorno a tipi sicuramente riconoscibili, che l'A. ha caratterizzati fondandosi sui caratteri dell'endocarpo; e ciò ai fini di una più rigorosa scelta delle forme adottate per la cultura e della conservazione dei tipi preferiti sul mercato. 1938: *I fondamenti biologici dell'agricoltura italiana*. Relazione presentata alla XXVII Riunione della S.I.P.S. a Bologna, ove, dopo aver passato in rassegna i fattori che dominano lo sviluppo delle piante in Italia, temperatura, disponibilità di acqua, terreno, l'A. conclude che, quando si vogliano stabilire i fondamenti biologici dell'agricoltura italiana, più che fermarsi a considerare le eventuali possibilità di modificare le condizioni d'ambiente, convenga esaminare le possibilità di far vegetare le piante a nostro vantaggio negli ambienti quali sono e quali non li possiamo sostanzialmente mutare. Ora, poiché, in ogni specie coltivata, possiamo praticamente riconoscere una moltitudine di razze preadattate a condizioni stazionali assai diverse, è lecito contare sulla possibilità di utilizzare una grande varietà di forme e di metodi di coltura e di ricorrere ai progressi della genetica e della selezione delle razze per soddisfare alle richieste dell'economia rurale. Necessità fondamentale per l'agricoltura italiana è quindi una completa revisione ed elencazione delle razze culturali più diffuse ed apprezzate o rispondenti a particolari esigenze nei vari climi d'Italia, delle caratteristiche biologiche di ciascuna di esse, perché il valore e l'utilizzabilità ne possano venire rapidamente stabilite e confrontate; inventario fondato sulla critica identificazione delle varie entità culturali e sull'accertamento della loro purezza e costanza. 1942: *Proposta circa un giardino alpino al Bondone sopra Trento*. Alla protezione ed alla valorizzazione della flora delle nostre montagne, sia dal punto di vista dell'indagine scientifica, sia da quello della economia delle popolazioni alpine e della protezione delle piante medicinali, il Nostro ha già dedicato, in ogni tempo, una attiva propaganda; basti citare un sostanzioso e programmatico articolo: *Sulla protezione o la valorizzazione della flora delle nostre montagne*, comparso nel 1928 nella «Gazzetta di Venezia». In questa Nota, dopo aver ripreso in generale la questione, è illustrata la possibilità di una sua attuazione pratica, prospettando i vantaggi della creazione di un giardino alpino nella località del Bondone, ove, oltre al giardino, l'ampio spazio disponibile concederebbe l'esecuzione di vasti esperimenti di conservazione della vegetazione montana, di manutenzione e ricostruzione dei pascoli e così via.

Questi, molto sommariamente, i punti più salienti ed i risultati della collaborazione del Nostro, non soltanto nell'ambiente universitario, ma anche in quello agrario di Padova; opera di scienza, di insegnamento, di civismo, mandata avanti per i trent'anni della sua bene vissuta vita padovana. Ed il riconoscimento di questa attività lo ha continuamente accompagnato come un'aureola di stima e di simpatia. Che, se le accoglienze al Suo arrivo in quella che doveva diventare la sua Città, furono oneste e cordiali, quali potevano essere tributate ad un giovane Maestro che aveva già dato seria prova di sé, il pieno consenso e la spontanea, riconoscente approvazione, accompagnarono e confortarono lo svolgimento di tutta l'opera sua, trovando



la loro espressione nella successiva sua attribuzione a cariche ed a posizioni di sempre più elevata responsabilità. Così Egli è stato presidente dell'Accademia di Scienze e Lettere di Padova dal 1941 al 1947, presidente dell'Istituto Veneto di Scienze e Lettere ed Arti negli ultimi anni della Sua vita; e soprattutto ha percorso, sino al più elevato, tutti i gradi della carriera accademica, amministratore signorile e sagace e, di fronte alla violenza, assertore intrepido della dignità e dei diritti del suo Ateneo. E Padova gli ha detto la sua simpatia e il suo affettuoso ringraziamento, festeggiando nel 1947, il suo settantesimo anniversario e il quarto secolo della vita del suo Istituto. Tre commoventi date sono rimaste collegate ai ricordi della mia lunga vita universitaria: 1902: le onoranze della Botanica italiana a Giuseppe Gibelli, da poco scomparso, inaugurandosi il Suo busto nell'Istituto Botanico del Valentino; 1929: le onoranze ad Oreste Mattiolo nell'Aula Magna dell'Università di Torino, affollata dai più eletti rappresentanti della cittadinanza e da una folla di studenti ed amici, accorsa per celebrare i duecentesimo anniversario della fondazione dell'Orto del Valentino ed il settantesimo anniversario del Suo Direttore; 1947: le onoranze a Giuseppe Gola, nel IV Centenario dell'Orto di Padova e del Suo settantesimo compleanno, svoltesi davanti ad una assemblea plaudente e riconoscente, di Autorità, di colleghi, di allievi, di amici. L'abituale, intima modestia non deve avere impedito al Nostro di provare un sentimento di orgoglio, ripensando, in quel momento, alla tradizione di una nobile scuola, della quale Egli ha portato valorosamente avanti la fiaccola trasmessagli dai suoi Maestri, con l'opera sua e coll'aver creato allievi capaci di continuarne il progresso. *Quasi cursores vitae lampada trahunt.*

La vita è un seguito ininterrotto di piccoli doveri quotidiani, la scienza, procede coordinando senza posa una successione di piccoli contributi alla verità; le grandi azioni, le grandi scoperte scientifiche, sono momenti eccezionali, privilegio eccelso, ma anche fortunato, di pochi Eletti. Nella vita di Gola non sono mancati i momenti in cui Egli ha saputo mostrare di non essere inferiore a nessun compito, a nessun dovere, a nessun problema; ma Egli ci ha lasciato, in più, l'esempio, assai più difficile, dell'esecuzione silenziosa, lineare del compito di ogni giorno, della perfetta coerenza ad un dovere ed a un ideale. « Era diritto – trascivo qui alcune righe che Salvatore de Madariaga ha recentemente dedicate ad un Uomo eminente – diritto, non come la spada fabbricata per essere tale, ma come lo zampillo che s'alza verso il cielo e si rinnova ad ogni millimetro, ad ogni secondo. Diritto non per metodo, per tattica, per incapacità di essere altro, ma con tutta la leggerezza, l'intenzione, la sorpresa di una dirittura di spirito, che resta tale sotto tutte le sue forme ». Gola era così. Del resto Voi l'avete conosciuto e, mentre vi parlo, rivedete qui, con me, la sua figura alta ed asciutta, lo sguardo mite ed arguto, ascoltate la sua voce calma, un po' velata, esprimere con la consueta limpidezza opinioni e giudizi acuti, sensati e probi. Questa è l'immagine, che si riflette su tutta l'azione sua e che conserveremo; ed in questo consenso



di affetto e di stima, troverà la sua pace il cocente dolore dei famigliari, si colmerà il vuoto che perdura nel cuore degli amici, si inquadrerà il risultato delle sue ricerche nel patrimonio scientifico. Perché il durare nella memoria degli uomini come una serena tradizione, il premio di una vita esemplare quale è stata quella di Giuseppe Gola; vita saggia, vita benefica, vita onesta.

### PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Giancarlo Vallauri della Categoria III - Sezione Fisica - e del Socio Corrispondente Guido Ascoli della Categoria I - Sezione Matematica - deceduti entrambi a Torino, rispettivamente il 7 e il 10 corrente.

Il prof. Giordani, dopo aver elevato un pensiero di reverente omaggio alla memoria dei due insigni Colleghi scomparsi, ricorda brevemente, con commosse parole, i vincoli di antica amicizia e di profondo affetto che lo legavano a Giancarlo Vallauri, esempio nobilissimo di scienziato, di maestro e di cittadino.

Il Presidente dà poi la parola al Socio Negri che rievoca la figura e l'opera del compianto Collega Giuseppe Gola.

Il Presidente ringrazia il prof. Negri per la sua elevata orazione e rinovva ai familiari del Socio Gola, presenti all'adunanza, l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'illustre Collega.

### PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta i seguenti plichi suggellati:

a) Plico del prof. Riccardo Cestari, consegnato all'Accademia l'8 maggio corrente anno, contenente, come risulta da una annotazione sulla busta, uno studio dal titolo « Risoluzione della diofantea  $X^Y - Z^T = 1$  ».

b) Plico del dott. ing. Teodorico Cincis, pervenuto all'Accademia il 10 maggio corrente anno, contenente, come risulta da una lettera del predetto ingegnere, uno studio di argomento astronomico dedicato a una nuova concezione cosmologica.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che i suddetti plichi siano trasmessi all'archivio accademico, ove saranno conservati a disposizione degli interessati.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio D'Ancona presenta il volume III delle « Memorie di Biogeografia Adriatica », da lui curate, e pubblicate, con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, dall'Istituto di Studi Adriatici, che fa seguito ai due precedenti volumi già offerti all'Accademia.

Il predetto Socio mette in evidenza come tale opera affronti, in una visione d'insieme, l'esame faunistico delle terre periadriatiche e rappresenti un importante contributo alle ricerche biogeografiche che oggi acquistano rinnovato interesse alla luce delle moderne concezioni evoluzionistiche e di genetica di popolazioni.

Il Presidente ringrazia il Socio D'Ancona.

Il Segretario Accademico illustra le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio Panichi presenta una sua Memoria dal titolo « Osservazioni di cristallografia armonica ». Detta Memoria sarà sottoposta al Consiglio di Presidenza per l'approvazione della spesa.

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Perucca, Solaini, Sansone, Quilico, Cambi, Colonnetti, Montalenti, Pupilli, Armellini, Giacomello, Aloisi e G. Bompiani.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L. — Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di stimoli chimici (pres. dal Socio G. C. PUPILLI).

FORTINI T., CAPRIOLI G. e GIALANELLA C. — Sopra la cometa Arend e Roland (1956  $\frac{1}{2}$ ) (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F. — I citocromi dei cefalopodi (pres. dal Corrisp. G. MONTALENTI).

GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F. — Il sistema Fenolasi — chinone riduttasi nei cefalopodi (pres. dal Corrisp. G. MONTALENTI).

## CONGRESSI

Il Presidente comunica che nel luglio p. v. avrà luogo a Lisbona il VII Congresso della « Association Internationale de Recherches Hydrauliques » mentre, a Francoforte sul Meno, si svolgerà, dal 31 maggio all'8 giugno 1958, il XII Congresso Esposizione per l'apparecchiatura chimica e rivolge preghiera a quei Colleghi, che intendessero partecipare alle suddette manifestazioni, di voler rappresentare l'Accademia.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta dell'II maggio 1957*

D'ANCONA Umberto. — Vedi: ISTITUTO DI STUDI ADRIATICI.

EXELL A. W. e MENDONÇA F. A. — *Conspectus Florae Angolensis*. Vol II, fasc. 2°: [Balsaminaceae], Leguminosae, Caesapi-  
noideae Mimosoideae. Lisboa, Ministério  
do Ultramar, 1956. Pp. 170, in-8°, con figg.

GUBERLET Muriel Lewin. — *Seaweeds at Ebb Tide*. Seattle, University of Washing-  
ton Press, 1956. Pp. XVI-182, in-8°, con  
figg.

GUTENBERG Beno. — *Comparison of seis-  
mograms recorded on Mount Wilson and  
at the Seismological Laboratory, Pasadena*.  
Estr. da «Annales de Géophysique»,  
vol. XII, 1956, n. 3.

— *Effects of Ground on Shaking in Ear-  
thquakes*. Estr. de «Transactions of the  
American Geophysical Union», vol.  
XXXVII, 1956, n. 6.

— *Great Earthquakes 1896-1903*. Estr. da  
«Transactions, of the American Geophysi-  
cal Union», vol. XXXVII, 1955, n. 5.

— *Verschiebung der Kontinente, eine kriti-  
sche Betrachtung*. Estr. da «Geotekto-

nisches Symposium zu Ehren von Hans  
Stille».

ISTITUTO DI STUDI ADRIATICI. — *Memorie  
di biogeografia adriatica*. Pubblicate con il  
contributo del Consiglio Nazionale delle  
Ricerche a cura di Umberto D'Ancona.  
Vol. III. Venezia, 1957. Pp. 298, in-8.

MAYNARD H. B., STEGEMERTEN G. J. and  
SCHWAB J. L. — *Lo studio dei metodi di  
lavorazione e la determinazione dei tempi*.  
Milano, Ed. di Comunità, 1955. Pp. VIII-  
318, in-8°, con figg.

*Onoranze a Mauro Picone. La cerimonia  
del 15 gennaio 1956*. A cura del Comitato  
per le onoranze. Roma, 1956. Pp. 80,  
in-8°, con figg.

SCHWAB J. L. — Vedi: MAYNARD H. B.,  
STEGEMERTEN G. J. and SCHWAB J. L.

SMITH G. E. Kidder. — *L'Italia costruisce*.  
Sua architettura moderna e sua eredità  
indigena. Milano, Ed. di Comunità, 1955.  
Pp. 264, in-4°, con figg. e tavv.

STEGEMERTEN G. J. — Vedi: MAYNARD  
H. B., STEGEMERTON G. Y. and SCHWAB  
J. L.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 6 giugno 1957*

*Presiede il Presidente* FRANCESCO GIORDANI

---

## NOTE DI SOCI

**Fisiologia.** — *Resistenza alle alte accelerazioni di animali immersi in acqua*<sup>(\*)</sup>. Nota di RODOLFO MARGARIA, TORQUATO GUALTIEROTTI e DOMENICO SPINELLI, presentata<sup>(\*\*)</sup> dal Socio R. MARGARIA.

L'ipotesi che le forze di accelerazione<sup>(1)</sup> possano venire annullate immergendo un corpo in un mezzo di uguale densità (Margaria 1953<sup>(2)</sup>) è stata sottoposta a controllo sperimentale su animali acquatici e terrestri.

Piccoli pesci (*Gambusia Hoolbrocki*) sono stati sottoposti a centrifugazione in una comune centrifuga da laboratorio di 15 cm di raggio ruotante a 4000 giri in 1 min per un massimo di 10 min: in queste condizioni l'accelerazione aveva un valore di circa 3.000 g (1 g = 9,80 m/sec<sup>2</sup>). Allo stesso trattamento vennero sottoposte piccole rane del peso di 20 grammi.

Immediatamente dopo la centrifugazione pesci e rane mostravano una evidente perdita dell'equilibrio, nuotando rovesciati con movimenti eli-

(\*) Dal Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) Si intende per *forza di accelerazione* la forza

$$f = (m_1 - m_2) a$$

alla quale è sottoposto un corpo di massa  $m_1$  immerso in un fluido, essendo  $m_2$  la massa del fluido spostato dal corpo, quando il sistema subisce una accelerazione  $a$ .

(2) R. MARGARIA, *La condizione di subgravità e la sottrazione dall'effetto delle accelerazioni*, « Riv. Med. Aeron. », 16, 469 (1953); *On the functions of cerebrospinal fluid*, « Exp. Med. Surg. », 11, 297 (1953).



coidali. Questa alterazione dell'equilibrio è verosimilmente da imputare al distacco degli otoliti dall'ampolla, che, come è stato controllato istologicamente, si osserva in tutti gli animali trattati. La soglia per il distacco dell'otolite si aggira sui 150 g applicati per 1 min. In queste condizioni circa l'80 % dei pesci e delle rane riportavano distruzione del sistema otolitico.

Tutti i pesci sottoposti a questo esperimento morirono dopo circa 24 ore, verosimilmente per inanizione dovuta ad incapacità ad afferrare il cibo sospeso nel mezzo ambiente: infatti animali di controllo non centrifugati e tenuti in acqua distillata arricchita dei sali contenuti nell'acqua comune, venivano a morte nello stesso tempo.

Le rane invece erano in grado di riprendere il loro senso di equilibrio in circa 2 settimane, probabilmente sopperendo con la vista alla perdita del sistema otolitico.

Oltre a questo fenomeno, a carattere permanente, altri a carattere temporaneo sono stati osservati tanto nei pesci che nelle rane: questi consistevano essenzialmente in una iperemia in alcuni organi o parte del corpo, verosimilmente in quella più distale, e ischemia in altri. Tale fenomeno era evidente soltanto immediatamente alla fine della centrifugazione, e scompariva in un paio di ore.

Nei pesci a volte la vescica natatoria protrudeva in un rigonfiamento nella regione ventrale del corpo, senza però che ci fosse lacerazione di tessuto. Tale fenomeno scompariva dopo pochi minuti dalla cessazione della centrifugazione.

Nei mammiferi l'accelerazione veniva ottenuta arrestando in un determinato spazio l'animale che veniva lasciato cadere liberamente da un'altezza di 9 m avendo raggiunto una velocità di 14 m/sec (50,4 km/ora). In queste condizioni la durata dell'accelerazione non era che di una frazione di secondo, da 14 msec essendo l'accelerazione 100 g a 0,14 msec essendo l'accelerazione 10.000 g.

Vennero scelti come animali da esperimento topi di piccola taglia che immediatamente prima della caduta venivano posti in una robusta bombola d'acciaio piena d'acqua aperta in alto e questa lasciata cadere su una lastra di ferro cementata al suolo, sulla quale venivano posti vari fogli di piombo 1 o 2 mm di spessore: la bombola poteva così essere arrestata nello spazio voluto. L'animale veniva rimosso dalla bombola subito dopo la caduta, e la sua permanenza in acqua non era che di pochi sec.

La fig. 1 mostra la percentuale di sopravvivenza e di mortalità di gruppi di 10 animali immersi in una colonna d'acqua a profondità variabile da 5 a 30 cm. Animali di controllo posti nella bombola senza acqua, e lasciati cadere muoiono a valori di accelerazione di ca 100 g.

Gli animali a 5 cm di profondità nell'acqua soccombono, come risulta dalla tabella, ad accelerazioni di circa 1,100 g, hanno cioè una resistenza circa 10 volte maggiore degli animali non immersi in acqua. La resistenza di questi animali alle accelerazioni è tuttavia notevolmente inferiore a quella degli animali acquatici e ciò è da imputare verosimilmente alla presenza

di organi che hanno un peso specifico notevolmente differente da quello del liquido ambiente: questi organi sono rappresentati essenzialmente dai polmoni. L'aria in essi contenuta viene sollecitata in direzione opposta al movimento secondo una forza proporzionale alla accelerazione alla quale l'animale è sottoposto, al volume dell'aria e alla differenza di densità fra aria e acqua.

L'esame dell'animale *post mortem* ha confermato la presenza di estese lesioni emorragiche polmonari con lacerazioni del tessuto parenchimale e dei vasi, sufficienti a dar ragione della causa di morte.

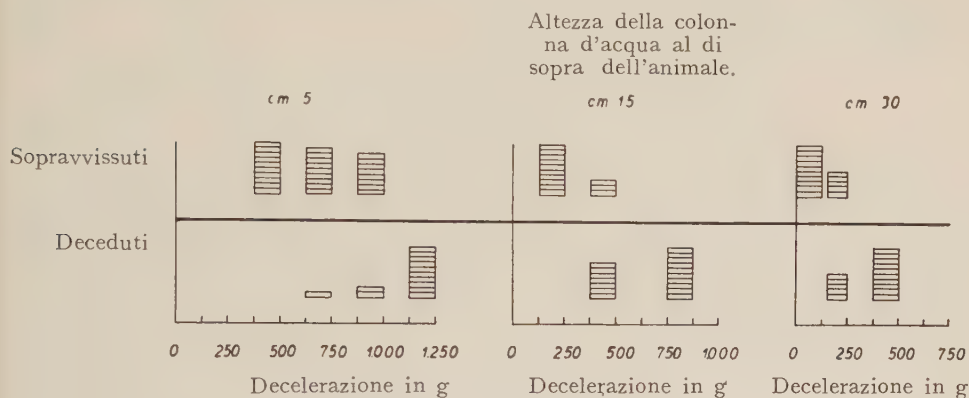


Fig. 1. - Rappresentazione grafica della distribuzione di sopravvissuti e deceduti in rapporto all'accelerazione (inscritta sulle ascisse) in gruppi di 10 topi. Ogni animale è rappresentato da un rettangolino e il numero dei sopravvissuti o deceduti è rappresentato dall'altezza della colonna.

I tre settori raffigurano gli esperimenti eseguiti essendo gli animali a 5 cm di profondità (a sinistra) a 15 cm (in mezzo) e a 30 cm (a destra). Il 50% degli animali sopravvive nel primo gruppo a ca 1.100 g; nel secondo a circa 400 g e nel terzo a circa 250 g. Animali di controllo, non immersi in acqua (non rappresentati in figura), sono deceduti tutti a 100 g.

Come si vede dalla tabella, un elemento importante è costituito dalla altezza della colonna d'acqua al di sopra dell'animale; infatti la resistenza all'accelerazione diminuisce aumentando la profondità di immersione. Ciò è dovuto probabilmente all'effetto di schiacciamento che la colonna d'acqua, il cui peso aumenta proporzionalmente all'aumentare dell'accelerazione, esercita sul corpo dell'animale, specialmente sulla gabbia toracica.

Non sembra che nei topi si osservino alterazioni otolitiche, probabilmente per il tempo assai breve di esposizione alle alte accelerazioni.

Poiché dagli esperimenti suddescritti risulta evidente che la causa di morte è costituita dalla grande differenza di peso specifico tra il tessuto polmonare pieno d'aria e il resto del corpo dell'animale, appariva presumibile che feti a termine degli stessi animali, non contenendo aria nei polmoni avrebbero avuto una molto maggiore resistenza alle accelerazioni: femmine di topo gravide vicine a termine furono perciò soggette ad accelerazioni di 10.000 g con la tecnica su descritta. In queste condizioni la madre moriva istantaneamente, mentre i feti, recuperati dal corpo della madre immedia-

tamente dopo la caduta, e allattati da altra madre, sopravvissero senza dimostrare alcuna lesione.

Gli stessi risultati si sono ottenuti in esperimenti nei quali all'acqua veniva sostituita una soluzione di acqua e glucosio di densità fino a 1,3.

In conclusione si può affermare che un animale immerso in acqua è in grado di sopportare un'accelerazione fino a circa 10 volte superiore che quando sia in aria. L'unico limite esistente a questa resistenza alle accelerazioni è costituito dalla presenza di parti del corpo a peso specifico assai diverso dal resto, quali particolarmente importanti i polmoni a causa del loro contenuto in aria, e gli otoliti a causa del loro alto peso specifico rispetto all'endolinfa nella quale sono immersi.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse.* Nota di GAETANO FICHERA, presentata (\*) dal Socio F. SEVERI.

Sia  $A$  un campo limitato dello spazio cartesiano  $S_{2n}$  delle  $2n$  variabili reali  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ . Indicata con  $\Sigma$  la frontiera di  $A$ , che supporremo costituita da un unico continuo, ci occuperemo in questa Nota delle condizioni necessarie e sufficienti alle quali deve soddisfare una funzione complessa  $w$  del punto variabile su  $\Sigma$  perché essa sia la *traccia* su  $\Sigma$  di una funzione  $W(z_1, \dots, z_n)$  delle  $n$  variabili complesse:  $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$  olomorfa in  $A$ .

È noto <sup>(1)</sup> che nel caso  $n = 1$ , supposta  $\Sigma$  una curva di Jordan rettificabile, la funzione  $w(z)$  definita e continua su  $\Sigma$  è ivi la traccia di una funzione  $W(z)$  della variabile complessa  $z = x + iy$  olomorfa in  $A$  e continua in  $A + \Sigma$ , allora e allora soltanto che riesce:

$$(I) \quad \int_{\Sigma} w(z) z^v dz = 0 \quad (v = 0, 1, 2, \dots).$$

Per  $n > 1$  il problema è stato completamente risolto da Severi <sup>(2)</sup>, supponendo  $\Sigma$  una ipersuperficie analitica, cioè rappresentabile localmente mediante funzioni analitiche di  $2n-1$  parametri reali  $t_1, t_2, \dots, t_{2n-1}$  e assumendo la  $w$  funzione analitica dei parametri locali  $t_1, t_2, \dots, t_{2n-1}$ , il che equivale a supporre che nei punti di  $\Sigma$ , contenuti in un intorno di ogni prefissato punto  $(x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$  di  $\Sigma$ , la  $w$  sia la somma di una serie  $2n$ -pla di potenze nelle variabili  $x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, \dots, x_n - x_n^0, y_n - y_n^0$ .

(\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) Cfr. [21], [22]. I numeri fra parentesi quadra rimandano alla Bibliografia alla fine del presente lavoro.

(2) Cfr. [16], [17]. Cfr. anche [18] e la Bibliografia ivi citata.

Egli fonda la Sua trattazione su un procedimento da Lui istituito e chiamato *metodo del passaggio dal reale al complesso* e perviene a compiutamente dimostrare che, nelle ipotesi assunte, la condizione, necessaria e sufficiente, cui deve soddisfare la  $w$  per essere la traccia su  $\Sigma$  di una  $W(z_1, \dots, z_n)$ , funzione olomorfa delle  $n$  variabili complesse  $z_1, \dots, z_n$  in  $A$ , è che in ogni punto di  $\Sigma$  si abbia per tutti i seguenti determinanti jacobiani:

$$(2) \quad \frac{\partial (w, z_1, \dots, z_n)}{\partial (t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_{n+1}})} = 0$$

essendo  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$  una disposizione di classe  $n+1$  degli indici  $1, 2, \dots, 2n-1$ .

Un'altra dimostrazione di questo risultato di Severi è stata data, per  $n=2$  da Fubini<sup>(3)</sup>, sempre nelle ipotesi di analiticità per  $\Sigma$  e  $w$  assunte da Severi.

Durante le lezioni del Corso da Lui tenuto all'Istituto di Alta Matematica nel corrente anno accademico, il prof. Severi ha posto il problema di caratterizzare la traccia su  $\Sigma$  di una funzione  $W(z_1, \dots, z_n)$  olomorfa in  $A$ , prescindendo dalle ipotesi di analiticità anzidette per  $\Sigma$  e  $w$ , e, in particolare, di dare del suo teorema, espresso dalle equazioni (2), una dimostrazione fondata esclusivamente su quelle sole condizioni di regolarità per  $\Sigma$  e  $w$  che consentono di dar senso al primo membro delle (2).

Ad una tale ricerca è appunto dedicata la presente Nota.

Perverremo, nel caso di  $n$  qualsiasi e in ipotesi abbastanza generali per  $\Sigma$  e  $w$ , a indicare le condizioni necessarie e sufficienti di tipo integrale, atte a caratterizzare la traccia su  $\Sigma$  di una funzione olomorfa di  $z_1, \dots, z_n$  in  $A$ <sup>(4)</sup>.

(3) Cfr. [7].

(4) Semplici considerazioni di Analisi funzionale dimostrano che la traccia  $w$  su  $\Sigma$  di un funzione  $W(z_1, \dots, z_n)$  olomorfa in  $A$  è caratterizzata da un insieme numerabile di condizioni integrali per la  $w$ . Infatti, assunte per  $\Sigma$  le ipotesi specificate all'inizio del n. 1, si consideri lo spazio funzionale  $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$  ( $p > 1$ ) costituito da tutte le funzioni complesse, misurabili e di modulo di potenza  $p$ -esima sommabile, definite in  $\Sigma$ , normalizzato al modo consueto:

$$\|w\| = \left( \int_{\Sigma} |w|^p d\sigma \right)^{1/p} \quad (d\sigma = \text{mis. dell'elem. ipersup. su } \Sigma).$$

Ogni  $w$  di  $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$  è la traccia, nel senso specificato in [1] (cap. IV, § 1), di una ben determinata funzione  $W$  armonica in  $A$ . Diciamo  $\mathfrak{S}$  la varietà lineare di  $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$  costituita da tutte le  $w$  tali che la corrispondente  $W$  sia olomorfa in  $A$  rispetto alle variabili complesse  $z_1, \dots, z_n$ . La varietà  $\mathfrak{S}$  è chiusa in  $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$ , dato che dalla nota formola di maggiorazione:

$$\int_A |W|^p d\tau \leq K \int_{\Sigma} |w|^p d\sigma \quad (d\tau = dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n)$$

segue, per una classica proprietà di media delle funzioni armoniche, la convergenza uniforme nell'interno di  $A$  di ogni successione  $\{W_s\}$  di funzioni armoniche tale che la successione  $\{w_s\}$  delle tracce converga su  $\Sigma$  con la metrica di  $\mathfrak{L}^{(p)}(\Sigma)$ . La  $\mathfrak{S}$  è individuata da un



Ciò sarà fatto prescindendo dalla continuità della funzione data  $w$ , il che si rende possibile assumendo una estensione del concetto di traccia, di cui già mi sono valso in diverse ricerche sulle equazioni alle derivate parziali e della quale parleremo fra breve.

Nella ipotesi che  $w$  sia di classe uno su  $\Sigma$ , riotterremo il teorema di Severi, deducendolo da quello che fornisce le condizioni integrali delle quali si è sopra detto.

A differenza delle trattazioni di Severi e di Fubini, la presente non fa ricorso ad un classico teorema di Hartogs<sup>(5)</sup> sulle funzioni analitiche di più variabili complesse, pertanto, per una osservazione che devo allo stesso prof. Severi, era da ritenere che dal mio teorema potesse trarsi una nuova dimostrazione di quello di Hartogs. Effettivamente vedremo come, mercé un assai semplice artificio, questo possa dedursi come corollario dal teorema che forma l'oggetto della presente Nota.

1. Supporremo che la frontiera  $\Sigma$  del campo limitato  $A$ <sup>(6)</sup> sia un insieme continuo e che per ogni suo punto esista un intorno ipersferico, tale che le coordinate del punto di  $\Sigma$  variabile in detto intorno si lascino rappresentare parametricamente con funzioni continue e dotate di derivate prime hölderiane in un campo limitato di  $S_{2n-1}$ , in guisa tale che la matrice jacobiana di dette funzioni rispetto al punto-parametro  $(t_1, t_2, \dots, t_{2n-1})$  di  $S_{2n-1}$  abbia caratteristica massima in tutto il campo di variabilità di detto punto. Ciò si esprime brevemente dicendo che  $\Sigma$  è una ipersuperficie di classe  $C_H^{(1)}$ . Le ipotesi ammesse implicano l'esistenza di un unico iperpiano tangente in ogni punto  $P$  di  $\Sigma$ , variabile con continuità (hölderiana) al variare del punto  $P$  su  $\Sigma$ <sup>(7)</sup>.

insieme numerabile  $\{F_k\}$  di funzionali dello spazio duale di  $\mathcal{L}^{(p)}(\Sigma)$ , nel senso che gli elementi di  $\mathcal{S}$  sono tutti e soli quelli che verificano tutte le equazioni  $F_k(w) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). (cfr. [5] p. 142, p. 473 e p. 470). Pertanto, tenendo presente il teorema di Riesz sulla struttura dei funzionali  $F_k$ , la  $w$ , traccia di una funzione olomorfa  $W$  è caratterizzata dal verificare le condizioni integrali:

$$\int_{\Sigma} w f_k d\sigma = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Nella presente ricerca determineremo le funzioni  $f_k$ .

(5) Cfr. [11]. Per estensioni o altre dimostrazioni del teorema di Hartogs, cfr. [8], [9], [10], [12], [19].

(6) È opportuno precisare che parlando di *campo* intendiamo un insieme aperto (cioè dotato esclusivamente di punti interni) e connesso di  $S_{2n}$ .

(7) Avvertiamo che potremmo concedere a  $\Sigma$  una maggiore generalità, supponendo, fra l'altro, che essa sia composta di porzioni di ipersuperficie regolari di classe  $C_H^{(1)}$  tali che due di esse abbiano, eventualmente, solo punti dei loro bordi in comune e costituendo i detti bordi insiemi di misura nulla (secondo Lebesgue) su  $\Sigma$ , secondo una definizione che può darsi in modo ben preciso (cfr. [2] p. 206). Può allora non essere definito il piano tangente in un insieme di misura nulla su  $\Sigma$ . Tuttavia rinunziamo ad esporre il risultato della presente ricerca in ipotesi di maggiore generalità, rispetto a quelle da noi ammesse, per non appesantire la trattazione. Diciamo soltanto che le ipotesi di maggiore generalità lecite per  $\Sigma$  sono esattamente quelle considerate in un altro lavoro dello scrivente (cfr. [2] p. 207). Chi legge potrà facilmente constatare, tenendo presenti i risultati di [2], che quanto stabiliremo nelle ipotesi che  $\Sigma$  sia di classe  $C_H^{(1)}$ , sèguita a sussistere anche per i campi considerati in [2].

Sia  $\vec{\lambda}$  (P) un versore definito per ogni punto  $P \in \Sigma$ , il quale sia funzione di P di classe uno su  $\Sigma$  e formi con il versore  $\vec{\nu}$  (P) normale a  $\Sigma$  e interno ad A un angolo minore di  $\pi/2$ .

Diremo che la funzione  $W(Q)$  definita per  $Q \in A$  è *dotata di traccia su  $\Sigma$*  se esiste una funzione  $w(P)$ , definita per ogni  $P \in \Sigma$ , tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

a) esiste per quasi tutti i punti P di  $\Sigma$  <sup>(8)</sup> il limite di  $W(Q)$  quando Q tende a P lungo  $\vec{\lambda}$  (P) e si ha:  $\lim_{Q \rightarrow P \text{ (su } \vec{\lambda})} W(Q) = w(P)$ ;

b)  $w(P)$  non dipende da  $\vec{\lambda}$ , nel senso che detto  $\vec{\gamma}$  un secondo versore che verifica proprietà analoghe a quelle ammesse per  $\vec{\lambda}$ , riesce  $\lim_{Q \rightarrow P \text{ (su } \vec{\gamma})} W(Q) = w(P)$  quasi ovunque su  $\Sigma$ .

La funzione  $w(P)$  pertanto rimane, quando esiste, determinata (a meno dell'addizione di una funzione quasi ovunque nulla) dalla  $W(Q)$ . Essa dicesi la *traccia* di  $W$  su  $\Sigma$ . È evidente che la definizione ora data generalizza quella ordinaria di traccia per una funzione  $W$  continua in  $A + \Sigma$ .

Ci varremo in seguito del seguente teorema:

1. Se  $W(Q)$  è una funzione continua in A assieme alle sue derivate parziali prime  $W_{x_k}(Q)$ ,  $W_{y_k}(Q)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) e se riesce:

$$(3) \quad \int_A |W_{x_k}(Q)|^2 d\tau < +\infty, \quad \int_A |W_{y_k}(Q)|^2 d\tau < +\infty \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

essa è dotata di traccia  $w(P)$  su  $\Sigma$ . La sua traccia  $w(P)$  appartiene ad  $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ , cioè è misurabile su  $\Sigma$  e si ha:

$$(4) \quad \int_{\Sigma} |w(P)|^2 d\sigma < +\infty.$$

Dette  $\alpha_k, \beta_k$  le componenti di  $\vec{\nu}$  rispetto agli assi  $x_k$  e  $y_k$ , sussistono le formole di Gauss-Green:

$$(5) \quad \int_{\Sigma} w \alpha_k d\sigma + \int_A \frac{\partial W}{\partial x_k} d\tau = 0, \quad \int_{\Sigma} w \beta_k d\sigma + \int_A \frac{\partial W}{\partial y_k} d\tau = 0 \quad (9).$$

(8) Diremo che un insieme di punti di  $\Sigma$  è un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue) su  $\Sigma$  se la parte che esso ha in comune con ogni porzione di  $\Sigma$  che ammette una rappresentazione biunivoca in un campo di  $S_{2n-1}$  con funzioni di classe  $C_H^{(1)}$ , ha come immagine nel campo di variabilità dei parametri un insieme di misura nulla secondo Lebesgue rispetto allo spazio ambiente  $S_{2n-1}$ . Data questa definizione, assumono significato ben preciso le frasi: *quasi ovunque su  $\Sigma$ , in quasi tutti i punti di  $\Sigma$ , ecc.*

(9) Questo teorema rientra come caso particolare in uno più generale, per il quale rimandiamo a [1], cap. V, § 2, e [2] p. 208.

Indicheremo con  $\mathcal{H}$  la totalità delle funzioni di  $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ , ognuna delle quali è la traccia di una funzione di classe uno in  $A$ , ivi verificante le (3)<sup>(10)</sup>.

2. Introdotte le  $2n$  variabili complesse  $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ , supposto  $n > 1$  e assunto  $1 \leq h < k \leq n$ , porremo:

$$(6) \quad \mu = z_1^{v_1} \dots z_n^{v_n} \bar{z}_1^{\bar{v}_1} \dots \bar{z}_n^{\bar{v}_n} d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{h-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$$

essendo  $v_1, \dots, v_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  arbitrari interi non negativi.

Al variare in tutti i modi possibili di  $h, k, v_1, \dots, v_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$  la forma  $\mu$  di grado  $n-2$  descrive un insieme numerabile di forme differenziali esterne, che indicheremo con  $\{\mu\}$ .

Avvertiamo che sulla varietà  $\Sigma$  sceglieremo come orientamento positivo della normale quello determinato dal versore  $\vec{v}$  normale a  $\Sigma$  e interno ad  $A$ .

Il teorema che costituisce il principale risultato della presente ricerca è il seguente:

II. *Condizione necessaria e sufficiente perché la funzione complessa  $w$ , definita su  $\Sigma$  ed appartenente ad  $\mathcal{H}$ , sia la traccia di una funzione  $W$  delle  $n$  varia-*

(10) La condizione necessaria e sufficiente perché una funzione di  $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$  appartenga ad  $\mathcal{H}$  è stata sostanzialmente data dallo scrivente fin dal 1948 (cfr. [3] p. 323 e più precisamente [4] teor. II). Detta  $\{\omega_k\}$  la successione dei polinomi armonici reali di grado  $\geq 1$  ortonormalizzati al modo seguente:

$$\int_A \text{grad } \omega_h \cdot \text{grad } \omega_k d\tau = \delta_h^k,$$

la funzione  $w$  di  $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$  appartiene ad  $\mathcal{H}$  se e solo se, posto:  $c_k = \int_A w \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma$ , la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$  è convergente. Recentemente Prodi [14] ha dato diverse condizioni necessarie e sufficienti per l'appartenenza di  $w$  ad  $\mathcal{H}$ , alcune delle quali sono di tipo sostanzialmente analogo a quella dello scrivente, altre si ottengono da queste con ulteriori caratterizzazioni delle funzioni che tali condizioni verificano. Tuttavia sia le condizioni di Prodi che quella in precedenza ottenuta da chi scrive, mal si prestano in pratica a verificare l'appartenenza di  $w$  ad  $\mathcal{H}$ . Più efficacemente, invece, provvede a ciò una condizione soltanto sufficiente data da Miranda [13], secondo la quale appartiene ad  $\mathcal{H}$  ogni funzione  $w(P)$  verificante per ogni coppia  $P$  e  $P'$  di punti di  $\Sigma$  la condizione di Hölder:

$$(*) \quad |w(P) - w(P')| \leq L |P - P'|^\alpha$$

con  $L > 0$  e  $(1/2) < \alpha \leq 1$ .

Questo teorema ci assicura che appartiene ad  $\mathcal{H}$  ogni funzione differenziabile su  $\Sigma$ , avente ivi gradiente limitato.

La condizione  $\alpha > (1/2)$  per l'esponente di Hölder  $\alpha$  è stata rimossa dal dott. de Vito in una sua ricerca in corso, nella quale ha anzi sostituito la condizione (\*) con una del Dini, nella ipotesi addizionale, però, che  $w$  sia a variazione limitata secondo la definizione data in [5] p. 428 esempio d).

Altre condizioni necessarie e sufficienti per le funzioni di  $\mathcal{H}$  si trovano in una recente Nota di Slobodetsky e Babich [20], la cui conoscenza devo alla cortesia del Collega Professor Prodi.

bili complesse  $z_i = x_i + iy_i, \dots, z_n = x_n + iy_n$  ( $n > 1$ ) olomorfa in  $A$  e verificante le (3), è che, posto:  $\bar{z}_k = x_k - iy_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), si abbia:

$$(7) \quad \int_{\Sigma} [w \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)] = 0$$

per ogni  $\mu \in \{\mu\}$ .

È intanto evidente che il sussistere della (7) per ogni  $\mu$  di  $\{\mu\}$  implica il suo verificarsi anche quando si assuma  $\mu$  al modo seguente:

$$(8) \quad \mu = \sum_{k=2}^n \sum_{h=1}^{k-1} P_{hk} d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{h-1} \wedge d\bar{z}_{h+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n,$$

essendo  $P_{hk}$  un qualsivoglia polinomio nelle variabili  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ , o, ciò che è lo stesso, nelle variabili  $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ .

Sia  $W$  la funzione armonica in  $A$ , verificante le (3) ed avente come traccia su  $\Sigma$  la  $w$ . È ben nota la esistenza e la unicità della  $W$ <sup>(11)</sup>. È anche noto che è possibile costruire una successione di polinomi armonici  $\{W_s\}$  uniformemente convergente verso  $W$  in ogni insieme chiuso contenuto in  $A$  e tale inoltre che:

$$(9) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_A |\text{grad}(W_s - W)|^2 d\tau = 0 \text{ }^{(12)}.$$

Considerando la forma  $\mu$  data dalla (8) e posto:

$$(10) \quad Q_{hk} \begin{cases} = P_{hk} & \text{per } h < k \\ = 0 & \text{per } h = k \\ = -P_{kh} & \text{per } h > k, \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [w \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)] = \\ & = \int_{\Sigma} \left\{ w \wedge \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{h=1}^n (-1)^{h-1} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial \bar{z}_h} \right] d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{h-1} \wedge d\bar{z}_{h+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right\}. \end{aligned}$$

(11) Cfr. [4] teor. II, [2] teor. XII.

(12) Si consideri il sistema  $\{\omega_k\}$  dei polinomi armonici introdotto nella nota<sup>(10)</sup>; è lecito supporre che essi siano tutti nulli in uno stesso punto di  $A$ . Può allora assumersi:

$$W_s = \sum_{k=1}^s c_k \omega_k + c_o^{(s)}$$

con

$$c_k = - \int_{\Sigma} w \frac{\partial \omega_k}{\partial \nu} d\sigma, \quad c_o^{(s)} = \frac{1}{\text{mis } \Sigma} \int_{\Sigma} \left[ w - \sum_{k=1}^s c_k \omega_k \right] d\sigma.$$

L'ipotesi fatta su  $\Sigma$  assicura che  $\{W_s\}$  verifica le condizioni richieste. Cfr. [1] cap. VII, [2] teor. XIII, e [6] teor. XIX.



Riesce:

$$\begin{aligned} d\bar{\chi}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\chi}_{k-1} \wedge d\bar{\chi}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\chi}_n \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = \\ = \frac{(2i)^n}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + k-1} (\alpha_k + i\beta_k) d\sigma, \end{aligned}$$

sicch , posto:

$$\varphi_k = \frac{(2i)^n}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{h=1}^n (-1)^{(h-1)(k-1)} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial \bar{z}_k},$$

e tenendo presente che riesce:

$$2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} + i \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{z}_k} = 0,$$

per le (5) si ha:

$$\begin{aligned} (11) \quad \int_{\Sigma} [w \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)] &= \sum_{k=1}^n \int_{\Sigma} w \varphi_k (\alpha_k + i\beta_k) d\sigma = \\ &= - \sum_{k=1}^n \int_{\Lambda} \varphi_k \left( \frac{\partial W}{\partial x_k} + i \frac{\partial W}{\partial y_k} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Se esiste la funzione, olomorfa in A, di cui parla l'enunciato, essa coincide con la W; dalla (11) segue, allora, la necessit  della condizione espressa dal teorema.

Dimostriamone la sufficienza. Si ponga:

$$\psi_k^{(s)} = \frac{\partial W_s}{\partial x_k} + i \frac{\partial W_s}{\partial y_k}.$$

Essendo  $W_s$  un polinomio armonico, detto  $\bar{\psi}_k^{(s)}$  il polinomio complesso coniugato di  $\psi_k^{(s)}$ , si ha:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{\psi}_k^{(s)}}{\partial \bar{z}_k} = 0.$$

Ci  implica che possono determinarsi i polinomi  $P_{hk}$  che intervengono nella (8) in modo tale che essi verifichino le equazioni:

$$(12) \quad \frac{(2i)^n}{2} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{h=1}^n (-1)^{(h-1)(k-1)} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial \bar{z}_h} = \bar{\psi}_k^{(s)}$$

ove le  $Q_{hk}$  sono definite dalle (10)<sup>(13)</sup>.

Indicheremo con  $\mu_s$  la forma data dalla (8), con i  $P_{hk}$  polinomi verificanti le (12). Si ha:

$$(13) \quad \int_{\Sigma} [W_s \wedge d(\mu_s \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)] = - \sum_{k=1}^n \int_{\Lambda} \left| \frac{\partial W_s}{\partial x_k} + i \frac{\partial W_s}{\partial y_k} \right|^2 d\tau.$$

(13) Potendo esprimere le soluzioni delle (12) mediante quadrature sulle  $\bar{\psi}_k^{(s)}$  siamo certi che esiste qualche soluzione di tali equazioni tutta costituita da polinomi  $P_{hk}$ ; cfr. [15] p. 165.

Tenendo presente la (7), scritta per  $\mu = \mu_s$ , si trae:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} [W_s \wedge d(\mu_s \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)] &= \int_{\Sigma} [(W_s - w) \wedge d(\mu_s \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)] = \\ &= - \sum_{k=1}^n \int_A \left[ \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial x_k} - i \frac{\partial \bar{W}_s}{\partial y_k} \right] \left[ \frac{\partial (W_s - W)}{\partial x_k} + i \frac{\partial (W_s - W)}{\partial y_k} \right] d\tau \end{aligned}$$

e, quindi, per la (9):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} [W_s \wedge d(\mu_s \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)] = 0.$$

Dato che il secondo membro della (13) ha, in virtù della (9), come limite, per  $s \rightarrow \infty$ :

$$- \sum_{k=1}^n \int_A \left| \frac{\partial W}{\partial x_k} + i \frac{\partial W}{\partial y_k} \right|^2 d\tau$$

si ottiene:

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} + i \frac{\partial W}{\partial y_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

in ogni punto di A; cioè la tesi del teorema.

OSSERVAZIONE. — È opportuno notare che, se la funzione  $w(P)$ , data su  $\Sigma$ , oltre ad appartenere ad  $\mathcal{H}$ , è anche continua, essendo continua in  $A + \Sigma$  la funzione armonica  $W$  impiegata nella dimostrazione del teorema II, tale risulta pure la funzione olomorfa in  $A$  avente come traccia su  $\Sigma$  la  $w$ , dato che essa altro non è che la  $W$ .

Dal teorema II si trae il seguente corollario:

III. *Condizione necessaria e sufficiente perché la funzione  $w(P)$ , definita su  $\Sigma$  e ivi di classe uno, sia la traccia di una funzione  $W(z_1, \dots, z_n)$  olomorfa in  $A$  e continua in  $A + \Sigma$ , è che la matrice jacobiana:*

$$\frac{\partial (w, z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (t_1, t_2, \dots, t_{2n-1})}$$

abbia in ogni punto di  $\Sigma$  caratteristica minore di  $n + 1$  ( $n > 1$ ).

Infatti, nelle ipotesi ammesse per  $w$ , con un'ovvia integrazione per parti si deduce che le (7) sono soddisfatte allora e allora soltanto che riesce:

$$\int_{\Sigma} [\mu \wedge (dw \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)] = 0$$

per ogni  $\mu \in \{\mu\}$  o, ciò che è lo stesso, per ogni  $\mu$  che sia una forma di grado  $n - 2$  nelle variabili  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  a coefficienti polinomiali. Ciò implica che le (7) sono verificate quando e solo quando la forma  $dw \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$  è identicamente nulla su  $\Sigma$ , il che equivale alla condizione dell'enunciato.

OSSERVAZIONE. - La differenza fra la natura *locale* della condizione espressa da questo teorema e quella *globale* delle condizioni (7) è soltanto apparente. Infatti le (7), nella sola ipotesi dell'appartenenza di  $w$  ad  $\mathcal{H}$ , possono trasformarsi in condizioni aventi un carattere locale. Fissato arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , sia  $\{\mu\}_\varepsilon$  l'insieme di tutte le forme di grado  $n - 2$  nelle variabili reali  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ , che godono delle seguenti proprietà: *a*) ogni  $\mu$  di  $\{\mu\}_\varepsilon$  ha coefficienti di classe uno in  $S_{2n}$ ; *b*) per ogni  $\mu \in \{\mu\}_\varepsilon$  esiste un punto  $P$  di  $\Sigma$  tale che, all'esterno del campo circolare di  $S_{2n}$  di centro  $P$  e raggio  $\varepsilon$ , la  $\mu$  è identicamente nulla.

Le (7) sono verificate per ogni  $\mu$  di  $\{\mu\}$  allora e allora soltanto che esse lo sono per ogni  $\mu$  di  $\{\mu\}_\varepsilon$ , come si constata, ad esempio, col consueto ragionamento della partizione dell'unità su  $\Sigma$ . D'altra parte le (7), scritte per una  $\mu$  di  $\{\mu\}_\varepsilon$ , hanno carattere locale data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

3. Mostriamo come dal teorema II possa dedursi una semplicissima dimostrazione di un fondamentale teorema di Hartogs.

Sia  $B$  un campo contenuto in  $A$ , la cui frontiera sia costituita da due continui disgiunti, uno dei quali coincida con  $\Sigma$ . Enunceremo il teorema di Hartogs nella forma seguente:

IV. Se  $W^*(z_1, \dots, z_n)$  ( $n > 1$ ) è una funzione olomorfa nel campo  $B$ , esiste una funzione  $W(z_1, \dots, z_n)$  olomorfa in  $A$  che nei punti di  $B$  coincide con  $W^*$ .

Sia  $\vec{\lambda}(P)$  il versore definito su  $\Sigma$ , già in precedenza considerato, e che possiamo supporre di classe  $C_H^1$ . Si può, con considerazioni del tutto elementari<sup>(14)</sup> determinare un numero positivo  $\rho_0$ , convenientemente piccolo, in modo che i due vettori applicati  $\rho_0 \vec{\lambda}(P)$  e  $\rho_0 \vec{\lambda}(P')$  siano senza alcun punto in comune se  $P$  è distinto da  $P'$ . Per ogni fissato  $\rho$  tale che  $0 < \rho \leq \rho_0$  si consideri il luogo  $\Sigma_\rho$  descritto dal punto  $P_\rho = P + \rho \vec{\lambda}(P)$  quando  $P$  descrive  $\Sigma$ . Può suppersi, rimpicciolendo eventualmente  $\rho_0$ , che  $\Sigma_\rho$  risulti contenuto in  $B$ . Sia  $A_\rho$  il campo, contenuto in  $A$ , di cui  $\Sigma_\rho$  è la completa frontiera. Fissato  $\rho$ , diciamo  $f_\rho(Q)$  una funzione reale di classe uno in tutto  $S_{2n}$ , che vale 1 su  $\Sigma_{\rho/2}$  e 0 su  $\Sigma_\rho$ . Tale funzione si costruisce in modo ovvio. Indichiamo con  $B_\rho$  il campo avente per completa frontiera le due ipersuperficie  $\Sigma_{\rho/2}$  e  $\Sigma_\rho$ , su ciascuna delle quali assumiamo come orientamento positivo della normale quello del versore normale, interno a  $B_\rho$ . Sia  $\mu$  la forma definita dalla (6) e si ponga  $\mu_\rho = f_\rho \wedge \mu$ .

Si ha:

$$\int_{\Sigma_{\rho/2}} [W^* \wedge d(\mu \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)] = \int_{\Sigma_{\rho/2} + \Sigma_\rho} [W^* \wedge d(\mu_\rho \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)]$$

(14) Cfr. M. PICONE-G. FICHERA, *Trattato di Analisi matematica*, vol. II (Edit. Tumminelli 1955), § 59.

e, trasformando l'integrale a secondo membro in un integrale esteso a  $B_0$ , si deduce l'annullarsi dell'integrale al primo membro. Esiste allora una  $W(z_1, \dots, z_n)$  olomorfa in  $A_{0/2}$  continua in  $A_{0/2} + \Sigma_{0/2}$  che su  $\Sigma_{0/2}$  coincide con  $W^*$ . Da ciò la tesi del teorema.

## BIBLIOGRAFIA.

- G. FICHERA: [1] *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. III, vol. IV, 1950; [2] *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali*, « Atti del Convegno intern. sulle equazioni alle der. parz. », Trieste 1954, Edit. Cremonese; [3] *Teorema d'esistenza per il problema bi-iperarmonico*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. V, 1948; [4] *Sui teoremi d'esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme*, Nota I e Nota II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. X, 1951; [5] *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, vol. I, « Ist. Matem. Univ. Trieste », 1954; [6] *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*, « Ann. di Mat. pura e appl. », ser. VI, t. XXVII, 1948.
- G. FUBINI: [7] *Su un teorema del Severi per le funzioni analitiche di due variabili*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VI, vol. XIV, 1931; [8] *Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, che generalizza uno dell'Hartogs e uno del Severi*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VI, vol. XV, 1932.
- R. FUETER: [9] *Ueber einen Hartogs'schen Satz*, « Comm. Math. Helv. », vol. 12, 1939; [10] *Ueber einen Hartogs'schen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von  $n$  komplexen Variablen*, « Comm. Math. Helv. », 14, 1942.
- F. HARTOGS: [11] *Einige Folgerungen aus der Cauchy'schen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*, « Münch. Ber. », Bd. 36, 1906.
- E. MARTINELLI: [12] *Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs*, « Comm. Math. Helv. », vol. 15, 1942.
- C. MIRANDA: [13] *Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana*, « Rend. Acc. Sci. Napoli », ser. IV, vol. 18, 1952.
- G. PRODI: [14] *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XXVI, 1956.
- B. SEGRE: [15] *Forme differenziali e loro integrali*, vol. 1, Docet. Ediz. Univ., Roma 1951.
- F. SEVERI: [16] *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VI, vol. XIII, 1931; [17] *La geometria delle funzioni analitiche di più variabili ed i teoremi di esistenza e di unicità ad esse relativi*, « Ann. di Mat. pura ed appl. », ser. IV, t. XVI, 1937; [18] *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma », 1930-31; [19] *A proposito di un teorema di Hartogs*, « Comm. Math. Helv. », vol. 15, 1932.
- L. N. SLOBODETSKY-V. M. BABICH: [20] *Sulla limitatezza dell'integrale di Dirichlet* (in russo), « Dokl. Acad. N. SSSR », 106, 4, 1956.
- J. L. WALSH: [21] *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, « Coll. Publ. », vol. XX, « Amer. Math. Soc. », 1935.
- C. ZIN: [22] *Esistenza e rappresentazione di funzioni analitiche, le quali, su una curva di Jordan, si riducono a una funzione assegnata*, « Ann. di Mat. pura e appl. », ser. IV, t. XXXIV, 1953.



**Geometria.** — *I gruppi di omologia della varietà delle secanti di una curva algebrica iperspaziale.* Nota di ALEXANDRU T. LASCU, presentata (\*) dal Socio B. SEGRE.

Sia  $\Gamma$  una curva algebrica senza punti multipli, immersa in uno spazio proiettivo complesso  $P^m$  di dimensione  $m$  <sup>(1)</sup>. Consideriamo la Grassmanniana delle rette dello spazio  $P^m$  e sia  $P_{m,1}$  il modello proiettivo di questa varietà, realizzato in un  $P^k$ , per mezzo delle coordinate plückeriane.

Le rette di  $P^m$  secanti della curva  $\Gamma$  costituiscono per  $m > 2$  una sotto-varietà algebrica  $V$  di  $P_{m,1}$ .

Sia  $\varphi$  la corrispondenza algebrica  $\Gamma \rightarrow P_{m,1}$  che associa ad ogni punto  $x \in \Gamma$  le rette  $u \in P_{m,1}$  passanti per  $x$ .

La corrispondenza  $\varphi$  è irriducibile e  $V$  è l'immagine di  $\Gamma$  per  $\varphi$ .

Sia

$$\Phi \subset \Gamma \times P_{m,1} \subset P^m \times P^k$$

il grafico della corrispondenza  $\varphi$  nel prodotto  $P^m \times P^k$  e  $\pi$  la proiezione nel prodotto sul secondo fattore:  $\pi\Phi = V$  è un poliedro finito.

*Si tratta di determinare i gruppi di omologia interna, della  $V$ .*

Se il grado di  $\Gamma$  è uguale ad uno,  $V$  è la varietà (di Schubert) delle rette incidenti con una retta fissa.

Questo problema è caso particolare del seguente, posto da Gh. Galbura: *determinare i gruppi di omologia della varietà degli spazi di dimensione  $k$  incidenti ad una varietà algebrica  $\Gamma$ , immersa in uno spazio  $P^m$ .* Il caso in cui  $\Gamma$  è l'intero  $P^m$  è stato trattato dal sig. Martinelli [2] e dal sig. Gamkrelidze [3].

Notazioni:  $H_q(K)$  significa il gruppo di omologia intera  $q$ -dimensionale del poliedro  $K$ ;  $Z$  sarà il gruppo additivo degli interi;  $Z_n$ , il gruppo degli interi modulo  $n$ ;  $n$  significa il grado di  $\Gamma$ ,  $p$  il genere di  $\Gamma$ ;  $A \dot{+} B$  è la somma diretta dei gruppi additivi  $A$  e  $B$ ;  $A(\times) B$  il prodotto tensoriale di  $A$  e  $B$ ;  $A^q = A \dot{+} A \dot{+} \dots \dot{+} A$  ( $q$  volte);  $[\alpha]$  è il gruppo ciclico generato dall'elemento  $\alpha$  di un gruppo abeliano.

*I gruppi  $H_q(V)$  si determinano nel seguente modo:*

Determiniamo prima i gruppi  $H_q(\Phi)$  per mezzo del teorema di Künneth. ( $\Phi$  è uno spazio fibrato nel senso dello Steenrod [6] sulla  $\Gamma$ , la fibra essendo un  $P^{m-1}$ ; ma poi  $\Phi$  risulta equivalente [6], quindi omeomorfo, al prodotto,  $\Gamma \times P^{m-1}$ ).

Nell'ipotesi che:

(i) ogni retta  $u \in P_{m,1}$  segna la curva  $\Gamma$  al più in due punti, la proiezione  $\pi: \Phi \rightarrow V$  è univalente, eccezione fatta per le coppie  $(x, u)$  nelle quali  $u$  è una corda di  $\Gamma$ .

(\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) Per dimensione  $h$  di uno spazio proiettivo complesso  $P^h$  intendiamo la sua dimensione complessa.

L'insieme di queste coppie, e delle coppie  $(x, u)$  formate da un punto  $x$  di  $\Gamma$  e della tangente  $u$  a  $\Gamma$  nel punto  $x$ , costituisce una sottovarietà algebrica (e topologica)  $X'$ , di  $\Phi$ , evidentemente omeomorfa al prodotto  $\Gamma \times \Gamma$ : identifichiamo  $X'$  con  $\Gamma \times \Gamma$ . Sia  $X$  la proiezione di  $X'$ ,  $X = \pi X'$ .  $X$  è un sotto-spazio di  $V$ , omeomorfo al prodotto simmetrico  $\Gamma \hat{\times} \Gamma$ : identifichiamo  $X$  con  $\Gamma \hat{\times} \Gamma$ .

Dopo queste identificazioni, lo spazio  $V$  si ricava da  $\Phi$  identificando le coppie di punti di  $X'$  simmetriche rispetto alla diagonale.

Le successioni esatte di omologia relative alle coppie  $(\Phi, X')$  e  $(V, X)$  sono legate tramite gli omomorfismi  $f, g, h$ , definiti per mezzo dell'applicazione  $\pi: (\Phi, X') \rightarrow (V, X)$  nel seguente modo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial'} & H_q(X') & \xrightarrow{i'} & H_q(\Phi) & \xrightarrow{j'} & H_q(\Phi, X') \xrightarrow{\partial'} H_{q-1}(X') \xrightarrow{i'} \cdots \\ & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'} & H_q(X) & \xrightarrow{i} & H_q(V) & \xrightarrow{j} & H_q(V, X) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X) \xrightarrow{i} \cdots \end{array}$$

questo diagramma essendo commutativo. I gruppi di omologia  $H_q(X')$ ,  $H_q(\Phi)$  dei prodotti  $X' = \Gamma \times \Gamma$ ,  $\Phi = L \times P^{m-1}$  si determinano in forza del teorema di K  neth; quelli del prodotto simmetrico  $X = \Gamma \hat{\times} \Gamma$ , secondo [7]. Le basi di omologia per  $V$  si deducono dalle basi di K  neth di  $\Phi$  per mezzo del diagramma di cui sopra.

Sia

$$H_2(\Phi) = [\xi^0(\times) \zeta^2] + [\xi^2(\times) \zeta^0]$$

$$H_3(\Phi) = \sum_{i=1}^{2p} [\xi_i^1(\times) \zeta^2]. \quad (\text{somma diretta}),$$

ove  $\xi^0; \xi_i^1, \dots, \xi_{2p}^1; \xi^2$  siano <sup>(2)</sup> basi di omologia intera per le dimensioni 0, 1, 2, rispettivamente, per la  $\Gamma$ ;  $\zeta^0, \zeta^2$  costituiscano basi di omologia di  $P^{m-1}$  per le dimensioni 0 e 2.

Abbiamo:

TEOREMA I. I. - Se  $\Gamma$  soddisfa l'ipotesi (i), allora

$$H_0(V) = Z$$

$$H_1(V) = 0$$

$$H_2(V) = Z$$

$$H_3(V) = Z^{2p} + Z_n^{2p}$$

$$H_q(V) = H_q(\Gamma \times P^{m-1}) \quad \text{per } q > 3$$

per  $q > \zeta$ ,  $h$  essendo un isomorfismo che porta  $H_q(\Phi)$  in  $H_q(V)$ ;

$h(\xi^0(\times) \zeta^2)$     l'elemento generatore di  $H_2(V)$ ;  $h(\xi^2(\times) \zeta^0) = nh(\xi^0(\times) \zeta^2)$ ,

$h(\xi_i^1(\times) \zeta^2)$     un elemento ciclico di ordine  $n$  in  $H_3(V)$ . Gli elementi  $h(\xi_i^1(\times) \zeta^2)$  ( $1 \leq i \leq 2p$ ) costituiscono una base per la parte periodica di  $H_3(V)$ .

(2) Gli indici superiori indicano la dimensione.

Una base per la parte libera di  $H_3(V)$  è costituita dalle  $h(\xi_i^1 \times \xi_i^2)$  ( $1 \leq i \leq 2p$ ) ove  $\xi_i^2$  è una catena singolare su  $P^{m-1}$  tale che sia  $\partial \xi_i^2 = \xi_i^1$  (3);  $\xi_i^1$  ( $1 \leq i \leq 2p$ ) è il ciclo di  $P^{m-1}$  generato da una corda con un punto fisso  $x \in \Gamma$  e che si muove appoggiandosi in un altro punto  $y \in \Gamma$  che descrive il ciclo  $\xi_i^1$  di  $\Gamma$ .

Tenuto conto del modo in cui si fanno le immersioni  $i'$  e  $i$ , le basi di omologia di  $V$  date dal teorema 1, si possono esplicitare geometricamente. Per esempio  $h(\xi^0 \times \xi^2)$  è il ciclo costituito dalle rette passanti per un punto fisso qualunque  $x \in \Gamma$ , situate in un piano  $P^2$  passante per  $x$ .

L'ipotesi (i) si verifica sempre quando  $n > 2p + 2$  e la curva  $\Gamma$  è normale in  $P^m$  [1]. Se l'ipotesi (i) non si verifica, il risultato dato dal teorema 1 va modificato solamente per il  $H_r(V)$  (4). In verità, lo spazio  $\mathcal{V}$  che si ricava da  $\Phi$  mediante l'identificazione  $\rightarrow$  dei punti simetrici rispetto alla diagonale in  $\Gamma \times \Gamma$ , non è lo spazio  $V \cdot V$  si ottiene da  $\mathcal{V}$  identificando certi punti (in numero finito) di  $\Gamma \hat{\times} \Gamma$  corrispondenti ad una retta secante che incontri  $\Gamma$  in più di due punti (se esiste). Si verifica che, come s'è detto, in questa circostanza va modificato solamente il gruppo  $H_r(V)$ , i rimanenti gruppi di omologia essendo quelli dati dal teorema 1. Più precisamente, vale il

TEOREMA 2. - I gruppi di omologia intera della varietà  $V$  sono quelli dati dal teorema 1, all'infuori dei  $H_r(V)$ , per il quale risulta

$$H_r(V) = \mathbb{Z}_r$$

ove  $r = 2k_3 + 3k_4 + \dots + (h-1)k_h + \dots$ ,  $k_h$  essendo il numero delle secanti  $h$ -uple della  $\Gamma$ . Così la varietà  $V$  porta nei suoi invarianti di omologia, oltre gli invarianti topologici della curva  $\Gamma$ , due invarianti proiettivi d'immersione di  $\Gamma$  in  $P^m$ : il grado  $n$  e il numero  $r$  suddetto.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. SEVERI, *Trattato di Geometria Algebrica*, Zanichelli, Bologna 1926.
- [2] E. MARTINELLI, *Sulla varietà delle faccette  $p$ -dimensionali di  $S_2$* , « Atti Accad. Italia », Mem., VI. S. 12, 917-943 (1941).
- [3] R. D. GAMKRELIDZE, *Izvestia Akademii Nauk U.R.S.S.*, vol. XX, N. 5 (1956).
- [4] P. A. SMITH, *The topology of involutions*, « Proc. Nat. Ac. Sc. U.S.A. », vol. 19, 612-618 (1933).
- [5] M. RICHARDSON, *Homology characters of symmetric products* Duke Math. Journal, vol. 1 50-69 (1935).
- [6] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.
- [7] S. K. STEIN: *Homology of the two-fold symmetric product*, « Annals of Math. », vol. 59, No. 3, May, 570-583 (1954).

(3)  $\partial$  è l'operatore di passaggio alla frontiera.

(4) Se  $\Gamma$  ha un numero finito di  $n$ -secanti,  $n \geq 3$ .





dove, tenuto conto della formula di Leibniz per le derivate successive di un prodotto, e posto  $X_{\beta i}^{\alpha a} = \frac{\partial \bar{x}^{(a)a}}{\partial x^{(\beta)i}}$ , si ha

$$(3) \quad X_{\beta i}^{\alpha a} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \quad \text{se } \alpha = \beta$$

$$(4) \quad X_{\beta i}^{\alpha a} = 0 \quad \text{se } \alpha < \beta$$

$$(5) \quad X_{\beta i}^{\alpha a} = \binom{\alpha}{\beta} \left( \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \right)^{(\alpha-\beta)} \quad \text{se } \alpha > \beta \quad ([4], \text{ p. } 18).$$

Chiamasi spazio di elementi lineari d'ordine B una varietà del tipo di quella avente gli  $x^{(\alpha)i}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, B$ ) per elementi, la quale si denota  $M_n^{(B)}$ , nel caso  $A \geq 1$ , B può assumere i valori  $1, 2, \dots, A$ .

Consideriamo ora un campo di vettori  $v^i(x)$  lungo una curva  $x^i = x^i(t)$ , ove  $t$  sia un parametro. Le derivate delle  $v^i$  lungo la curva:

$$v^{(1)i} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} x^{(1)j}$$

non sono generalmente componenti di un vettore, com'è facile vedere. Si ha invece

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{v}^a = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} v^i \\ \bar{v}^{(1)a} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} v^{(1)i} + \left( \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \right)^{(1)} v^i. \end{cases}$$

Si può tuttavia osservare che  $2n$  quantità  $(v^i, v^{(1)i})$ , soggette alla legge di trasformazione (6) quando si mutino comunque le coordinate, definiscono un ente di tipo nuovo, il quale potrebbe pensarsi come un vettore nello spazio di dimensione  $2n$  delle  $(v^i, v^{(1)i})$ . Attualmente, però, le  $2n$  componenti  $(v^i, v^{(1)i})$  subiscono soltanto speciali sostituzioni lineari; e precisamente, posto  $X_i^a = X_{oi}^{\alpha a}$ , le (6) possono scriversi nella forma;

$$(6') \quad \begin{cases} \bar{v}^a = X_i^a v^i \\ \bar{v}^{(1)a} = X_{oi}^{\alpha a} v^i + X_{i1}^{\alpha a} v^{(1)i}. \end{cases}$$

Più generalmente, per ogni intero  $G$  soddisfacente alle  $0 \leq G \leq B$ , il sistema di  $(G+1)n$  quantità  $(v^i, v^{(1)i}, \dots, v^{(G)i})$  rimane soggetto alla legge di trasformazione:

$$(7) \quad \bar{v}^{(a)a} = \sum_{\beta=0}^a X_{\beta i}^{\alpha a} v^{(\beta)i} \quad \alpha = 0, 1, \dots, G.$$

Chiamasi *exvettore*, e più precisamente *exvettore contravariante di grado G e caratteristica (1, 0, G, B)*, un ente definito da componenti  $v^{\alpha i}$  ( $\alpha = 0, 1, \dots, G$ ) che dipendono da un elemento differenziale dell'B-mo ordine  $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(B)i})$ , ossia da un punto sulla varietà  $M_n^{(B)}$ , e che siano soggette alla legge di trasformazione

$$(8) \quad \bar{v}^{\alpha a} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} X_{\beta i}^{\alpha a} v^{\beta i} \quad \alpha = 0, 1, \dots, G$$

coi coefficienti  $X$  espressi dalle (3), (4), (5). Si possono anche definire similmente exvettori covarianti ed extensori. Queste nozioni, introdotte da H. V. Craig [8], furono successivamente approfondite da A. Kawaguchi ([4]–[6]) e da altri [7]. Più precisamente, dalla (8) derivano facilmente le seguenti proprietà ad essi relative.

I) Se  $v^i$  è un vettore contravariante, allora  $v^{(\alpha)i}$  ( $\alpha = 0, \dots, G$ ) è un exvettore contravariante di grado  $G$ .

II) Se  $v^{\alpha i}$  è un exvettore contravariante di grado  $G$ , allora  $v^{\alpha i} -$  ove  $\alpha = 0, 1, \dots, H (< G)$  – risulta un exvettore contravariante di grado  $H$ .

Le seguenti proprietà degli extensori furono inoltre dimostrate da A. Kawaguchi e H. V. Craig nei lavori testè citati:

III) Se  $T_j^i$  è un tensore, allora  $\binom{\alpha}{\beta} T_j^{\alpha-\beta} = T_{\beta j}^{\alpha i}$  ( $\alpha = 0, \dots, G$ ) è un extensore di grado  $G$  [4].

IV) Se  $T_{jhl}^i$  è un tensore, allora  $\binom{\alpha}{\beta \gamma \delta} (T_{jhl}^i)^{(\alpha-\beta-\gamma-\delta)} = T_{\beta j \gamma k \delta l}^{\alpha i}$  ( $\alpha = 0, \dots, G$ ) è un extensore di grado  $G$  ([9], P. 335), dove

$$\binom{\alpha}{\beta \gamma \delta} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\alpha!}{\beta! \gamma! \delta! (\alpha - \beta - \gamma - \delta)!} \quad \text{se } \alpha \geq \beta + \gamma + \delta, \\ = 0 \quad \text{se } \alpha < \beta + \gamma + \delta. \end{array} \right.$$

Si possono poi definire in modo simile a quello noto i differenziali assoluti. Ad esempio, per un exvettore contravariante  $v^{\alpha i}$  risulta:

$$(9) \quad \delta v^{\alpha i} = dv^{\alpha i} + \Gamma_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} v^{\beta j} dx^{(\gamma)k},$$

dove i simboli  $\Gamma_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}$  siano assoggettati, in forza delle (1), (2), alla seguente trasformazione:

posto  $\bar{X}_{\beta \delta}^{\theta i} = \frac{\partial x^{(\theta)i}}{\partial \bar{x}^{(\beta)\delta}}$  ed  $\bar{X}_{\beta \delta \gamma c}^{\theta i} = \frac{\partial^2 x^{(\theta)i}}{\partial \bar{x}^{(\beta)\delta} \partial \bar{x}^{(\gamma)c}}$ , si ha:

$$(10) \quad \bar{\Gamma}_{\beta \delta \gamma c}^{\alpha a} = \sum_{\theta=\gamma}^{\alpha-\beta} \sum_{\varphi=\beta}^{\alpha-\theta} \sum_{\psi=\theta+\varphi}^{\alpha} \Gamma_{\varphi j \theta k}^{\psi i} X_{\psi i}^{\alpha a} \bar{X}_{\beta \delta}^{\varphi j} \bar{X}_{\gamma c}^{\theta k} + \sum_{\theta=\beta+\gamma}^{\alpha} \bar{X}_{\beta \delta \gamma c}^{\theta i} X_{\theta i}^{\alpha a}.$$

Si possono allora definire *exvettori paralleli* mediante la condizione  $\delta v^{\alpha i} = 0$ .

§ 2. TRASFORMAZIONI PARALLELE DI VARIETÀ ALGEBRICHE  $\{H, K\}$  DI DEL PEZZO-SEGRE. – Supponiamo ora che  $M_n$  sia una varietà differenziabile dotata di connessione affine  $\Gamma_{jk}^i$ . Ne risulta un campo di connessione affine  $\Gamma_{jk}^i(x)$  lungo ogni curva  $x^i = x^i(t)$ .

Abbiamo dunque per ciascun intero  $\alpha$  soddisfacente alle  $0 \leq \alpha \leq A$ , i seguenti simboli definiti dalla data connessione affine:

$$(11) \quad \bar{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} \left\{ \begin{array}{l} = \binom{\alpha}{\beta \gamma} \Gamma_{jk}^{i(\alpha-\beta-\gamma)} \quad \text{se } \alpha \geq \beta + \gamma, \\ = 0 \quad \text{se } \alpha < \beta + \gamma \text{ ([10], p. 18),} \end{array} \right.$$

dove:

$$\binom{\alpha}{\beta \gamma} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{\alpha!}{\beta! \gamma! (\alpha - \beta - \gamma)!} \quad \text{se } \alpha \geq \beta + \gamma, \\ = 0 \quad \text{se } \alpha < \beta + \gamma. \end{array} \right.$$

Va rilevato che i simboli  $\tilde{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}$  testè introdotti dipendono dall'elemento differenziale dell'( $\alpha - \beta - \gamma$ )-mo ordine  $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(\alpha - \beta - \gamma)i})$ .

Siano  $P(x), \tilde{P}(x + dx)$  punti infinitamente vicini di  $M_n$ , e denotino rispettivamente  $E_G(x^{(1)i}, \dots, x^{(G)i}), \tilde{E}_G(\tilde{x}^{(1)i}, \dots, \tilde{x}^{(G)i})$  elementi differenziali del  $G$ -mo ordine relativi ai punti  $P, \tilde{P}$ . Se questi elementi differenziali vengono trasportati parallelamente ricorrendo ai simboli  $\tilde{\Gamma}_{\beta i \gamma k}^{\alpha i}$  suddetti, si ha la formola

$$\tilde{x}^{(\alpha+1)i} = x^{(\alpha+1)i} - \tilde{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} \quad \alpha = 0, \dots, G - 1;$$

l'elemento differenziale trasportato,  $\tilde{x}^{(\alpha)i}$ , è così funzione dell'elemento differenziale  $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(\alpha)i})$  e dei differenziali  $dx^i$ .

Supposto inoltre  $M_n$  immersa in uno spazio proiettivo di dimensione  $\geq \binom{n+B}{n} - 1$ , ad ogni elemento differenziale curvilineo regolare  $E_H(x^{(1)i}, \dots, x^{(H)i})$ , d'ordine  $H$  e centro  $P$ , e per ogni intero  $K$  soddisfacente alle

$$0 \leq H < K \leq B,$$

si può associare una varietà algebrica  $\{H, K\}$  di dimensione  $(K - H)n + H$ , lungo degli  $\infty^{(K-H)(n-1)}$  spazi  $S_K$  osculatori in  $p$  ai vari  $E_K$  (regolari) tracciati su  $M_n$  e contenenti  $E_H$ : cfr. B. Segre ([1], p. 114 [2], § 50). Questa varietà è fornita dagli elementi differenziali  $E_K(x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(H)i} x^{(H+1)i}, \dots, x^{(K)i})$  dove  $x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(H)i}$  denotano valori fissati e  $x^{(H+1)i}, \dots, x^{(K)i}$  indicano valori arbitrari; dunque, in corrispondenza ai singoli punti di  $M_n$ , si può considerare un *campo* di siffatte varietà algebriche.

Trasportando parallelamente gli elementi differenziali d'ordine  $K$   $E_K(x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(H)i}, x^{(H+1)i}, \dots, x^{(K)i})$  - aventi in comune un elemento d'ordine  $H$  - dal punto  $p(x)$  al punto  $\tilde{p}(x + dx)$ , e indicandoli con  $E_K(\tilde{x}^{(1)i}, \dots, \tilde{x}^{(K)i})$  avremo

$$(13) \quad \tilde{x}^{(\alpha+1)i} = x_0^{(\alpha+1)i} - (\tilde{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i})_0 x_0^{(\beta+1)j} dx_0^{(\gamma)k} \quad \alpha = 0, \dots, H - 1,$$

$$(14) \quad \tilde{x}^{(\varphi+1)i} = x^{(\varphi+1)i} - \tilde{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\varphi i} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} \quad \varphi = H, \dots, K - 1.$$

gli elementi differenziali (d'ordine  $\alpha$ )  $\tilde{x}^{(\alpha)i}$  ( $\alpha = 1, \dots, H$ ) sono quindi dati dalle  $(x^i, dx^i, x_0^{(1)i}, \dots, x_0^{(\alpha)i})$  ( $\alpha = 1, \dots, H$ ), come è facile vedere, e possono quindi venir denotati con  $\tilde{x}^{(\alpha)i}$  ( $\alpha = 1, \dots, H$ ). Gli elementi differenziali  $\tilde{E}_K(\tilde{x}_0^{(1)i}, \dots, \tilde{x}_0^{(H)i}, \tilde{x}^{(H+1)i}, \dots, \tilde{x}^{(K)i})$  sono perciò ottenuti come gli elementi differenziali di  $M_n$  d'ordine  $K$  che hanno in comune l'elemento (d'ordine  $H$ )  $\tilde{E}_H(\tilde{x}_0^{(1)i}, \dots, \tilde{x}_0^{(H)i})$ .

Pertanto all'elemento differenziale  $\tilde{E}_H(\tilde{x}_0^{(1)i}, \dots, \tilde{x}_0^{(H)i})$ , d'ordine  $H$  e centro  $\tilde{p}$ , si ottiene da  $\{H, K\}$  mediante trasporto la varietà algebrica  $\{\tilde{H}, K\}$ , fornita dagli elementi differenziali  $\tilde{E}_K(\tilde{x}_0^{(1)i}, \dots, \tilde{x}_0^{(H)i}, x^{(H+1)i}, \dots, \tilde{x}^{(K)i})$ .

Chiameremo quindi *varietà algebrica parallela* di  $\{H, K\}$  siffatta varietà  $\{\widetilde{H}, K\}$ . In virtù di questa definizione, possiamo osservare che quando lo spazio degli elementi differenziali di ordine  $B$  nel punto  $P: M_n^{(B)} - (x^{(1)i}, \dots, x^{(B)i})$  — è trasportato parallelamente nello spazio:  $\widetilde{M}_n^{(B)}$  relativo al punto  $\tilde{p}$ , la varietà  $\{H, K\}$  si muta precisamente nella  $\{\widetilde{H}, K\}$ .

Esprimiamo ora lo spazio  $S_K$  osculatore in  $P$  ad un qualunque elemento differenziale,  $E_K$ , tracciato su  $M_n$  e contenente  $E_H$  colle formole:

e, similmente, lo spazio  $\widetilde{S}_K$  colle formole:

$$X^i = x_{\circ}^i + \lambda_{\circ} x_{\circ}^{(1)i} + \dots + \lambda_H x_{\circ}^{(H)i} + \lambda_{H+1} x_{\circ}^{(H+1)i} + \dots + \lambda_K x_{\circ}^{(K)i}$$

è, similmente lo spazio  $\widetilde{S}_K$  colle formole

$$\tilde{X}^i = \tilde{x}_{\circ}^i + \mu_{\circ} \tilde{x}_{\circ}^{(1)i} + \dots + \mu_H \tilde{x}_{\circ}^{(H)i} + \mu_{H+1} \tilde{x}_{\circ}^{(H+1)i} + \dots + \mu_K \tilde{x}_{\circ}^{(K)i},$$

dove, se  $H = 0$ , il punto  $X$  dello spazio  $S_K$  è un ente chiamato *polinomio differenziale* da B. Segre ([2], §§ 62-67; [3], P, 272).

Diremo *paralleli* due punti  $X, \tilde{X}$ , se  $\lambda = \mu$  per  $x = 1, \dots, K$ .

Se le  $\lambda = \mu$  sono date funzione di un parametro  $t$ , cioè

$$\lambda_{\alpha} = \mu_{\alpha} = f_{\alpha}(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

ne risultano due *curve parallele*  $C(f_{\alpha}(t)), \tilde{C}(f_{\alpha}(t))$  sugli spazi  $S_K, \widetilde{S}_K$ . In particolare, assunto

$$f_{\alpha}(t) = \frac{1}{\alpha!} t^{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, K,$$

le curve parallele  $C\left(\frac{1}{\alpha!} t^{\alpha}\right), \tilde{C}\left(\frac{1}{\alpha!} t^{\alpha}\right)$  si riducono alle *curve parallele K-osculatrici* ([11], P. 86) in una varietà differenziabile con connessione affine  $\Gamma_{jk}^i$ .

Consideriamo ora i due elementi lineari  $d, \delta$  spiccati dal punto  $P(x^i)$  di  $M_n$  ai due punti infinitamente vicini  $\tilde{P}(x^i + dx^i), {}^{\Delta}P(x + \delta x^i)$ . Trasportiamo parallelamente  $E_K(x_{\circ}^{(1)i}, \dots, x_{\circ}^{(H)i}, x_{\circ}^{(H+1)i}, \dots, x_{\circ}^{(K)i})$ , dal punto  $\tilde{P}(x)$  al punto  $\tilde{P}(x + dx)$ , ottenendo  $\tilde{E}_K(\tilde{x}_{\circ}^{(1)i}, \dots, \tilde{x}_{\circ}^{(H)i}, \tilde{x}_{\circ}^{(H+1)i}, \dots, \tilde{x}_{\circ}^{(K)i})$ ; ed esprimiamo del pari le quantità trasportate parallelamente ad  $\tilde{E}_K$ , dal punto  $\tilde{P}$  al punto  $\tilde{P}^{\Delta}(x + dx + \delta(x + dx))$ , con  $\tilde{E}_K^{\Delta}(\tilde{x}_{\circ}^{\Delta(1)i}, \dots, \tilde{x}_{\circ}^{\Delta(H)i}, \tilde{x}_{\circ}^{\Delta(H+1)i}, \dots, \tilde{x}_{\circ}^{\Delta(K)i})$ . Allora abbiamo

$$\tilde{x}^{\Delta(\alpha+1)i} = \tilde{x}^{(\alpha+1)i} - \tilde{\Gamma}_{\beta, \gamma k}^{\alpha i}(\tilde{x}, \tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(\alpha-\beta-\gamma)}) \tilde{x}^{(\beta+1)j} \delta \tilde{x}^{(\gamma)k}.$$

Ricordando poi che per le (13), (14)

$$\tilde{x}^{(\alpha+1)i} = x^{(\alpha+1)i} - \tilde{\Gamma}_{\beta, \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k},$$



in virtù di che

$$\dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}(\tilde{x}) = \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}(x) = \frac{\partial \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}}{\partial x^{(0)l}} dx^{(0)l} + \dots$$

$$\delta \tilde{x}^{(\gamma)k} = \delta x^{(\gamma)k} + \delta d x^{(\gamma)k},$$

abbiamo

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{x}^{\Delta(\alpha+1)i} &= x^{(\alpha+1)i} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} \\ &\quad - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} \delta d x^{(\gamma)k} \\ &\quad - \left( \frac{\partial \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}}{\partial x^{(0)l}} - \dot{\Gamma}_{\varphi m \gamma k}^{\alpha i} \dot{\Gamma}_{\beta j \vartheta l}^{\varphi m} \right) x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} dx^{(0)l} + \dots \end{aligned} \right.$$

Scambiando in questa  $d$  con  $\delta$ , si possono definire similmente nei punti  ${}^{\Delta}P(x + \delta x)$ ,  ${}^{\Delta}\tilde{P}(x + \delta x + d(x + \delta x))$  gli elementi

$$\Delta E_k(\Delta x_{\circ}^{(1)i}, \dots, \Delta x_{\circ}^{(H)i}, \Delta x^{(H+1)i}, \dots, \Delta x^{(K)i}) \text{ ed } \Delta \tilde{E}_k(\Delta \tilde{x}_{\circ}^{(1)i}, \dots, \Delta \tilde{x}_{\circ}^{(H)i}, \Delta \tilde{x}^{(H+1)i}, \dots, \Delta \tilde{x}^{(K)i}),$$

dove

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta \tilde{x}^{\Delta(\alpha+1)i} &= x^{\Delta(\alpha+1)i} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} \\ &\quad - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} d \delta x^{(\gamma)k} \\ &\quad - \left( \frac{\partial \dot{\Gamma}_{\beta j \vartheta l}^{\alpha i}}{\partial x^{(\gamma)k}} - \dot{\Gamma}_{\varphi m \vartheta l}^{\alpha i} \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\varphi m} \right) x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} dx^{(0)l} + \dots \end{aligned} \right.$$

Trasportiamo quindi parallelamente  $\tilde{E}_K^{\Delta}$  dal punto  $\tilde{P}^{\Delta}(x + dx + \delta(x + dx))$  al punto  ${}^{\Delta}\tilde{P}(x + \delta x + d(x + \delta x))$ , deducendone  $\tilde{E}_K^{\Delta\Delta}(\tilde{x}_{\circ}^{\Delta\Delta(1)i}, \dots, \tilde{x}_{\circ}^{\Delta\Delta(H)i}, \tilde{x}^{\Delta\Delta(H+1)i}, \dots, \tilde{x}^{\Delta\Delta(K)i})$ , ove

$$\tilde{x}^{\Delta\Delta(\alpha+1)i} = \tilde{x}^{\Delta(\alpha+1)i} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}(\tilde{x}^{\Delta}, \dots, \tilde{x}^{\Delta(\alpha-p-\gamma)}) \tilde{x}^{\Delta(\beta+1)j} (d \delta \tilde{x}^{\Delta(\gamma)k} - \delta d \tilde{x}^{\Delta(\gamma)k});$$

in virtù della (15), si ottiene così

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{x}^{\Delta\Delta(\alpha+1)i} &= x^{\Delta(\alpha+1)i} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} \\ &\quad - \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} d \delta x^{(\gamma)k} \\ &\quad - \left( \frac{\partial \dot{\Gamma}_{\beta j \gamma k}^{\alpha i}}{\partial x^{(0)l}} - \dot{\Gamma}_{\varphi m \gamma k}^{\alpha i} \dot{\Gamma}_{\beta j \vartheta l}^{\varphi m} \right) x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} dx^{(0)l} + \dots \end{aligned} \right.$$

Sottraggiamo ora la (16) dalla (17), omettendo i termini che sono infinitesimi d'ordine superiore al 2° rapporto a  $dx^i$ ,  $dx^i$ . Allora abbiamo

$$\tilde{x}^{\Delta\Delta(\alpha+1)i} - \Delta \tilde{x}^{\Delta(\alpha+1)i} = - \dot{R}_{\beta j \gamma k \vartheta l}^{\alpha i} x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} dx^{(0)l},$$

dove

$$(18) \quad \dot{R}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k \theta l} = \left( \frac{\partial \dot{\Gamma}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k}}{\partial x^{(\theta)l}} - \frac{\partial \dot{\Gamma}^{\alpha i}_{\beta j \theta l}}{\partial x^{(\gamma)k}} - \dot{\Gamma}^{\alpha i}_{\varphi m \gamma k} \dot{\Gamma}^{\varphi m}_{\beta j \theta l} + \dot{\Gamma}^{\alpha i}_{\varphi m \theta l} \dot{\Gamma}^{\varphi m}_{\beta j \gamma k} \right);$$

sicché, introducendo il tensore di curvatura  $R^i_{jkl}$ , otteniamo:

$$R^{\alpha i}_{\beta j \gamma k \theta l} = \binom{\alpha}{\beta \gamma \theta} R^i_{jkl} x^{(\alpha-\beta-\gamma-\theta)} \quad ([12], \text{ p. } 24).$$

Si può infine osservare che, in base alla IV) del § I, le quantità  $R^{\alpha i}_{\beta j \gamma k \theta l}$  risultano degli extensori, e sono quindi funzioni dell'elemento differenziale dell'  $(\alpha - \beta - \gamma - \theta)$ -mo ordine:  $(x, x^{(1)}, \dots, x^{(\alpha-\beta-\gamma-\theta)})$ . Pertanto le (18) possono anche venir scritte nella forma

$$(19) \quad \tilde{x}^{\Delta\Delta(\alpha+1)i} - \Delta \tilde{x}^{(\alpha+1)i} = - (\dot{R}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k \theta l})_0 x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} dx^{(\theta)l} \quad \text{per } \alpha = 0, \dots, H-1,$$

$$(20) \quad \tilde{x}^{\Delta\Delta(\varphi+1)i} - \Delta \tilde{x}^{(\varphi+1)i} = - \dot{R}^{\varphi i}_{\beta j \gamma k \theta l} x^{(\beta+1)j} \delta x^{(\gamma)k} dx^{(\theta)l} \quad \text{per } \varphi = H, \dots, K-1,$$

La (19) esprime le relazioni fra le varietà algebriche  $\{H, \widetilde{K}^{\Delta\Delta}\}$  e  $\{H, \widetilde{K}\}$  fornite rispettivamente da  $\tilde{E}_K^{\Delta\Delta}$  e  $\Delta \tilde{E}_K$ ; e tali varietà risultano definite in due punti di  $M_n$  i quali, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al 2° fra loro coincidono.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] B. SEGRE, *Invarianti topologico-differenziali, varietà di Veronese e moduli di forme algebriche*, « Ann. di Mat. » (4) 61, 113-138 (1956).
- [2] B. SEGRE, *Some properties of differentiable varieties and transformations, with special reference to the analytic and algebraic cases*, « Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete », N. F., Heft 13 (Berlin, Springer, 1957).
- [3] B. SEGRE, *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Rend. Acc. Lincei », (8) 20, 271-539 (1956).
- [4] A. KAWAGUCHI, *Die Differentialgeometrie höherer Ordnung I. Erweiterte Koordinatentransformationen und Extensoren*, « Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. », (1) 9, 1-152 (1940).
- [5] A. KAWAGUCHI, *Einige Sätze über die Extensoren*, « Annales de la Société Polonaise de Mathématique », 17, 166-176 (1938).
- [6] A. KAWAGUCHI, *Eine Verallgemeinerung von Extensoren*, « Monatsh. », 48, 329-339 (1939).
- [7] T. OKKUBO, *Über die Extensorrechnung in den verallgemeinerten Räumen von Flächenelementen höher Ordnung*, « Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. », 11, 1-37 (1946).
- [8] H. V. CRAIG, *On tensor relative to the extended point transformation*, « Amer. J. M. », 59, 764-774 (1937).
- [9] H. V. CRAIG, *On the structure of intrinsic derivatives*, « Bulletin Amer. Math. Soc. », 52, 332-342 (1947).
- [10] Y. KATSURADA, *On the extended connection parameters in a space with affine connection and Riemannian space*, « Jour. Fac. Sci., Hokkaido Univ. », 12, 17-28 (1951).
- [11] Y. KATSURADA, *On the parallel displacement of arc*, « Tenson, New Series », 2, 85-88 (1952).
- [12] Y. KATSURADA, *Specialization of the theory of a space of higher order II. On the extended Lie derivative*, « Tensor New Series », 2, 15-26 (1952).

**Meccanica razionale.** — *Sopra un notevole fenomeno nel campo delle vibrazioni non lineari di combinazione.* Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata (\*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

In questa Nota si tratta di un interessante fenomeno che, nel campo delle oscillazioni non-lineari di combinazione, si rivela in un particolare vibratore non-lineare forzato in un grado di libertà.

È ben noto che quando si agisce su un oscillatore autonomo con una forza esterna periodica può aver luogo o la sincronizzazione automatica o la demoltiplicazione di frequenza o un certo tipo di moti oscillatori quasi-periodici che, nella pratica, vanno sotto il nome di oscillazioni di combinazione e che possono dar luogo tra l'altro al fenomeno dei battimenti. Se si forza invece, nello stesso modo, un sistema dissipativo, in generale si ha che la frequenza propria del sistema viene automaticamente scartata e si può stabilire solo un moto sincronizzato sulla frequenza della sollecitazione esterna o su una sua sottoarmonica.

Contrariamente a quello che succede in generale, vedremo come, agendo in modo opportuno su un particolare sistema *dissipativo* non-lineare con una sollecitazione esterna periodica, senza nessuna restrizione quantitativa sulla frequenza di questa, si possa eccitare un componente armonico sulla frequenza propria del sistema vibrante. Naturalmente può succedere che il componente armonico suddetto sia prevalente di molto sul componente armonico della frequenza delle sollecitazioni esterne; allora, sensibilmente, si noterà solo il componente armonico proprio e pertanto si potrà ritenere di essere in presenza di un fenomeno di azione asincrona, che per la prima volta si rivela in un vibratore a un solo grado di libertà.

Lo studio del sistema in discorso è condotto sfruttando un rapido metodo, che rientra nella classe dei metodi di perturbazione, e che risulta, in definitiva, una generalizzazione del metodo di Kryloff-Bogoliuboff, esposto in un lavoro, in corso di stampa nel vol. XXVII dei « Rendiconti del Gem. Mat. di Padova », di cui qui riporteremo brevemente senza dimostrazione, solo le linee essenziali per lo studio che ci siamo proposto.

1. Si consideri l'oscillatore non-lineare, schematizzato in fig. 1; costituito da una massa  $M$  collegata, con una molla  $K$  ed una resistenza passiva non-lineare  $\mathcal{R}_1$ , al supporto  $\mathcal{C}_1$  e con una resistenza passiva dello stesso tipo con un supporto  $\mathcal{C}_2$ . Siano  $y_1$  la coordinata del supporto  $\mathcal{C}_1$  rispetto ad un sistema inerziale  $\mathcal{C}$ ,  $y_2$  la coordinata del supporto  $\mathcal{C}_2$  rispetto a  $\mathcal{C}_1$ ,  $q$  la coordinata di  $M$  rispetto a  $\mathcal{C}_1$ . Dette  $\Phi_1, \Phi_2$  le componenti secondo la coordinata  $q$  delle azioni esplicate da  $\mathcal{R}_1$  ed  $\mathcal{R}_2$  su  $M$ , risulti

$$(I) \quad \Phi_1 = -(\alpha_1 \dot{q} + \beta_1 \dot{q}^3) \quad , \quad \Phi_2 = -\alpha_2 (\dot{q} - \dot{y}_2) - \beta_2 (\dot{q} - \dot{y}_2)^3.$$

(\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

Infine siano

$$(2) \quad y_1 = e \sin \omega t \quad , \quad y_2 = h - b \cos (\omega t + \psi),$$

le equazioni del moto di  $\mathcal{C}_1$  rispetto a  $\mathcal{C}$  e di  $\mathcal{C}_2$  relativo a  $\mathcal{C}_1$ . Denotando con  $k$  la costante elastica della molla  $K$  si stabilisce senza alcuna difficoltà l'equazione differenziale del movimento

$$(3) \quad M\ddot{q} + kq + \alpha_1 \dot{q} + \beta_1 \dot{q}^3 + \alpha_2 [\dot{q} - b\omega \sin(\omega t + \psi)] + \beta_2 [\dot{q} - b\omega \sin(\omega t + \psi)]^3 + Me\omega^2 \sin \omega t = 0.$$

Se si scrive la (3) sotto forma adimensionale e si sceglie opportunamente l'unità di tempo, ci si può ridurre a studiare la seguente equazione differenziale

$$(4) \quad \ddot{q} + q - E \sin \omega t = \varepsilon \{ -(\alpha_1 \dot{q} + \beta_1 \dot{q}^3) - \alpha_2 [\dot{q} - a \sin(\omega t + \psi)] - \beta_2 [\dot{q} - a \sin(\omega t + \psi)]^3 \}$$

con evidente significato dei simboli. Si noti che a fattore del secondo membro di (4) si è introdotto il parametro  $\varepsilon$ . Esso sostanzialmente caratterizza la entità delle azioni dinamiche  $\Phi_1, \Phi_2$  che le resistenze passive esercitano sul sistema lineare forzato, nel senso che si può immaginare una successione di sistemi dinamici  $D_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) descritti da equazioni del tipo (4), differenti l'uno dall'altro per il solo valore  $\varepsilon_r$  del parametro  $\varepsilon$ , e tali che  $\varepsilon_r$  tende a zero per  $r$  tendente a  $+\infty$ . Ovviamente il parametro  $\varepsilon$  è stato introdotto per poter analizzare il comportamento delle soluzioni di (4), con il metodo di perturbazione che esponiamo nel prossimo numero, per valori del parametro stesso appartenenti ad un intorno dello zero.

Diciamo fin d'ora che si supporrà soltanto  $\omega \neq 1$  e che ci porremo senz'altro da un punto di vista più generale di quello della risonanza sottoarmonica non imponendo ad  $\omega$  nessuna altra condizione.

La questione che ci porremo e che risolveremo nei prossimi numeri è di determinare soltanto per quale valore di  $A$  un moto di equazione

$$(5) \quad q = A \cos(t + \vartheta) + \frac{E}{1 - \omega^2} \sin \omega t$$

rappresenti, almeno per qualche valore di  $\vartheta$ , la prima approssimazione di un moto effettivo del sistema per  $t$  variabile da 0 a  $+\infty$ . Non ci porremo invece il problema di determinare in prima approssimazione il valore di  $\vartheta$ . Questo problema del resto non si può porre, se non si vuole, come noi non vogliamo, fare alcuna ipotesi sul valore della frequenza della sollecitazione esterna  $\omega$ , tranne, beninteso, quella già fatta che  $\omega$  sia diverso da 1. Con ciò intenderemo di aver determinato, in prima approssimazione, il componente armonico della frequenza propria del sistema vibrante. Ma il problema sarà completamente precisato nel prossimo numero.

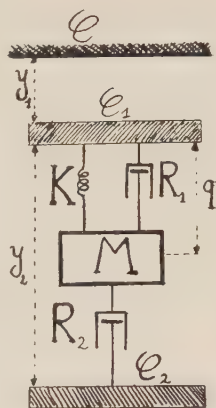


Fig. 1.



2. Si consideri l'equazione:

$$(6) \quad \ddot{q} + q - E \sin \omega t = \varepsilon f(q, \dot{q}, t, \varepsilon)$$

e supponiamo per semplicità che la  $f$  sia polinomiale in  $q$  e  $\dot{q}$  e che risulti limitata in modulo da un numero  $M(a, b)$ , indipendente da  $t$  e da  $\varepsilon$ , per ogni  $|x| < a$ ,  $|y| < b$ , per qualunque  $t$  e per  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .

Si consideri accanto alla (6) l'equazione lineare ottenuta da questa per  $\varepsilon = 0$  e la famiglia  $S_A$  delle  $\infty^1$  sue soluzioni ottenute da (5) per ogni fissato  $A$  al variare di  $\vartheta$ . Nello spazio  $q, \dot{q}, t$  le traiettorie corrispondenti alle soluzioni di  $S_A$  stanno su una superficie  $\Sigma_A$ , che esse coprono, generata da una circonferenza di raggio  $A$ , che si muove, mantenendosi su un piano parallelo al piano  $(q, \dot{q})$ , ed il cui centro descrive la linea di equazioni

$$(7) \quad q = \frac{E}{1 - \omega^2} \sin \omega t, \quad \dot{q} = \frac{E \omega \cos \omega t}{1 - \omega^2}, \quad t \geq 0.$$

Ad ogni  $A$  corrisponde naturalmente una di tali superficie. Indicheremo inoltre con  $I_{\Sigma_A}$  la regione dello spazio così definita: In ogni piano  $t = \text{cost} \geq 0$  si consideri il cerchio  $\mathcal{C}(t)$  di raggio  $A$ , intersezione di  $\Sigma_A$  con detto piano ed un intorno di  $\mathcal{C}(t)$ ,  $I_{\mathcal{C}(t)}$ , regione del piano del tipo della corona circolare, delimitata da due curve  $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$  semplici chiuse, l'una  $\mathcal{C}'$  contenente nel suo interno  $\mathcal{C}(t)$  e l'altra  $\mathcal{C}''$  contenente nel suo interno il centro di  $\mathcal{C}(t)$  e contenuta nel cerchio  $\mathcal{C}(t)$ . Se per ogni  $t$  si costruisce un  $I_{\mathcal{C}(t)}$ , facendo, variare con continuità le curve  $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$ , queste generano la frontiera di un intorno  $I_{\Sigma_A}$  di  $\Sigma_A$ . Denoteremo con  $\delta(I_{\mathcal{C}(t)})$  il massimo dei segmenti appartenenti alle semirette uscenti dal centro di  $\mathcal{C}(t)$  ed i cui estremi sono punti di  $\mathcal{C}'$  e  $\mathcal{C}''$ , e con  $\delta(I_{\Sigma_A})$  il massimo dei  $\delta(I_{\mathcal{C}(t)})$  al variare di  $t$  da 0 a  $+\infty$ .

Nel lavoro citato nella prefazione abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Si costruisca anzitutto l'espressione

$$(8) \quad \Delta^{(r)} = - \int_{2rn\pi/\omega}^{2(r+1)n\pi/\omega} f(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau, \varepsilon) \sin(\tau + \vartheta) d\tau,$$

ove  $q(t)$  è il secondo membro di (5),  $r$  è un intero positivo qualunque ed  $n$  è pure un intero positivo qualunque, ma tale però che risulti  $n/\omega > 3/2$ . Per la ipotesi fatta che  $f$  sia polinomiale in  $q$  e  $\dot{q}$ ,  $\Delta^{(r)}$  potrà pensarsi come somma di una parte indipendente da  $\vartheta$ , eventualmente nulla, che denoteremo con  $\mathfrak{R}_0^{(r)}(A)$ , e di un'altra variabile con  $\vartheta$  ed  $A$ , a valore medio nullo, per ogni valore di  $A$ , nell'intervallo di variabilità di  $\vartheta$  da 0 a  $2\pi$ .

Se esiste un  $A^*$  tale che, qualunque sia  $r$ , risulti simultaneamente

$$(9) \quad \mathfrak{R}_0^{(r)}(A^*) = 0, \quad \left[ \frac{d\mathfrak{R}_0^{(r)}(A)}{dA} \right]_{A=A^*} < \mu < 0,$$

allora esiste un  $\varepsilon_0$  positivo tale che per ogni  $\varepsilon < \varepsilon_0$  è possibile determinare un intorno di  $\Sigma_{A^*}$ ,  $I_{\Sigma_{A^*}}$ , il cui  $\delta(I_{\Sigma_{A^*}})$  è finito e tende a zero al tendere a zero di  $\varepsilon_0$ , dal quale nessuna curva integrale dell'equazione (6), uscente da un punto della regione  $I_{\mathcal{C}(0)}$  per  $t = 0$ , esce per  $t$  crescente.

Naturalmente se  $f(q, \dot{q}, t, \varepsilon)$  è periodica di periodo  $2\pi/\omega$  in  $t$ , o di periodo multiplo di questo, si potrà scegliere  $n$  in maniera che addirittura  $2n\pi/\omega$  risulti un multiplo anche del periodo di  $f$ , allora  $\Delta^{(r)}$  e quindi anche  $\mathfrak{R}_0^{(r)}(A)$  non dipenderà da  $r$ : lo denoteremo con  $\mathfrak{R}_0(A)$ .

In questo caso il teorema in discorso sussiste se esiste un  $A^*$  per cui risulti

$$(10) \quad \mathfrak{R}_0(A^*) = 0, \quad \left[ \frac{d\mathfrak{R}_0(A)}{dA} \right]_{A=A^*} < 0.$$

3. Applichiamo il procedimento esposto nel n. 2 all'equazione (4). Calcoliamoci perciò l'integrale a secondo membro di (8) assumendo per  $f$  l'espressione a secondo membro di (4). Non occorrerà precisare il numero  $n$ , dato anche che il secondo membro di (4) è funzione periodica di  $t$  di periodo  $2\pi/\omega$ . Anzi dei termini dell'integrale a secondo membro di (8) non occorrerà calcolare quelli per i quali si può riconoscere, senz'altro, che essi daranno contributo nullo alla formazione di  $\mathfrak{R}_0(A)$ .

Si ha quindi la seguente eguaglianza

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0(A_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2n\pi/\omega} \{ -(\alpha_1 + \alpha_2) \dot{q} - (\beta_1 + \beta_2) \dot{q}^3 + \\ & + 3\beta_2 \dot{q}^2 a \sin(\omega\tau + \psi) - 3\beta_2 \dot{q} a^2 \sin^2(\omega\tau + \psi) \} \sin(\tau + \vartheta) d\tau, \end{aligned}$$

che si riduce, tenuto conto dell'espressione di  $q(t)$  fornita da (5), ed omettendo al solito termini che certamente danno contributo nullo, alla

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0(A_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \left\{ \int_0^{2n\pi/\omega} A \left[ \alpha_1 + \alpha_2 + 3(\beta_1 + \beta_2) \frac{E^2 \omega^2 \cos^2 \omega\tau}{(1 - \omega^2)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 6\beta_2 \frac{E\omega}{1 - \omega^2} \cos \omega\tau \sin(\omega\tau + \psi) + 3\beta_2 a^2 \sin^2(\omega\tau + \psi) \right] \sin^2(\tau + \vartheta) d\tau + \right. \\ & \left. + (\beta_1 + \beta_2) \int_0^{2n\pi/\omega} A^3 \sin^4(\tau + \vartheta) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

e quindi ancora alla seguente

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_0(A_0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \left\{ A \int_0^{2n\pi/\omega} \left[ \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\beta_2 a^2 + \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) \frac{E^2 \omega^2}{(1 - \omega^2)^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3\beta_2 a \frac{E\omega}{1 - \omega^2} \sin \psi \right] \sin^2(\tau + \vartheta) d\tau + (\beta_1 + \beta_2) A^3 \int_0^{2n\pi/\omega} \sin^4(\tau + \vartheta) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Si ottiene finalmente con facili calcoli

$$\begin{aligned} (11) \quad \mathfrak{R}_0(A) = & -\frac{n\pi}{\omega} A \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\beta_2 a^2 - 3\beta_2 a \sin \psi \frac{E\omega}{1 - \omega^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}(\beta_1 + \beta_2) \frac{E^2 \omega^2}{(1 - \omega^2)^2} + \frac{3}{4}(\beta_1 + \beta_2) A^2 \right\}. \end{aligned}$$

Se sono soddisfatte le seguenti condizioni strutturali

$$(12) \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 > 0 \\ 3\beta_2^2 \sin^2 \psi a^2 > 2(\beta_1 + \beta_2) \left( \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2} \beta_2 a^2 \right), \end{cases}$$

e quindi di conseguenza se è soddisfatta la

$$(13) \quad 3\beta_2^2 a^2 > 2(\beta_1 + \beta_2) \left( \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2} \beta_2 a^2 \right),$$

certamente esistono valori di  $\psi$  e di  $E$  per cui l'equazione  $\mathcal{R}_0(A) = 0$  ammette una soluzione positiva soddisfacente, come si riconosce con un facile calcolo, alla condizione (10<sub>2</sub>). Perché sia soddisfatta le (13) assieme alle (12<sub>1</sub>) bisogna che risulti  $\beta_1 \beta_2 < 0$ ; ciò comporta che delle due resistenze  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  una sia di tipo che diremo forte e l'altra di tipo che diremo debole, estendendo la dizione usata per le forze di richiamo elastiche.

Il massimo valore di  $A$  si ha per quel valore di  $E$  per cui risulta

$$(14) \quad \frac{E}{1 - \omega^2} = \frac{\beta_2 a \sin \psi}{(\beta_1 + \beta_2) \omega},$$

e si ha precisamente

$$(15) \quad A_{\max}^2 = \frac{2}{3} \frac{3\beta_2^2 a^2 \sin^2 \psi - 2(\beta_1 + \beta_2) \left( \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2} \beta_2 a^2 \right)}{(\beta_1 + \beta_2)^2}.$$

Dalle (14) e (15) si vede che mentre  $E/(1 - \omega^2)$  dipende da  $\omega$ , non ne dipende  $A_{\max}$ . Si deduce che il componente armonico delle frequenza propria può essere preponderante sul componente della frequenza esterna. Invece per  $E$  esterno ad un certo intervallo, che è facile determinare, il componente armonico della frequenza propria non viene eccitato.

**Fisica.** — *Comportamento anomalo della sezione d'urto per neutroni veloci nella fotodisintegrazione del Cr, As, I, Ta* (\*). Nota di FILIPPO FERRERO, RENATO MALVANO e CARLO TRIBUNO, presentata (\*\*) dal Socio G. COLONNETTI.

Studiando la componente neutronica veloce nelle reazioni fotonucleari, abbiamo misurato, servendoci del dispositivo sperimentale descritto in un precedente lavoro <sup>(1)</sup>, le curve di attivazione fino a 30 MeV di 25 elementi con numero atomico variabile da 13 a 82. Il contatore di neutroni veloci è costituito da un rivelatore a soglia, la cui sensibilità è costante, entro un 10%, da 5 a 14 MeV.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Torino. Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (Sezione di Torino).

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) F. FERRERO, A. O. HANSON, R. MALVANO, C. TRIBUNO, «Nuovo Cimento», 4, 418 (1956).

Le curve di attivazione sono state misurate usando come sorgente di raggi X il betatrone Brown-Boveri installato presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Torino.

Tra i 25 elementi esaminati, sono stati trovati 4 casi particolarmente interessanti: Cr, As, I, Ta.

Le relative curve di attivazione sono riportate in figura. Le sezioni di urto per produzione di fotoneutroni veloci, ricavate dalle curve di attivazione, con un metodo di successive approssimazioni, rivelano l'esistenza di due massimi separati, in luogo di un solo massimo, come ci si aspetterebbe dall'andamento della sezione d'urto per assorbimento gamma, che presenta indistintamente per tutti gli elementi una risonanza « larga », la cosiddetta risonanza gigante.

I rapporti sperimentali tra la sezione d'urto integrata corrispondente al secondo massimo e la sezione d'urto integrata corrispondente al primo massimo risultano:

Cr:  $0,7 \pm 0,14$  ; As:  $0,6 \pm 0,12$  ; I:  $0,4 \pm 0,08$  ; Ta:  $0,5 \pm 0,1$ .

Osserviamo che questi elementi sono isotopi puri ad eccezione del cromo, dove tuttavia la percentuale di  $\text{Cr}^{52}$  è del 83,7 %. Non si esclude, quindi, che l'assenza di un secondo massimo negli altri elementi esaminati non sia dovuta, in alcuni casi, alla loro complessità isotopica.

Per il tantalio abbiamo misurato l'emissione totale di fotoneutroni con il metodo della radioattività residua, trovando che la sezione d'urto al di sopra di 23 MeV ricesce abbastanza bruscamente, proprio nella regione dove si trova il secondo massimo della sezione d'urto per fotoneutroni veloci. Sembrerebbe quindi, almeno per il tantalio, che l'attribuire il secondo massimo alla competizione di un processo  $(\gamma, 2n)$  non sarebbe soltanto in contrasto con la natura statistica di questo tipo di processo, ma risulterebbe anche in disaccordo con i risultati sperimentali sulla sezione d'urto  $(\gamma, n)$  totale.

Ci sembra prematuro cercare una spiegazione dell'effetto riscontrato in questi 4 elementi in quanto sarebbe necessario avere un quadro più completo sia sulla sezione d'urto per neutroni veloci negli altri elementi, sia, sulla distribuzione angolare dei fotoneutroni a varie energie. Possiamo tuttavia sottolineare la rassomiglianza dell'effetto da noi riscontrato con i due massimi separati nelle sezioni d'urto  $(\gamma, n)$  e  $(\gamma, p)$  rispettivamente nel  $\text{Mg}^{25}$  <sup>(2)</sup>  $\text{A}^{40}$  <sup>(3)</sup>,  $\text{Mo}^{100}$  <sup>(4)</sup>. In questi casi una delle spiegazioni suggerite consiste nel supporre che gli stati iniziali protonici delle transizioni relative al processo  $(\gamma, p)$  siano spostati rispetto agli stati iniziali protonici e neutronici delle transizioni relative al processo  $(\gamma, n)$  <sup>(5)</sup>. La stessa cosa si potrebbe quindi

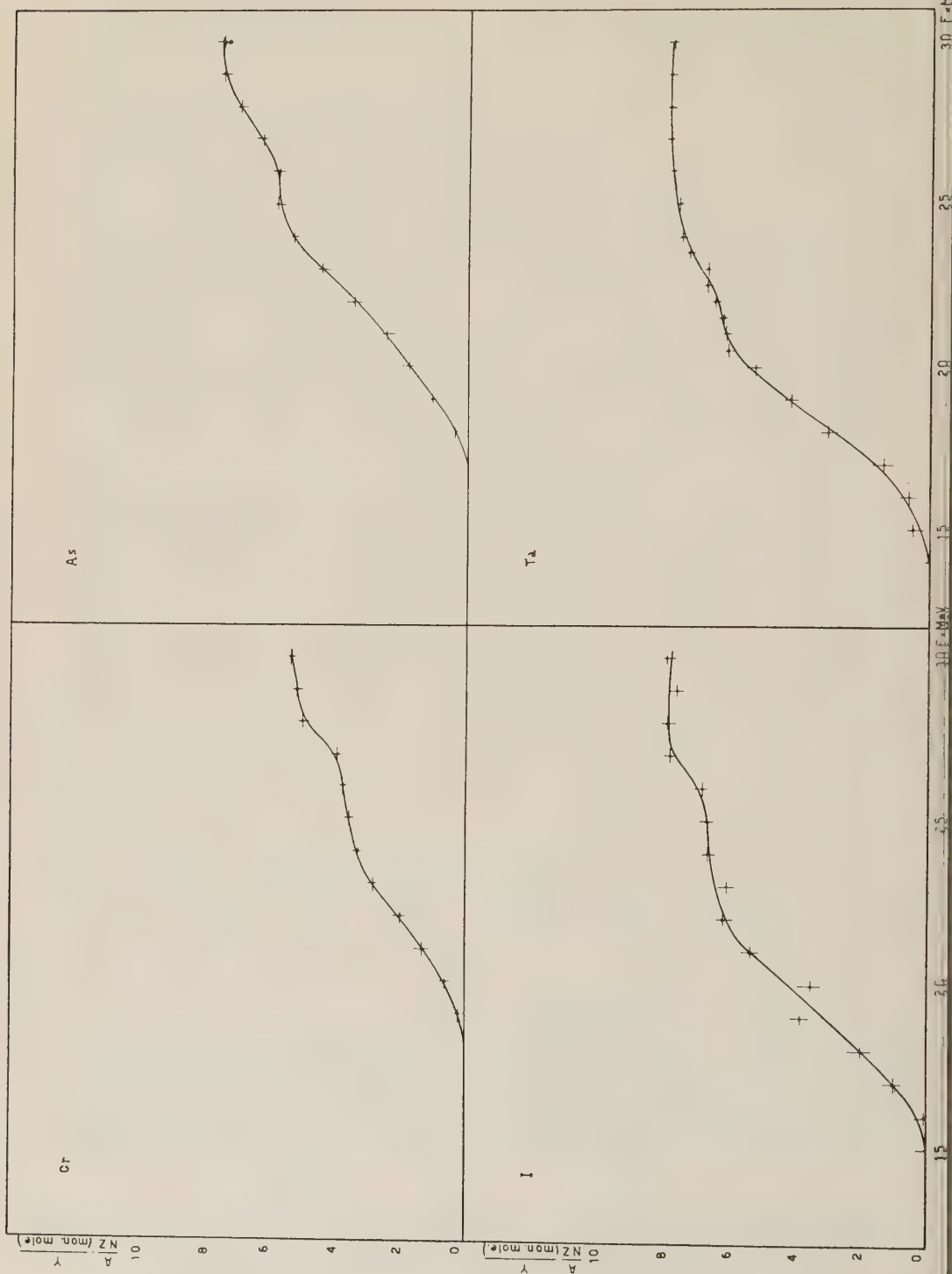
(2) L. KATZ, R. N. HASLAM, J. GOLDBERG, J. G. V. TAYLOR, « Can. Journ. of Physics », 32, 580 (1954).

(3) D. MCPHERSON, E. PEDERSON, I. KATZ, « Can. Jour. of Physics », 32, 593 (1954).

(4) W. A. BUTLER, G. M. ALMY, « Phys. Rev. », 91, 58 (1953).

(5) F. FERRERO, A. O. HANSON, R. MALVANO, C. TRIBUNO, in corso di stampa sul « Nuovo Cimento ».





pensare per gli stati neutronici iniziali delle transizioni relative rispettivamente al primo ed al secondo massimo nella sezione d'urto per fotoneutroni veloci.

A questa possibile spiegazione basata sulla teoria a particelle indipendenti delle reazioni fotonucleari <sup>(6)</sup>, altre ne possono venire sostituite.

Si potrebbe pensare, ad esempio, di riprendere il modello di Goldhaber e Teller <sup>(7)</sup>, nel quale si sia però introdotta in qualche modo la condizione di non sfericità del nucleo <sup>(8)</sup> (condizione particolarmente importante per il tantalio, che ha un momento di quadrupolo elettrico elevatissimo): questo potrebbe dar luogo allo «splitting» della risonanza gigante.

Inoltre si potrebbe tener conto delle transizioni di quadrupolo che possono ingenerarsi nel moto cooperativo nucleare e che darebbero luogo ad assorbimento elettromagnetico risonante in posizione spostata verso le alte energie rispetto alla risonanza gigante (di tipo dipolare) <sup>(9)</sup>.

Infine si potrebbe pensare che il ricrescere della sezione d'urto al di là della risonanza gigante sia dovuto alla crescente importanza che viene ad assumere alle alte energie il processo a quasi-deutone, processo che, postulato da Levinger <sup>(10)</sup> ha ottenuto convincenti conferme sperimentali specialmente negli elementi leggeri <sup>(11)</sup>.

L'accettare una spiegazione piuttosto che un'altra, tuttavia, è soltanto possibile su basi quantitative; purtroppo i dati sperimentali che abbiamo a disposizione ed il modo stesso con cui sono formulate alcune delle teorie ricordate non sono tali da permetterci, almeno per ora, di fare una scelta del genere.

Ringraziamo i proff. L. Katz, A. O. Hanson, E. Toms per i suggerimenti offertici nella interpretazione dei risultati sperimentali.

**Chimica.** — *Su di un metodo per purificare i 3-β-idrossi-Δ<sup>5</sup>-steroidi* <sup>(\*)</sup>. Nota di AURELIO ROMEO e RICCARDO VILLOTTI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. BARGELLINI.

Molti composti steroidici naturali e sintetici contengono in 3-β un ossidrilico ed in posizione 5 un doppio legame. La purificazione di tali prodotti, da altri steroidi ossidrilati isomeri (doppio legame in posizione diversa) o aventi una formula di struttura molto simile, risulta incompleta essendo i metodi fino ad ora utilizzati, non altamente selettivi. Così ad esempio,

(6) D. H. WILKINSON, «Proc. Int. Conf. Nuclear Reactions», Amsterdam 1956, p. 1039.

(7) M. GOLHABER, E. TELLER, «Phys. Rev.», 74, 1046 (1948).

(8) M. DANOS, «Bull. Am. Phys. Soc.», 1, 135 (1956).

(9) U. L. BUSINARO, S. GALLONE, «Nuovo Cimento», X-I, 1285 (1955).

(10) J. S. LEVINGER, «Phys. Rev.», 84, 43 (1951); K. G. DEDRICK, «Phys. Rev.», 100, 58 (1955).

(11) A. C. ODIAN et Al., «Phys. Rev.», 102, 837 (1956).

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

viene sfruttata la diversa velocità di idrolisi dei tosilati<sup>(1)</sup> per la purificazione del 22-23-diidrostigmasterolo<sup>(2)</sup> ottenuto per parziale idrogenazione [I] dell'acetilstigmasterolo.

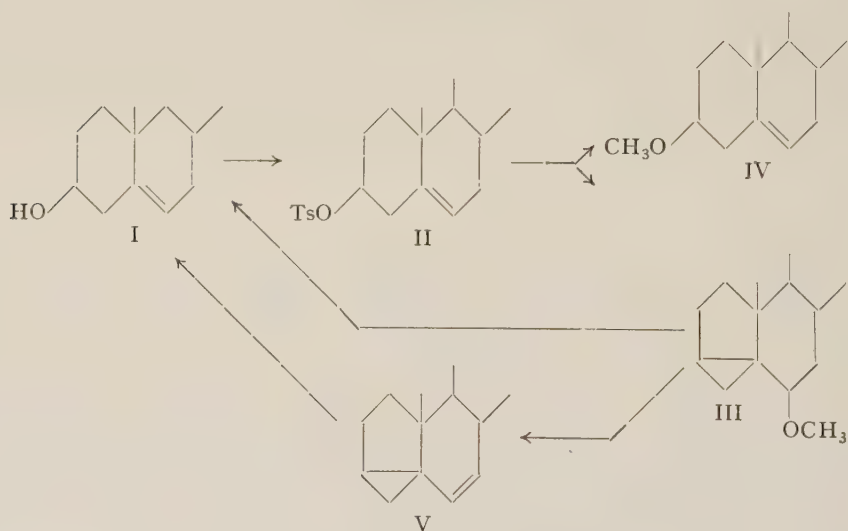
Noi abbiamo messo a punto un metodo che permette di purificare i 3- $\beta$ -idrossi- $\Delta^5$ -steroidi (I) da altri composti steroideici ossidrili saturi o aventi una insaturazione lontana dalle posizioni 5 e 6. Il nostro lavoro si è basato sulle seguenti considerazioni:

1° I tosilati dei 3- $\beta$ -idrossi- $\Delta^5$  steroidi (II), quando sono trattati con alcool metilico e acetato di potassio [2], danno una reazione caratteristica<sup>(3)</sup> di questa classe di composti<sup>(4)</sup> trasformandosi in una miscela contenente il 3,5-ciclo-6-metossi-steroidi (III) misto a piccole quantità del 3-metossi- $\Delta^5$ -steroidi (IV).

2° I 3,5-ciclo-6-metossi-steroidi (III) in presenza di allumina Brockman N. 1 si trasformano, perdendo alcool metilico, nei 3-5-ciclo- $\Delta^6$ -steroidi (V) [3]<sup>(5)</sup>.

3° I 3-5-ciclo- $\Delta^6$ -steroidi (V) ed i 3-5-ciclo-6-metossi-steroidi (III) sono adsorbiti dall'allumina meno facilmente dei 3-metossi- $\Delta^5$ -steroidi (IV).

4° I 3-5-ciclo- $\Delta^6$ -steroidi (V) ed i 3-5-ciclo-6-metossi-steroidi (III) vengono facilmente trasformati nei 3- $\beta$ -idrossi- $\Delta^5$ -steroidi di partenza (I) [4].



(1) STOLL dimostrò che il tosilato del colesterolo reagisce rapidamente con acqua per dare il colesterolo, mentre i tosilati degli steroidi saturi sono più stabili «Z. physiol. Chem.», 207, 147 (1932); *ibidem*, 246, 1 (1937).

(2) Benché il doppio legame in posizione 5 sia più resistente all'idrogenazione di quello in posizione 22, la reazione è parzialmente selettiva e si ha formazione di altri prodotti come il 5-6-diidrostigmasterolo e lo stigmastanolo.

(3) In base ai dati bibliografici fino ad ora noti.

(4) Il tosilato del colestano per esempio quando è trattato con alcool metilico, si trasforma parzialmente dando  $\Delta^2$  e  $\Delta^3$  colesteni e il colestanolmetiletere (HAROLD R. NACE, «J. Am. Chem. Soc.», 74, 5937 (1952).

(5) Si formano anche delle piccole quantità di 3-metossi- $\Delta^5$ -steroidi.

Tenendo presenti i 4 punti specificati precedentemente, abbiamo pensato di utilizzare il seguente procedimento: si esegue sul prodotto di partenza una tosilaione, la miscela dei tosiliati è messa a reagire con alcool metilico e acetato di potassio, ed il prodotto risultante è sottoposto a cromatografia con allumina Brockman N. 1; le prime frazioni contengono il 3-5-ciclo  $\Delta^6$  steroide misto a 3-5-ciclo-6-metossi-steroidi ed a  $\Delta^2$  e  $\Delta^3$  steroidi (6). Si riuniscono i primi eluati e si trattano con una soluzione idro-acetonica di acido solforico, così il 3-5-ciclo  $\Delta^6$  steroide e il 3-5-ciclo-6-metossi-steroidi vengono ritrasformati nel 3  $\beta$  idrossiderivato contenuto nella miscela di partenza, mentre i  $\Delta^2$  e  $\Delta^3$  steroidi rimangono inalterati; eseguendo una nuova cromatografia su allumina i  $\Delta^2$  e  $\Delta^3$  steroidi passano nelle prime frazioni mentre il 3  $\beta$  idrossi- $\Delta^5$ -steroidi puro, viene eluito nelle ultime frazioni.

Il metodo da noi elaborato è stato sperimentato con risultati soddisfacenti sui seguenti steroidi impuri:

a) Colesterolo impuro di colestano (2 parti di colesterolo, 1 parte di colestano). Si è separato il colesterolo puro.

b) 22-23 diidrostigmasterolo ottenuto per idrogenazione selettiva dello stigmasterolo acetato. Si è separato il 22-23 -diidrostigmasterolo puro. La purezza del prodotto è stata controllata mediante le costanti cristallografiche (vedi tabella I) [5].

TABELLA I.

COMPOSTO	asse <i>a</i>	asse <i>b</i>	asse <i>c</i>	$\beta$	tipo di struttura
22-23-diidrostignasterolo [5]	10,33	7,62	35,21	94°30'	a 212
22-23-diidrostigmasterolo ottenuto per idrogenazione selettiva dell'acetil-stigmasterolo . . . . .	10,33	7,62	35,21	94°30'	a 212

Questo metodo di purificazione è stato da noi applicato a composti non contenenti nella molecola altre funzioni ossigenate oltre all'ossidrile in 3- $\beta$ . Tuttavia riteniamo che si possa applicare vantaggiosamente anche a classi più complesse di composti steroidici, essendo stata resa di carattere quasi generale la preparazione dei 3-5-ciclo- $\Delta^6$ -steroidi [3].

(6) Provenienti dalle impurezze formate da composti steroidici saturi o aventi un doppio legame lontano dalle posizioni 5 e 6.



PARTE SPERIMENTALE <sup>(7)</sup>.

(in collaborazione con Vincenzo Tortorella).

*Separazione del colesterolo da una miscela contenente 2 parti di colesterolo e 1 parte di colestano.*

1.5 g di una miscela formata da colesterolo (2 parti) e colestano (1 parte) sono stati trattati con 42 cm<sup>3</sup> di piridina, quindi sono stati aggiunti 3,9 g di cloruro dell'acido p-toluensolfonico e si è lasciato il tutto in riposo a temperatura ambiente per 4 giorni. È stato quindi aggiunto ghiaccio fino ad avere un volume circa doppio di quello di partenza, e dopo aver lasciato a freddo per un'ora la sospensione è stata estratta con etere. La soluzione eterea è stata lavata ripetutamente con acido cloridrico 2 N, poi con acqua quindi con soluzione di bicarbonato sodico, e ancora con acqua fino a neutralità. La soluzione eterea è stata essiccata su solfato sodico e quindi è stato evaporato l'etere. Si hanno g 2,2 di residuo solido.

Ai 2,2 g, formati da una miscela di tosilati, sono stati aggiunti 2,2 g di acetato di potassio fuso a 110 cm<sup>3</sup> di alcool metilico anidro. La miscela è stata fatta bollire a ricadere per 3 ore. L'alcool metilico è stato evaporato ed il residuo ripreso con acqua ed estratto con etere. La soluzione eterea è stata lavata con acqua, idrato sodico 2 N, e ancora con acqua. La soluzione eterea è stata essiccata su solfato sodico e per evaporazione si sono avuti 1,6 g di un prodotto ceroso.

Una parte del prodotto ceroso (1 g) è stato cromatografato su 30 g di allumina Brockman N. 1. Il prodotto è stato sciolto in esano ed è stato fatto adsorbire sulla colonna, le eluizioni sono state iniziate dopo 2 ore e sono state ottenute le seguenti frazioni (ciascuna frazione deriva da 50 cm<sup>3</sup> di eluato):

N.	Solvente	mg	aspetto	P. f.
1	Esano	385	olio misto a crist.	—
2	Esano	120	cristalli	53°-57°
3	Esano	14	olio	—
4	Esano - benzolo (9 : 1)	6	olio	—
5	Esano - benzolo (8 : 2)	16	olio	—
6	Esano - benzolo (1 : 1)	28	olio	—
7	Benzolo	12	olio	—
8	Etere etilico	150	cristalli	77°-80°
9	Etere etilico	6	cera	—
10	Metanolo	147	solido	103°-117°
11	Metanolo	4	solido	—

(7) I punti di fusione sono stati determinati in un blocco di rame, non sono stati corretti. Le analisi elementari sono state eseguite nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Università di Basilea dal sig. E. Thommen.

La prima e la seconda frazione della cromatografia precedente sono state riunite e 0,3 g di questo prodotto sono stati sciolti in 12 cm<sup>3</sup> di acetone contenente 1,5 cm<sup>3</sup> di acido solforico al 65 %. La soluzione è stata fatta bollire a ricadere per 3 ore, si è lasciata quindi in ghiacciaia per una notte ed il solido precipitato è stato filtrato. Grammi 0,170 che sono stati cromatografati con 5 g di allumina Brockman n. 2 (ciascuna frazione deriva da 50 cm<sup>3</sup> di eluato):

N.	Solvente	mg	aspetto	P. f.
1	Esano	45	solido	68°-80°
2	Esano	10	cera	—
3	Esano- benzolo (1 : 1)	6	cera	—
4	Benzolo	46	solido	143°-147°
5	Benzolo	62	solido	143°-147°
6	Metanolo	3	solido	—

La quarta e la quinta frazione sono state riunite e per cristallizzazione da alcool etilico danno 95 mg di colesterolo. P. f. 149°  $[\alpha]_D^{20} = -39$ . Le rese, considerando il colesterolo di partenza e le varianti di peso portate durante la lavorazione, sono state del 30 % circa.

*Purificazione del 22-23-diidrosgigmasterolo ottenuto per idrogenazione selettiva dello stigmasterolo.*

Lo stigmasterolo acetato è stato idrogenato come descritto da Bernstein e Wallis [1] (si è fatto assorbire però una quantità maggiore di idrogeno: per 1 mole di acetilsgigmasterolo 1,3 moli di idrogeno).

Il prodotto ottenuto ha le seguenti costanti: p. f. 127°-131°;  $[\alpha]_D^{20} = -8$  (CHCl<sub>3</sub>)  $c = 1$ , tubo 1 dm.

L'acetilderivato ottenuto dall'idrogenazione è stato saponificato con idrato di potassio metilalcolico, il prodotto ottenuto ha le seguenti costanti: p. f. 127°-131°;  $[\alpha]_D^{20} = -8$  (CHCl<sub>3</sub>),  $c = 1$ , tubo 1 dm.

0,55 g di prodotto ottenuto dalla saponificazione vengono sciolti in 13 cm<sup>3</sup> di piridina e quindi si aggiungono 1,3 g di cloruro dell'acido p-toluensolfonico. La miscela è lasciata per 4 giorni a temperatura ambiente, quindi si aggiunge ghiaccio fino ad avere un volume doppio, si lascia per un'ora circa in ghiacciaia e quindi si estrae con etere. La soluzione eterica viene lavata con acido cloridrico 2 N, con una soluzione di bicarbonato sodico, e con acqua. Si essicca la soluzione su solfato sodico e quindi si evapora l'etere. Si ottengono 0,7 g di un prodotto solido.

0,7 g del prodotto ottenuto dalla tosilaione sono trattati con 0,7 g di acetato di potassio fuso e 35 cm<sup>3</sup> di alcool metilico, si fa bollire il tutto a ricadere per 3 ore. Si evapora l'alcool metilico e si aggiunge acqua, quindi si estrae con etere la soluzione. L'estratto eterico è lavato con una soluzione di idrato sodico 2 N, di acido cloridrico 2 N e quindi con acqua. La soluzione è seccata su solfato sodico e per evaporazione dell'etere si hanno 0,52 g di un prodotto ceroso. Il prodotto ottenuto ha il seguente potere rotatorio specifico:  $[\alpha]_D^{20} = +19$  (CHCl<sub>3</sub>)  $c = 1$ , tubo da 1 dm.

0,5 g del prodotto precedente vengono cromatografati su 15 g di allumina Brockman N. 1. Il prodotto è stato sciolto in esano ed è stato fatto adsorbire sulla colonna, le eluizioni sono state iniziate dopo 2 ore e sono state ottenute le seguenti frazioni (ciascuna frazione deriva dalla concentrazione di 25 cm<sup>3</sup> di eluato).

N.	Solvente	mg	aspetto	P. f.
1	Esano	185	cera	—
2	Esano	70	cera	—
3	Esano	23	cera	—
4	Esano	7	cera	—
5	Esano - benzolo (1 : 1)	8	cera	—
6	Benzolo	20	cera	—
7	Benzolo	8	cera	—
8	Metanolo	80	cera	—

Si riuniscono le prime tre frazioni che vengono trattate con 10 cm<sup>3</sup> di acetone contenente 1,2 cm<sup>3</sup> di acido solforico al 65 %. La soluzione viene fatta bollire a ricadere e quindi si evapora l'acetone nel vuoto e si diluisce con acqua.

Operando come precedentemente descritto per il colesterolo (dopo la rigenerazione con soluzione idroacetonica di acido solforico) si ottengono 50 mg di 22-23-diidrostigmasterolo avente un p. f. di 135°-136° e un  $[\alpha]_D^{20} = -32$  (CHCl<sub>3</sub>),  $c = 1$ , tubo da 1 dm.

L'analisi elementare ha dato i seguenti valori:

trov. % :	C	82,00	H	12,42
per C <sub>29</sub> H <sub>50</sub> O · 1/2 H <sub>2</sub> O calc. :		82,21		12,14

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] BERNSTEIN e WALLIS, « J. Org. Chem. », 2, 341 (1938).
- [2] W. STOLL, « Z. Ph. Chem. », 207, 147 (1932).
- [3] AURELIO ROMEO e RICCARDO VILLOTTI, « Annali di Chimica », 47, 685 (1957).
- [4] B. RIEGEL, G. P. HAGER, B. L. ZENIT, « J. Am. Chem. Soc. », 68, 2562 (1946).
- [5] AURELIO ROMEO, RICCARDO VILLOTTI, VINCENZO CARELLI, « Annali di Chimica », 46, 1092 (1956).

**Mineralogia.** — *Metodo di determinazione del calcio e del magnesio nelle rocce mediante il diffrattometro a raggi X* (\*). Nota di FIORENZO MAZZI, presentata (\*\*) dal Socio G. CAROBBI.

#### INTRODUZIONE.

Fra le ricerche di metodologia geochimica, in corso da tempo in questo Istituto, per la messa a punto di metodi rapidi di analisi chimica delle rocce, è stato preso in esame un metodo basato sulla diffrazione dei raggi X.

Fondamento di un qualsiasi metodo di dosaggio di elementi chimici per via roentgenografica, è di ottenerli in composti cristallini, possibilmente semplici, e di osservare le intensità degli effetti di diffrazione prodotti da ciascuno di questi. Poiché queste intensità sono proporzionali alla quantità relativa del composto, è teoricamente possibile risalire alla quantità di ogni elemento legato nel composto stesso. In linea di principio sarebbe assai rapida una analisi per mezzo dei raggi X di una miscela di varie specie di cristalli, ciascuna delle quali contenente un particolare ione da determinarsi, ottenuta direttamente dalla soluzione di una roccia. Disgraziatamente il problema non è così semplice come parrebbe, perché dal prodotto della soluzione di una roccia si ottengono in genere cristalli di sali doppi, di sali complessi o di soluzioni solide in cui gli elementi da dosare possono essere variamente distribuiti. È questa in sostanza la stessa difficoltà che si presenta nella analisi mineralogica quantitativa di una roccia per mezzo dei raggi X.

È per questa ragione che per il momento si è considerato un caso semplice, cioè il dosaggio del calcio e del magnesio in una miscela di cristalli che li contengono. Il metodo richiede quindi una separazione preliminare di tutti gli altri elementi contenuti nella roccia prima di precipitare insieme dalla soluzione il calcio ed il magnesio. È da notare tuttavia che anche con questa limitazione, il metodo conduce ad un sensibile risparmio di tempo nel corso della esecuzione di una analisi di una roccia.

La principale difficoltà di ogni analisi quantitativa dei componenti una miscela mediante raggi X deriva dal diverso coefficiente di assorbimento dei raggi X stessi da parte dei vari componenti: questo fa sì che, a parità di condizioni sperimentali, non esista una relazione lineare tra le proporzioni delle sostanze nella miscela e le intensità degli effetti di diffrazione relativi. Il coefficiente di assorbimento viene generalmente considerato costante per ogni singola miscela, purché la polvere sia sufficientemente fine in modo da evitare effetti di diverso « microassorbimento » fra i vari granuli della polvere. Tale coefficiente, che dipende dalle quantità relative dei componenti

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Firenze. Centro di Studio per la Geochimica del C.N.R.

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.



la miscela e non può perciò conoscersi a priori, è con le tecniche diffrattometriche indipendente dall'angolo  $\theta$  di Bragg. I vari metodi di analisi quantitativa finora sperimentati generalmente aggirano l'ostacolo della non conoscenza del coefficiente di assorbimento di una miscela determinando rapporti di intensità degli effetti di diffrazione fra componenti della stessa miscela.

Il metodo finora più largamente applicato è quello dello «standard interno»: al miscuglio in esame viene aggiunta una quantità percentuale fissa di una sostanza nota, non presente nella miscela stessa, e, mediante la determinazione del rapporto tra le intensità di un effetto di diffrazione di ciascuna sostanza incognita e dello «standard», si risale alla quantità delle singole specie cristalline presenti nel miscuglio. Il metodo richiede in ogni caso l'esecuzione di curve di taratura per mezzo di miscele a quantità nota dei componenti da determinare; un altro inconveniente del metodo dal punto di vista della sua rapidità è la necessità delle lunghe operazioni di omogeneizzazione della polvere che debbono essere fatte dopo l'aggiunta dello «standard interno». Con metodi come quello delineato sono stati determinati, fra l'altro, il quarzo in varie miscele, l'austenite nell'acciaio, i costituenti delle bauxiti ecc. [4].

Alexanian [1], in una analisi mineralogica quantitativa di un granito, utilizza un metodo un po' diverso e che in un certo senso può dirsi assoluto. Egli, infatti, determina preliminarmente le intensità degli effetti di diffrazione dei minerali presi separatamente; successivamente le quantità degli stessi minerali nella polvere della roccia sono ottenute dal rapporto tra le intensità degli effetti di diffrazione omologhi rispettivamente dei minerali nel miscuglio e dei minerali «allo stato puro». Il coefficiente di assorbimento della polvere della roccia è determinato a parte con l'ausilio di una «standard interno» aggiunto alla miscela e misurando il rapporto delle intensità di un effetto di diffrazione dello stesso «standard» quando è contenuto nella miscela e quando è preso da solo. Il metodo, oltre all'inconveniente della aggiunta dello «standard» comune al metodo precedente, ha anche quello della necessità di mantenere rigorosamente costanti le condizioni sperimentali quando si fanno le determinazioni dei componenti allo stato puro e quelle dei componenti della miscela.

Si può evitare l'immissione dello «standard interno» se ci si limita a voler conoscere le proporzioni relative dei componenti il miscuglio. Un metodo del genere è conveniente quando si hanno pochi componenti, tutti facilmente determinabili ai raggi X, in modo che dalle loro proporzioni e dal peso totale del miscuglio si può risalire al peso dei singoli componenti. Il metodo risulta allora assai rapido, anche se può avere lo svantaggio che errori fatti nella determinazione di un componente si riflettono sulla determinazione degli altri. Questa via è stata recentemente seguita da Tennant e Berger [7] per determinare il rapporto calcite-dolomite in dolomie. Gli Autori fanno uso di curve di taratura nelle quali sono riportate in ascisse le proporzioni tra i due componenti ed in ordinate i rapporti tra le intensità di due effetti di diffrazione degli stessi componenti.

In realtà, nei casi più semplici, si può evitare anche l'esecuzione di curve di taratura se si utilizzano i valori delle intensità teoriche calcolate dalla struttura dei cristalli per gli effetti di diffrazione considerati. Un metodo del genere è stato delineato dallo Schäffer [6] ed è stato da lui parzialmente verificato su miscele binarie in parti eguali di  $\text{NaCl-KBr}$  e di  $\text{CuAl}_2\text{-Al}$ .

Il metodo applicato nel presente lavoro è simile a quello di quest'ultimo Autore.

*Metodo di dosaggio del CaO e dell'MgO per via diffrattometrica.*

L'intensità osservata  $I_o$  per un effetto di diffrazione dovuto a piani  $hkl$  di una quantità  $x$  di sostanza cristallina contenuta in un miscuglio è dato da:

$$(1) \quad I_o = x I_e$$

dove  $I_e$  è l'intensità teorica per unità di peso della sostanza calcolabile dalle grandezze seguenti:

$$(2) \quad I_e = K \frac{N^2 p}{d} L_p |F(hkl)|^2 e^{-2B \left( \frac{\sin \vartheta}{\lambda} \right)^2}$$

dove:  $K$  include una serie di costanti eguali per tutte le sostanze del miscuglio, fra le quali il coefficiente di assorbimento,  $N$  rappresenta il numero di celle elementari della sostanza  $x$  per unità di volume,  $p$  è la molteplicità dei piani  $hkl$  considerati,  $d$  è la densità del composto,  $L_p$ , funzione di  $\vartheta$ , è il fattore di Lorentz e di polarizzazione per l'effetto di diffrazione considerato,  $F(hkl)$  è il fattore di struttura per i piani cui è dovuta la diffrazione e il termine esponenziale è il fattore di temperatura con  $B$  costante determinabile una volta per tutte per via sperimentale,  $\vartheta$  angolo di Bragg e  $\lambda$  lunghezza d'onda della radiazione impiegata.

Se il miscuglio contiene le quantità  $x$  ed  $y$  di due sostanze, la percentuale di  $x$ , riferita alla somma totale  $x + y$ , sarà allora espressa da:

$$(3) \quad x\% = 100 \frac{x}{x+y} = \frac{I_{ox}}{I_{ox} + \frac{I_{ex}}{I_{ey}} I_{oy}} 100$$

dove  $I_{ox}$  ed  $I_{oy}$  sono le intensità osservate e  $I_{ex}$  ed  $I_{ey}$  sono le intensità calcolate dalla (2). Determinato il rapporto tra le intensità teoriche, la relazione (3) permette di ricavare le quantità relative delle due sostanze nella miscela.

Per gli scopi del presente lavoro di determinazione del calcio e del magnesio, si è preferito fare la determinazione sugli ossidi dei due elementi: essi sono infatti facilmente ottenibili per calcinazione di diversi sali del calcio e del magnesio, durante la calcinazione non formano tra loro composti o cristalli misti e, infine, la loro semplicissima struttura, tipo  $\text{NaCl}$ , permette di calcolare le intensità teoriche con sufficiente accuratezza.

Il procedimento che si può seguire durante l'analisi di una roccia è sostanzialmente il seguente. Dopo l'eliminazione della silice e degli elementi del terzo gruppo analitico, nella soluzione residua si precipita il calcio nel modo consueto come ossalato, e, subito dopo, il magnesio come ossinato [3]. Si agita bene in modo che i due precipitati abbiano modo di omogeneizzarsi, quindi si filtra e si calcina in crogiolo di platino fino a peso costante. Il miscuglio degli ossidi così ottenuto è pronto per essere esaminato ai raggi X.

Per il presente lavoro è stato usato come apparecchio a raggi X un diffrattometro XRD5 della General Electric; la radiazione impiegata è stata la  $K_{\alpha}$  del rame.

La polvere degli ossidi che si ottiene dopo la calcinazione è già sufficientemente fine (meno di  $5 \mu$ ) e, se i precipitati sono stati bene agitati subito dopo la precipitazione, non sono necessari macinazione e omogeneizzazione ulteriori. Per la preparazione del campione da portare ai raggi X si sono utilizzate lastrine di plexiglas forate riempite secondo la tecnica di Mc Creery [5] in modo da evitare per quanto possibile effetti di orientazione preferenziale dei granuli. Le dimensioni del foro rettangolare sono state di mm  $10 \times 13$ ,  $10 \times 10$ ,  $10 \times 5$  con 1 mm di profondità, a seconda della quantità di ossidi a disposizione: fenditure opportune dell'apparecchio sono state usate in relazione alle differenti dimensioni della lastrina porta-campione. La valutazione delle intensità  $I_o$  è stata fatta contando gli impulsi provenienti dal contatore proporzionale nell'intervallo occupato dai relativi massimi di diffrazione e sottraendo il valore del fondo continuo nello stesso intervallo. La valutazione del fondo è stata fatta mediando la conta di impulsi in un intervallo fisso prima e dopo i massimi considerati.

Gli effetti di diffrazione utilizzati sono quelli dovuti a piani 200 ( $\vartheta = 18,71^\circ$  per l'ossido di calcio e  $\vartheta = 21,49^\circ$  per l'ossido di magnesio), che sono i più intensi di entrambi gli ossidi. Le grandezze utilizzate nella formula (2) per il calcolo delle intensità teoriche sono le seguenti: per il CaO,  $N^2 = 0,807 \cdot 10^{-4} A^{-6}$ ,  $d = 3,345$ ,  $Lp = 16,7$ ,  $F^2(200) = 5960$ ; per l'MgO,  $N^2 = 1,788 \cdot 10^{-4} A^{-6}$ ,  $d = 3,581$ ,  $Lp = 12,75$ ,  $F^2(200) = 2662$ ; la molteplicità  $p = 6$  è eguale per entrambi gli ossidi.

Il fattore termico B è stato determinato valutando sperimentalmente, su scala relativa, le intensità  $I_o$  di sette effetti di diffrazione più intensi dei due ossidi presi separatamente e tracciando per punti la retta definita da  $\log I_o/I'_c = 2B (\sin \vartheta/\lambda)^2$  (con  $(\sin \vartheta/\lambda)^2$  in ascisse e  $\log I_o/I'_c$  in ordinate), dove  $I'_c$  rappresenta l'intensità calcolata dalla 2) con l'esclusione del fattore di temperatura. La pendenza della retta dà direttamente 2B. È stato trovato  $2B = 2,14 A^2$  per il CaO e  $2B = 0,70 A^2$  per l'MgO. I dati utilizzati per ricavare 2B sono riportati nella tabella I.

TABELLA I.

Piani	CaO				MgO			
	$(\sin \vartheta/\lambda)^2$	$I'_c$	$I_o$	$\log I_o/I'_c$	$(\sin \vartheta/\lambda)^2$	$I'_c$	$I_o$	$\log I_o/I'_c$
111	$3,20 \cdot 10^{-2}$	6,55	177	3,30	$4,20 \cdot 10^{-2}$	1,36	49	3,58
200	4,33	14,40	500	3,55	5,62	10,17	500	3,89
220	8,64	8,78	295	3,51	11,22	5,75	261	3,81
311	11,90	2,79	78	3,32	15,52	0,75	33	3,78
222	12,96	2,72	82	3,40	16,89	1,66	71	3,75
420	21,53	3,43	85	3,21	28,09	2,54	107	3,74
422	25,91	2,97	66	3,09	33,76	2,77	106	3,64

Dai dati scritti precedentemente, risulta un rapporto  $I_e(\text{CaO})/I_e(\text{MgO}) = 1,342$ , da cui il % CaO riferito alla somma dei due ossidi risulta dalla

$$(4) \quad \% \text{CaO} = 100 \frac{I_o(\text{CaO})}{I_o(\text{CaO}) + 1,342 I_o(\text{MgO})}.$$

### *Riproducibilità ed esattezza del metodo.*

Sono state effettuate due serie di esperienze per verificare la riproducibilità e la esattezza del metodo. Per tutte queste esperienze si sono utilizzate soluzioni artificiali di calcio e di magnesio, alle quali erano state aggiunte adeguate quantità di sali alcalini ed ammoniacali in modo da riportarsi alle condizioni che si verificano durante l'analisi di una roccia. A soluzioni di campioni di roccia si sono preferite soluzioni artificiali per evitare tutte le operazioni preliminari di separazione della silice e degli elementi del terzo gruppo e soprattutto per avere a disposizione miscele a proporzione nota e variabile degli ioni da determinarsi.

Una prima serie di esperienze è stata eseguita per vedere quanto una stessa analisi sia riproducibile. Da una stessa soluzione contenente ioni calcio ed ioni magnesio (oltre a sali alcalini ed ammoniacali) nel rapporto  $\text{CaO} : \text{MgO} \cong 2 : 1$ , si sono prelevate delle porzioni contenenti rispettivamente circa 0,17 g e 0,058 g di ossidi: ciò per vedere anche l'influenza della quantità assoluta di campione sulla determinazione; tali quantità sono quelle ottenibili in linea di massima partendo da  $1 \div 1,5$  g di roccia di natura basaltica e granitica rispettivamente.

Sono state fatte in complesso sei precipitazioni in due gruppi di tre ( $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ , tabella II) per ciascuna delle due quantità assolute di ossidi su menzionate. Su ognuna delle sei polveri così ottenute, sono state fatte cinque coppie di letture al diffrattometro, contando alternativamente gli impulsi dovuti agli effetti di diffrazione 200 di ciascuno dei due ossidi e spostando a volte anche la lastrina porta-campione dopo avere eseguito una o più coppie di letture.

Nella tabella II sono riportati i risultati di queste determinazioni, ossia, nelle singole righe: il peso totale in g. degli ossidi dopo precipitazione e calcinazione per i due gruppi di tre determinazioni (riga 1); il valor medio del peso degli ossidi in ciascun gruppo di tre determinazioni (riga 2); il peso di CaO (riga 3) e di MgO (riga 6) ricavati da ogni singola lettura fatta al diffrattometro attraverso la formula 4) ed il peso totale degli ossidi; il valor medio del peso degli ossidi per ciascuna determinazione e per ciascun gruppo di tre determinazioni fatte sulla stessa quantità iniziale (rispettivamente righe 4 e 5 per il CaO e righe 7 e 8 per l'MgO); le deviazioni standard S sulle quantità degli ossidi riferite a cinque coppie di letture al diffrattometro (riga 9 deviazioni standard tra i trattamenti chimici, riga 10 deviazioni standard tra le letture al diffrattometro); i coefficienti di variazione C delle misure delle quantità degli ossidi tra i trattamenti chimici (riga 11), tra le letture al diffrattometro (riga 12) e globali (riga 13). Per il calcolo degli S e dei C si è seguito il procedimento descritto dallo Youden [8].

Una seconda serie di esperienze è stata fatta precipitando da soluzioni sei miscele contenenti i due ossidi in diverse proporzioni. Con queste determinazioni si è voluto vedere l'influenza delle quantità relative di CaO e di MgO sulla riproducibilità delle letture e, note le quantità di ossidi poste in soluzione inizialmente, cercare di stimare la esattezza del metodo. I risultati sono riassunti nelle tabelle III e IV. Nella tabella III sono riportati nell'ordine: il valor medio di cinque letture  $L$  al diffrattometro delle intensità degli effetti di diffrazione del CaO e dell'MgO per ciascuna delle sei miscele (riga 1); i coefficienti di variazione  $C$  sulla media delle cinque letture di ciascuno degli ossidi (riga 2); il % CaO determinato sulla media di cinque coppie di letture (una per il CaO ed una per l'MgO) attraverso la formula 4) (riga 3); le deviazioni standard  $S$  sui % degli ossidi per cinque coppie di letture: tali deviazioni sono evidentemente le stesse tanto per il % CaO che per il % MgO, data la natura del metodo (riga 4); i coefficienti di variazione  $C$  sui % degli ossidi sempre riferiti a cinque coppie di letture (riga 5).



TABELLA II.

	A'	B'	C'	A''	B''	C''
1) $\xi_{\text{tot}}$	0,1710	0,1700	0,1714	0,0582	0,0585	0,0586
2)		0,1708			0,05843	
3) $\xi_{\text{CaO}}$	0,1165 0,1150 0,1166 0,1164 0,1152	0,1120 0,1148 0,1166 0,1126 0,1136	0,1160 0,1150 0,1156 0,1147 0,1142	0,0403 0,0404 0,0397 0,0405 0,0408	0,0395 0,0408 0,0402 0,0410 0,0416	0,0414 0,0409 0,0417 0,0410 0,0421
4)	0,11594	0,11392	0,11510	0,04034	0,04062	0,04142
5)		0,11499			0,04079	
6) $\xi_{\text{MgO}}$	0,0545 0,0560 0,0544 0,0546 0,0558	0,0580 0,0552 0,0534 0,0574 0,0564	0,0554 0,0564 0,0558 0,0567 0,0572	0,0179 0,0178 0,0185 0,0177 0,0174	0,0190 0,0177 0,0183 0,0175 0,0169	0,0172 0,0177 0,0169 0,0176 0,0165
7)	0,05506	0,05608	0,05630	0,01786	0,01788	0,01718
8)		0,05581			0,01764	
9)	SCaO SMgO	0,00103 0,00066			0,00056 0,00040	
10)	S	0,00054			0,00027	
11)	CCaO CMgO	0,89 % 1,18 %			1,37 % 2,27 %	
12)	CCaO CMgO	0,47 % 0,97 %			0,66 % 1,53 %	
13)	CCaO CMgO	1,01 % 1,53 %			1,52 % 2,74 %	

Nella tabella IV sono riportati nell'ordine: il peso iniziale in g degli ossidi (riga 1) e lo stesso peso dopo precipitazione e calcinazione (riga 2); le differenze sul peso globale degli ossidi prima e dopo il trattamento chimico (riga 3); il % CaO rispetto alla somma di CaO più MgO immesso nella soluzione (riga 4) e lo stesso % calcolato attraverso la media di cinque letture al diffrattometro sulle miscele degli ossidi precipitati e calcinati (riga 5); le quantità iniziali in grammi di ciascun ossido (riga 6) e quelle finali determinate dal peso degli ossidi dopo calcinazione e dalle letture diffrattometriche (riga 7), le differenze D tra le quantità iniziali di ciascun ossido e quelle determinate col metodo diffrattometrico espresse in percento, rispetto alle quantità degli ossidi stessi (riga 8).

TABELLA III.

	I	2	3	4	5	6
1) LCaO LMgO	203 5080	1105 3088	1646 1714	1773 806	2024 428	2155 53
2) C <sub>CaO</sub> CMgO	2,34 % 0,54 %	0,43 % 1,34 %	0,48 % 0,36 %	0,78 % 1,16 %	1,99 % 0,43 %	4,62 % 8,57 %
3) %CaO	2,83	21,05	41,72	62,12	77,88	96,83
4) S	0,07	0,17	0,11	0,16	0,32	0,22
5) C <sub>CaO</sub> CMgO	2,32 % 0,07 %	0,81 % 0,22 %	0,26 % 0,19 %	0,26 % 0,42 %	0,41 % 1,45 %	0,23 % 6,94 %

TABELLA IV.

	I	2	3	4	5	6
1) g <sub>iniz.</sub>	0,2123	0,2091	0,2011	0,4415	0,2056	0,4721
2) g <sub>fin.</sub>	0,2184	0,2109	0,2041	0,4450	0,2068	0,4766
3)	+ 0,0041 + 1,88 %	+ 0,0018 + 0,85 %	+ 0,0030 + 1,47 %	+ 0,0035 + 0,79 %	+ 0,0012 + 0,58 %	+ 0,0045 + 0,94 %
4) %CaO	4,43	21,71	40,77	61,61	75,73	96,06
5) %CaO	2,83	21,05	41,72	62,12	77,88	96,83
6) CaO MgO	0,0095 0,2048	0,0454 0,1637	0,0820 0,1191	0,2720 0,1695	0,1557 0,0499	0,4535 0,0186
7) CaO MgO	0,0063 0,2121	0,0444 0,1665	0,0852 0,1189	0,2764 0,1686	0,1610 0,0458	0,4615 0,0151
8) DCaO DMgO	— 50,4 % + 3,43 %	— 2,25 % + 1,68 %	+ 3,75 % — 0,17 %	+ 1,59 % — 0,53 %	+ 3,29 % — 8,95 %	+ 1,73 % — 23,2 %

## CONCLUSIONI.

 a) *Riproducibilità di una stessa analisi.*

Nella tabella II, i coefficienti di variazione complessivi, comprendenti trattamento chimico e letture diffrattometriche, risultano di 1,01 % e 1,53 % rispettivamente per il CaO e per l'MgO quando la quantità totale degli ossidi è circa 0,17 g e di 1,52 % e 2,74 % quando la quantità di ossidi è minore (0,058 g). *Volendo riferirci ad una analisi di una roccia, ciò equivarrebbe a*

*dire che per una roccia basica col 12% CaO e il 6% MgO, la stessa analisi ripetuta porterebbe a valori compresi tra circa 12,12 e 11,88% per il CaO e tra 6,09 e 5,91% per l'MgO; analogamente nel caso di una roccia acida col 2% CaO e 1% MgO si avrebbero valori compresi tra 2,03 e 1,97% e tra 1,03 e 0,97%.*

L'aumento del coefficiente di variazione con la diminuzione delle quantità assolute di ossidi è abbastanza normale, dato che cause di errore di varia natura aventi sempre la stessa entità risultano più evidenti quando la quantità di campione è minore. Il fatto che in queste determinazioni i coefficienti di variazione siano maggiori per l'MgO è insito nella natura stessa del metodo, fondato sulla determinazione di ciascun ossido rispetto all'altro: si ha infatti, a parità di deviazione standard, un coefficiente di variazione maggiore per il costituente contenuto nella miscela in quantità minore, cioè, nel caso presente, per l'MgO.

Sembra comunque che i coefficienti di variazione dovuti al trattamento chimico, siano dello stesso ordine di grandezza, o poco maggiori, di quelli dovuti alle letture diffrattometriche e che crescano entrambi col diminuire della quantità totale di ossidi.

b) *Riproducibilità delle letture diffrattometriche per miscele a diversa composizione.*

Dai dati della tabella III si possono fare diverse considerazioni sulla influenza delle condizioni sperimentali sulle misure. Le sei determinazioni sono state fatte su miscele a contenuto crescente in CaO e quindi calante in MgO.

Uno spostamento della lastrina porta-campione induce generalmente una variazione nelle letture al diffrattometro: questo fatto è messo in evidenza dal coefficiente di variazione per le cinque letture fatte per ciascun ossido sui sei campioni; per il campione 3, che ha i più bassi coefficienti di variazione, le cinque letture sono state fatte senza mai spostare la lastrina dalla sua posizione iniziale. In tutti gli altri casi, la lastrina è stata spostata di qualche mm una o due volte durante l'esecuzione delle cinque coppie di letture. In genere l'andamento di questo coefficiente di variazione è piuttosto irregolare al variare delle quantità reciproche di ossidi. È probabile che questa variazione nelle letture allorché si sposta la lastrina sia più che altro dovuta a un non uniforme riempimento della lastrina stessa che non ad una insufficiente mescolanza o macinazione della polvere: ciò è confermato dal fatto che il coefficiente di variazione calcolato sul percento degli ossidi è più basso e con andamento più regolare al variare della percentuale relativa degli ossidi. Questo indica che le variazioni nelle letture che si hanno spostando la lastrina avvengono pressoché proporzionalmente per entrambi gli ossidi, di modo che tali variazioni risultano molto attenuate allorché si determinino sul percento degli ossidi, per il calcolo del quale sono state in ogni caso messe in rapporto intensità degli effetti di diffrazione di ciascuno dei due ossidi misurate per una stessa posizione della lastrina porta-campione.

La deviazione standard sul percento degli ossidi per la media di cinque coppie di letture può essere considerata piuttosto uniforme comunque vari

la composizione della miscela: poiché essa, dato il metodo, risulta la stessa per entrambi gli ossidi, ne deriva che il coefficiente di variazione cresce col diminuire della percentuale relativa del corrispondente ossido.

c) *Esattezza del metodo.*

Nella tabella IV sono riportati alcuni dati sulla « esattezza » del metodo ricavati paragonando le quantità di CaO ed MgO iniziali con quelle determinate sperimentalmente.

Come regola generale si osserva che la quantità totale di ossidi pesata risulta sempre più alta del valore teorico: questo aumento oscilla intorno all'1 %.

Le quantità degli ossidi determinate mostrano il singolare andamento di una differenza in meno quando il contenuto dell'ossido è piccolo e in più quando è grande. Le spiegazioni di questo comportamento possono essere diverse, ma nessuna appare soddisfacente. Non sembra trattarsi di un errore insito nelle letture al diffrattometro: infatti una perfetta risposta lineare del contatore degli impulsi è stata verificata sperimentalmente. È quindi da supporre che tale causa di errore sistematico risieda nel trattamento chimico: potrebbe trattarsi di una, sia pure limitata, solubilità dei precipitati di ossalato e di ossinato, ma allora non si spiega perché la somma degli ossidi sia sempre maggiore del teorico anziché minore; potrebbe aversi durante la calcinazione una limitatissima formazione di cristalli misti degli ossidi, sebbene non si sia riscontrata nessuna variazione dell'angolo  $\theta$  di Bragg passando dagli ossidi puri alle loro miscele ottenute per calcinazione. Potrebbe infine darsi che piccole quantità di un sale doppio di Mg e Ca risultino sempre presenti nella miscela degli ossidi: naturalmente il Ca e l'Mg legati nel sale doppio non verrebbero determinati e la loro diminuzione percentuale si farebbe sentire di più nel caso del componente contenuto in minore quantità; a favore di questa ipotesi sta l'aumento nel peso degli ossidi dopo la calcinazione, contro sta il fatto che non si sono osservati effetti di diffrazione estranei a quelli degli ossidi.

Concludendo sembra di potere affermare che il presente metodo è sufficientemente rapido, riproducibile e, entro certi limiti, esatto per l'analisi del calcio e del magnesio nelle rocce.

TABELLA V.

	%CaO rispetto a CaO + MgO	coefficienti di variazione	
		CaO	MgO
Diabase Wl [2] . . . . .	62,31	1,8 %	4,2 %
Tab. II, riga 13 (primo gruppo di determ). .	67,32	1,0	1,5
Granito Gl [2] . . . . .	78,33	8,2	27,0
Vetro granitico [2] . . . . .	69,50	8,7	5,4
Tab. II, riga 13 (secondo gruppo di determ). .	69,81	1,5	2,7



Sia pure con la semplificazione che qui si tratta di miscele artificiali e non di reali analisi delle rocce, che nel presente caso le determinazioni non sono state fatte da differenti operatori in differenti laboratori e che esse sono meno numerose, tuttavia da un confronto con i dati che il Fairbairn [2] dà per i coefficienti di variazione che si osservano per l'analisi secondo i metodi consueti di un granito, di un diabase e di un vetro granitico (Tabella V), il presente metodo non sembra meno riproducibile.

Per quanto riguarda la « esattezza » del metodo, i risultati sembrano meno soddisfacenti, per lo meno allorché un ossido è presente in piccole quantità rispetto all'altro: tuttavia se pensiamo che, almeno nella massima parte delle rocce magmatiche, il %CaO rispetto alla somma di CaO+MgO oscilla in generale tra il 55 ed il 75 %, si può osservare dalla tabella IV che in questi limiti la « esattezza » è discreta. Si può anche aggiungere che, dato che sembra probabile che le maggiori discordanze per quanto riguarda la « esattezza » derivino dal trattamento chimico, anche i metodi convenzionali dovrebbero presentare gli stessi inconvenienti.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] ALEXANIAN C., « Bull. Soc. Franç. Minér. Crist. », 78, 568 (1955).
- [2] FAIRBAIRN H. W., « Geoch. et Cosm. Acta », 4, 143 (1953).
- [3] HOLLINGSHEAD R. G. W., *Oxine and its derivatives*, vol. II, 323 Butterworths-London (1954).
- [4] KLUG H. P.-ALEXANDER L. E., *X-Ray Diffraction Procedures*, 300, 422, J. Wiley & s.-New York (1954).
- [5] Mc CREERY, « J. Am. Ceram. Soc. », 32, 141 (1949).
- [6] SCHÄFFER K., « Z. Krist. », 90, 142 (1938).
- [7] TENNANT C. B.-BERGER R. W., « Am. Min. », 42, 23 (1957).
- [8] YOUTEN W. J. *Statistical Methods for Chemists*, 64, J. Wiley & s. - New York (1951).

**Fisiologia.** — *Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di stimoli chimici* <sup>(\*)</sup>. Nota di PAOLO CREPAX, ALDO NIGRO e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. C. PUPILLI.

In precedenti ricerche, eseguite in questo Laboratorio [Crepax e Fadiga <sup>(1)</sup>, Cotti, Crepax e Silvestrini <sup>(2)</sup>], si è data evidenza all'azione stimolante che alcune sostanze (prostigmina, picrotossina, acetilcolina associata ad eserina) esercitano sugli elementi della corteccia cerebellare. Per effetto del trattamento della superficie del *lobulus ansiformis* con soluzioni di tali sostanze, si fa manifesto un aumento di ampiezza dei potenziali elettrici

(\*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) P. CREPAX e E. FADIGA, « Arch. Sci. biol. », XL, 66 (1956).

(2) E. COTTI, P. CREPAX e B. SILVESTRINI, « Arch. Sci. biol. », in corso di stampa.

derivabili dalla corteccia cerebrale, aumento che è sicuramente riferibile a un'attivazione dei neuroni corticocerebellari trattati.

Con le presenti ricerche ci siamo proposti d'indagare in modo diretto quale effetto detti farmaci esercitino sugli elementi della corteccia cerebellare. Abbiamo preso in esame l'attività elettrica unitaria di tali elementi, attività che si registra mediante elettrodi di piccole dimensioni approfondati nella corteccia medesima e che si palesa sotto forma di deflessioni assai rapide che denomineremo *spikes* conforme alla terminologia impiegata da Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(3)</sup>. Stando a quanto è noto, le onde elettriche derivabili dalla superficie cerebellare [*waves* secondo la terminologia di Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(3)</sup>] non fornirebbero una precisa rappresentazione dell'azione esercitata da un farmaco sui neuroni cerebellari <sup>(4)</sup>.

Le nostre ricerche sono state eseguite in Gatti decerebrati a livello inter- o retrocollicolare. L'attività unitaria corticocerebellare era derivata, con la tecnica descritta in una Nota precedente <sup>(5)</sup>, dalla corteccia del lobulo V [Larsell <sup>(6)</sup>]. È conveniente infiggere l'elettrodo anziché perpendicolarmente al piano tangente alla superficie delle lamelle, in direzione molto obliqua rispetto alla superficie stessa: in tal modo si evita sicuramente di urtare l'elettrodo stesso quando si depongono sulla superficie corticale dischetti di carta bibula imbevuti con la soluzione in esame.

Le soluzioni dei farmaci venivano allestite al momento dell'uso: la prostigmina, la picrotossina e l'eserina (quest'ultima sotto forma di salicilato) erano sciolte in NaCl al 9 p. 1000, il manganocloruro di acetilcolina in una soluzione fisiologica tamponata (liquido di Krebs e Henseleit).

Avanti di porre sulla superficie cerebellare un dischetto di carta bibula del diametro di 5 mm, imbevuto della soluzione in esame, si aveva cura di indagare preliminarmente gli effetti dell'apposizione, sul punto della superficie cerebellare prescelto, di un dischetto imbevuto di soluzione fisiologica. Al lavaggio dell'area trattata si provvedeva mediante batuffoli imbevuti di liquido di Ringer e di frequente rinnovati. A ogni modo, fuorché nel caso dell'applicazione delle soluzioni di eserina e di acetilcolina, che veniva fatta in un medesimo punto e senza interporre lavaggio, un'unica applicazione era fatta in una determinata sede.

Facciamo presente come nelle condizioni di derivazione da noi adottate <sup>(5)</sup>, la componente di gran lunga più significativa dell'attività unitaria

(3) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI e R. S. SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIII, 465 (1950); XIV, 181 (1951).

(4) Il tracciato macroelettrodico derivato dalla superficie della corteccia cerebellare dopo applicazione locale di stricnina, non presenta modificazioni [Dow, « J. Physiol. », XCIV, 67 (1938)] che attestino l'azione stimolante esercitata da tale farmaco sui neuroni corticocerebellari: siffatta azione è invece ben documentata mediante la registrazione microelettrodica dell'attività di detti elementi <sup>(3)</sup>.

(5) P. CREPAX, A. NIGRO e P. L. PARMEGGIANI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., questo volume.

(6) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953).

corticocerebellare, registrata dopo il periodo irritativo iniziale (ossia almeno 5 min dopo che la punta dell'elettrodo ha raggiunto il focolo esplorato), sia costituita dagli *spikes* monofasici negativi<sup>(5)</sup>. Abbiamo preso in esame focolai caratterizzati da un'attività funzionale uniforme.

Il trattamento della superficie cerebellare immediatamente adiacente al microelettrodo mediante soluzioni di acetilcolina di diversa concentrazione (da  $1:10^4$  a  $1:10^2$ ) provoca una depressione dell'attività elettrica dei neuroni cerebellari: la frequenza degli *spikes* comincia in generale a diminuire 30 sec-1 min dopo l'applicazione del farmaco e tende a farsi via via

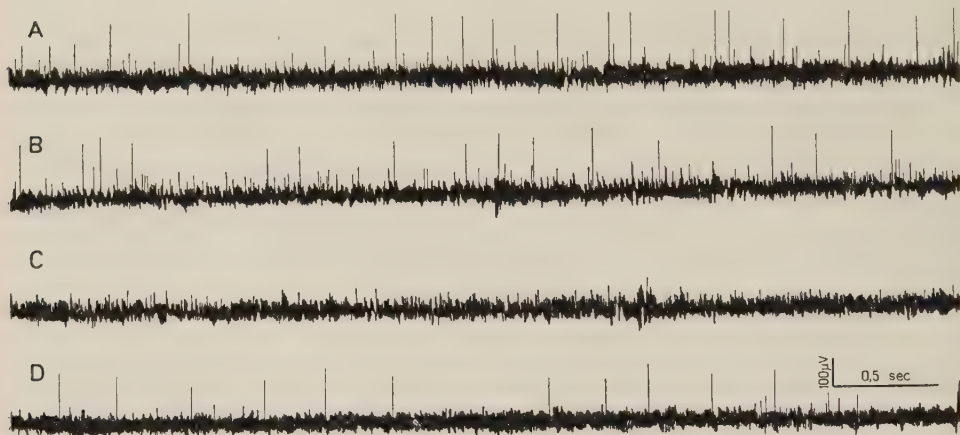


Fig. 1. - Effetti del trattamento con acetilcolina sull'attività unitaria derivata dalla corteccia cerebellare nel Gatto decerebrato.

Tra A e B, sulla corteccia cerebellare adiacente alla punta dell'elettrodo è stato posto un dischetto di carta bibula imbevuto di una soluzione di manganocloruro di acetilcolina  $1:10^4$ ; il dischetto è restato *in situ* per tutta la durata delle registrazioni successive.

A: attività elettrica del focolaio registrata 10 min dopo approfondamento dell'elettrodo e 2 min avanti B; l'attività registrata in tale momento perdurava con caratteri immutati da oltre 4 min. B: 20 sec dopo l'applicazione di acetilcolina. C: 1 min dopo B. D: 5 min dopo C.

minore (fig. 1 B, C). Prolungando la durata del trattamento (per esempio, 4 min con una soluzione  $1:10^3$ ), l'estinzione totale degli *spikes* è di regola. A ogni modo, anche in tal caso gli effetti sono facilmente reversibili dopo lavaggio; e se la soluzione di acetilcolina è assai diluita ( $1:10^4$ ), la scomparsa degli effetti depressivi può osservarsi durante il trattamento (fig. 1 D).

I quali effetti non sono del tutto costanti, quando s'impieghino le soluzioni di acetilcolina di minor concentrazione ( $1:10^4$ ) e l'attività del *pool* neuronico esplorato sia assai intensa; ma non mancano mai con l'uso delle soluzioni più concentrate, qualunque sia il livello dell'attività basale dei neuroni in esame.

L'applicazione di eserina ( $1:10^2$ ) non modifica, nel più dei casi, l'attività elettrica unitaria dei neuroni cerebellari (fig. 2 B); questa può talora presentare una transitoria depressione, ma si tratta in ogni caso di modificazioni non importanti, oltre che rapidamente transitorie. Il trattamento con acetilcolina ( $1:10^2$ ) effettuato su zone di corteccia previamente eseri-



nizzate (fig. 2 C, D, E), entro 10-90 sec provoca una intensificazione della frequenza degli *spikes*, che solo per breve tempo e in casi particolari si succedono in modo continuo: essi si raccolgono tosto in gruppi, che dapprima sono costituiti da poche oscillazioni e separati da lunghi intervalli (fig. 2 C) e poi via via comprendono un sempre maggior numero di *spikes* (fig. 2 D), susseguendosi l'un l'altro a intervalli progressivamente ravvicinati (fig. 2 E). Gli *spikes* che costituiscono ciascuna scarica, possono continuare per tutta la durata di questa in modo ritmico e regolare; ma è più frequente osservarli (fig. 2 D, E) fittamente addensati nella parte iniziale di ciascun gruppo <sup>(7)</sup>.

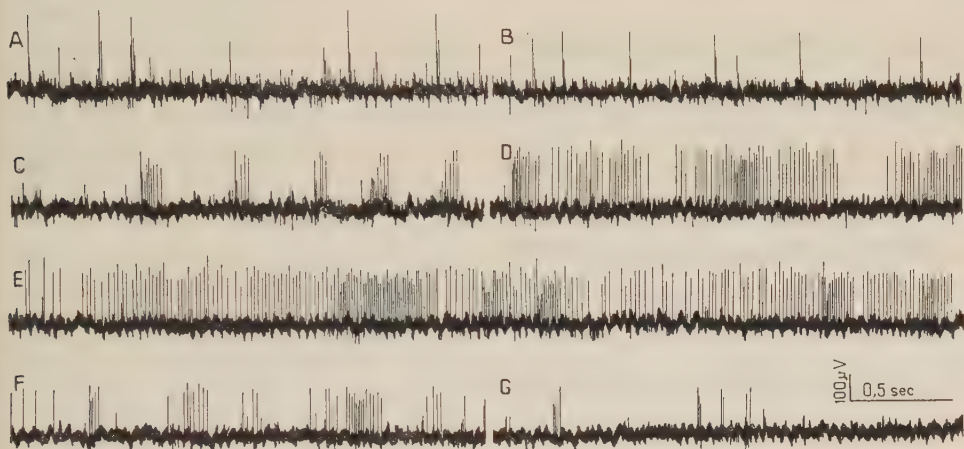


Fig. 2. — Effetti del trattamento con eserina e acetilcolina sull'attività elettrica unitaria derivata dalla corteccia cerebellare del Gatto decerebrato.

Tra A e B, sulla corteccia cerebellare adiacente alla punta dell'elettrodo è stato posto un dischetto di carta bibula imbevuto di una soluzione  $1:10^2$  di salicilato di eserina: il trattamento con eserina è durato 5 min; tra B e C, il dischetto è stato sostituito con altro imbevuto di una soluzione  $1:10^2$  di mangancoloruro di acetilcolina, che è rimasto *in situ* per 5 min; tra E e F, lavaggio della corteccia trattata.

A: attività elettrica del focolaio registrata 10 min dopo approfondamento dell'elettrodo e 5 min avanti B; l'attività registrata in tale momento perdurava con caratteri immutati da oltre 4 min. B: 4 min dopo l'inizio del trattamento con eserina e 2 min avanti C. C: 1 min dopo l'inizio del trattamento con acetilcolina. D: 1 min dopo C. E: 10 sec dopo D. F: 5 min dopo lavaggio. G: 10 min dopo F.

Questa attività a *bursts* può durare fino a 5 min, ma in genere tende a regredire dopo un tempo più breve e indipendentemente dal lavaggio della superficie cerebellare, manifestando una serie di modificazioni che corrispondono a quelle sopra descritte, con ordine di successione invertito. Gli effetti provocati dal trattamento con eserina e acetilcolina, in casi particolari, assumono aspetti diversi da quelli descritti: essi possono consistere in un aumento progressivo della frequenza degli *spikes*, i quali mantengono un ritmo regolare, senza raggrupparsi in *bursts*.

(7) L'addensamento terminale degli *spikes* osservato da Brookhart, Moruzzi e Snider <sup>(3)</sup> nei *bursts* provocati dalla stricninizzazione della corteccia cerebellare, ovvero in altre condizioni di esaltata attività, non ci è mai occorso di osservare per effetto dell'applicazione di eserina e di acetilcolina. Il rilievo di complessi di tali caratteristiche è stato fatto in qualche raro caso, e per tempi assai brevi, in focolai caratterizzati da un'attività spontanea assai irregolare.



Il ritmo pulsatorio delle unità trattate con prostigmina (da  $1:10^3$  a  $1:10^2$ ) si fa progressivamente più frequente e nel volgere di 2-3 min diviene discontinuo per la comparsa di scariche di *spikes* di elevata frequenza: rispetto ai *bursts* osservati per effetto del trattamento con eserina e acetilcolina, quelli provocati dall'applicazione di prostigmina sono di minore durata e costituiti da *spikes* di minore frequenza (fig. 3 D, E, F); inoltre

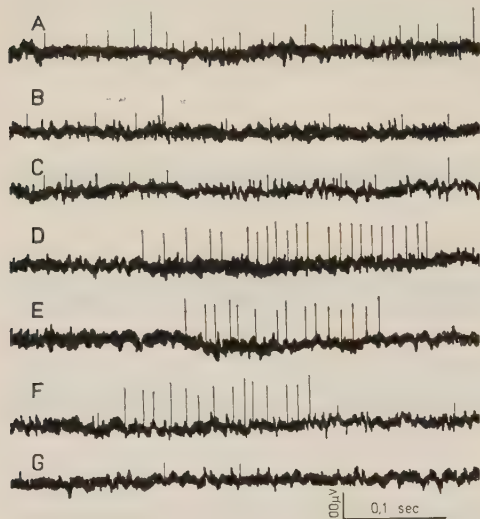


Fig. 3. - Effetti del trattamento con prostigmina sull'attività elettrica unitaria derivata dalla corteccia cerebellare nel Gatto decerebrato.

Tra A e B, sulla corteccia cerebellare adiacente alla punta dell'elettrodo è stato posto un dischetto di carta bibula imbevuto di una soluzione  $2,5:10^3$  di prostigmina, che è rimasto *in situ* per 8 min; tra F e G, lavaggio della corteccia trattata.

A: attività elettrica del focolaio registrata 8 min dopo approfondimento dell'elettrodo e 5 min avanti B; l'attività registrata in tale momento perdurava con caratteri immutati da 5 min. B: 4 min dopol'inizio del trattamento con prostigmina. C: 3 min dopo B. D: 10 sec dopo C. E: 6 sec dopo D. F: 1 sec dopo E. G: 3 min dopo lavaggio.

non si osserva mai un addensamento degli *spikes* nella parte iniziale né in quella terminale di ciascuna scarica. Il tipo di effetto non varia sostanzialmente, variando la concentrazione usata per il trattamento locale; impiegando la soluzione di maggiore concentrazione ( $1:10^2$ ), diventa particolarmente manifesta una iniziale e transitoria depressione dell'attività corticocerebellare, con scomparsa quasi completa degli *spikes* (fig. 3 B, C).

Sotto l'aspetto fisiologico, il lato più interessante delle osservazioni riferite consiste certamente nel fatto che per effetto dell'azione stimolante dell'eserina e dell'acetilcolina l'attività unitaria corticocerebellare assume il carattere di scariche di *spikes* di elevata frequenza, ossia un aspetto in tutto simile a quello che di regola contraddistingue l'attività pulsatoria di alcuni focolai della corteccia cerebellare e riguardo al cui significato sussiste incertezza.

Ci si può chiedere se tale attività costituisca un aspetto normale dell'attività della unità medesima oppure sia la conseguenza di una lesione provocata dal microelettrodo. Riguardo a quest'ultima possibilità, Brookhart, Moruzzi e Snider<sup>(3)</sup> osservano giustamente che « a crucial argument against this difficulty (ossia escludere la possibile genesi irritativa dell'attività a frequenza elevata) can hardly be expected ».

La questione può tuttavia riguardarsi sotto un altro aspetto, giacché in sostanza non importa tanto stabilire se gli *spikes* negativi di elevata frequenza siano la conseguenza di un'azione lesiva del microelettrodo quanto

sapere se l'irritazione stessa si traduca in forme diverse da quelle che caratterizzano l'esaltamento dell'attività delle unità corticocerebellari provocato con stimoli di altra natura. Ora l'applicazione di acetilcolina, effettuata previa eserinizazione, conferisce all'attività dei *pools* neuronici della corteccia cerebellare un andamento a scariche discontinue di elevata frequenza, il quale è in tutto simile a quello che si ritrova in alcuni focolai indipendentemente da ogni stimolazione effettuata di proposito e che andrebbe riferito all'azione irritativa del microelettrodo. Invero, la spiegazione più semplice della diversità degli effetti che i farmaci da noi esaminati esercitano sui neuroni corticocerebellari, è che le modificazioni osservate nei vari casi corrispondono a gradi diversi di attivazione: da lievi aumenti della frequenza di scarica si passerebbe per gradi ad aumenti via via più cospicui fino ad costituirsi di ritmi di scarica elevatissimi. L'attività a *bursts* rappresenterebbe insomma l'espressione di un'attivazione massimale dei neuroni corticocerebellari. Il fatto che l'azione stimolante della prostigmina, anche impiegata in concentrazioni assai elevate non giunge a provocare quelle forme di attività neuronica che abbiamo considerate espressione di esaltazione massimale dell'attività stessa, non può costituire un argomento contrario a tale interpretazione. Gli iniziali effetti depressivi della prostigmina indicano infatti la complessità dell'azione che tale sostanza svolge negli elementi nervosi: la coesistenza, nelle molecole del farmaco, di funzioni chimiche ad effetti opposti spiegherebbe come l'azione stimolante del medesimo non si esprima con gradi di attivazione massimale.

**Biochimica.** — *I citocromi dei Cefalopodi*<sup>(\*)</sup>. Nota di ANNA GHIRETTI-MAGALDI, ANTONIO GIUDITTA e FRANCESCO GHIRETTI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Corrisp. G. MONTALENTI.

L'esistenza di enzimi respiratori ferro-porfirinici in quegli organismi in cui il trasporto dell'ossigeno dall'ambiente esterno ai tessuti avviene per mezzo di pigmenti respiratori diversi dall'emoglobina, venne dimostrata per la prima volta da MacMunn nel 1886<sup>(1)</sup>. Questo A. descrisse sotto il nome di mioematina o istoematina un pigmento respiratorio che si trova nei muscoli e negli altri tessuti di organismi appartenenti a quasi tutti i tipi del regno animale. Esso fu trovato anche nei Molluschi e negli Artropodi marini nei quali l'emoglobina è sostituita dall'emocianina.

(\*) Lavoro eseguito nel Reparto di Fisiologia della Stazione Zoologica di Napoli, con un contributo (RG-4845) del National Institutes of Health, United States Public Health Service.

(\*\*) Nella seduta dell'11 maggio 1957.

(1) C. A. MACMUNN, « *Phylos. Trans. Roy. Soc. Lond.* », 177, p. 267 (1886); « *Z. f. Physiol. Chem.* », 14, p. 328 (1890).

Come è noto, più tardi Keilin<sup>(2)</sup> scoprì e descrisse questo pigmento sotto il nome di Citocromo. Egli confermò la presenza del Citocromo nei Molluschi e nei Crostacei. Secondo Keilin questo pigmento per la sua universale distribuzione deve essere considerato il pigmento respiratorio primordiale, il primo a comparire durante l'evoluzione degli organismi viventi e dal quale sono poi derivati gli altri pigmenti respiratori ferro-porfirinici.

Un ulteriore contributo alla conoscenza dei fermenti respiratori ferro-porfirinici degli Invertebrati venne dato da Ball e B. Meyerhof<sup>(3)</sup> che, con ricerche spettroscopiche su fettine di tessuto, individuarono gli spettri caratteristici dei citocromi *a*, *b*, *c* e della citocromo ossidasi nel muscolo cardiaco di vari Molluschi (*Busycon*, *Loligo*, *Venus*) di *Homarus* e di *Limulus*, tutti organismi aventi emocianina come pigmento respiratorio. Dubbia o mancante (probabilmente a causa della sensibilità del metodo) ne risultò la presenza in altri tessuti, come il muscolo adduttore di *Venus* e la muscolatura di *Loligo*.

Il sistema dei citocromi nei Cefalopodi è stato da noi studiato spettrofotometricamente ed enzimaticamente nei particolari preparati da vari organi di *Octopus vulgaris*, *O. macropus* ed *Eledone moschata*. Dagli omogenati degli organi i particolari erano ottenuti per centrifugazione frazionata secondo modificazioni del metodo generalmente usato per la preparazione dei mitocondri di mammiferi. Tali modificazioni si sono rese necessarie per la particolare struttura e la composizione chimica degli organi usati.

#### ESPERIENZE E RISULTATI.

*Preparazione dei particolari.* - Riportiamo come esempio il metodo di preparazione dei particolari dai muscoli del mantello e dei tentacoli e dall'epatopancreas.

I muscoli, liberati della pelle e delle ventose, venivano congelati a  $-20^{\circ}\text{C}$ , sminuzzati in un tritacarne, pesati e sospesi in circa 5 volumi di acqua distillata fredda per 30 minuti. La sospensione era poi spremuta attraverso garza e il materiale solido risospeso nello stesso volume di acqua. Tale trattamento veniva ripetuto cinque volte, dopo di che il materiale era omogeneizzato in Waring-Blendor per 7 min. con tampone di fosfato 0,1 M a pH 7,3. Il saccarosio a qualunque molarità non può essere usato perché produce una sospensione estremamente vischiosa che non può essere in nessun modo sottoposta a centrifugazione. Circa 2,5 litri di tampone erano usati per Kg di tessuto. La sospensione densa era centrifugata a  $2000 \times g$  per 30 min.; il sedimento risospeso in egual volume di tampone era riomogenato e ricentrifugato. I supernatanti combinati venivano centrifugati a  $30.000 \times g$  per 1 ora nella centrifuga preparativa Spinco. Il piccolo sedimento era lavato con tampone di fosfati, e sospeso in un piccolo volume dello stesso tampone in modo da dare

(2) D. KEILIN, « Proc. Roy. Soc. » (London), 98 B, p. 312 (1925).

(3) E. G. BALL e B. MEYERHOF, « J. Biol. Chem. », 134, p. 482 (1940).



approssimativamente 50 mg di peso secco per ml. Questo preparato può essere conservato a  $-20^{\circ}$  per parecchi giorni.

All'osservazione microscopica a contrasto di fase il preparato appariva formato da una sospensione omogenea di particelle sferiche, priva di detriti cellulari. Poiché queste particelle danno positiva la reazione ai coloranti vitali (verde Janus) e contengono, come diremo, il sistema dei citocromi, esse devono corrispondere ai sarcosomi o a frammenti di questi. La presenza di sarcosomi nei muscoli dei Cefalopodi, per primo osservata da Ballowitz <sup>(4)</sup>, è stata più recentemente descritta da Plenck <sup>(5)</sup>.

L'epatopancreas dei Cefalopodi, al contrario del muscolo, è un organo di consistenza assai tenera, quasi liquida e può essere pertanto omogeneizzato in Potter con saccarosio 0,7M. Cinque volumi di saccarosio erano usati per volume di tessuto. Dopo centrifugazione a  $2000 \times g$  l'omogenato si separa in tre strati: uno inferiore contenente i detriti cellulari e i nuclei, uno superiore contenente i grassi e uno strato mediano formato da una sospensione di particelle. Quest'ultimo era centrifugato di nuovo a  $30.000 \times g$  per 1 ora. Il sedimento veniva ripetutamente lavato e infine risospeso in un piccolo volume di saccarosio o di tampone di fosfato.

Questa sospensione di particolato non è omogenea. Infatti essa, centrifugata ulteriormente in saccarosio a gradiente di densità secondo il metodo di Kuff e Schneider <sup>(6)</sup>, si risolve in 5 strati di particelle ben distinti e separabili <sup>(7)</sup> l'uno dall'altro. Lo studio delle proprietà biochimiche di questi strati rivela nei vari tipi di particelle attività enzimatiche diverse.

L'inomogeneità del particolato preparato dall'epatopancreas nel modo suddetto è certamente dovuta alla particolare struttura e funzionalità dell'organo. Ricordiamo che Enriques <sup>(8)</sup> descrisse nell'epatopancreas di *Octopus* diversi tipi di cellule contenenti un gran numero di granuli pigmentati di varia grandezza. Molti di questi granuli sono di origine alimentare. Infatti è stato dimostrato da Bidder <sup>(9)</sup> che l'epatopancreas di *Octopus* e di *Loligo* ha una duplice funzione: secrezione degli enzimi digestivi <sup>(10)</sup> e assorbimento degli alimenti sotto forma di finissima sospensione. In questi animali pertanto, come in certi Protozoi, l'assorbimento precede la digestione.

*Colorazione vitale.* — 1 ml della sospensione di particelle in tampone di fosfato o in saccarosio era incubato a temperatura ambiente con Verde Janus B in piccoli tubi da saggio (concentrazione finale del colorante 1 : 20.000). Se

(4) V. E. BALLOWITZ, «Arch. f. Mikr. Anat.», 39, p. 592 (1893).

(5) H. PLENCK, «Z. f. Mikr. Anatom. Forsch.», 33, p. 605 (1933).

(6) E. L. KUFF e W. C. SCHNEIDER, «J. Biol. Chem.», 206, p. 677 (1954).

(7) I vari strati vengono raccolti separatamente tagliando i tubi di plastica con l'apparecchio disegnato da: M. L. RANDOLPH e R. RYAN, «Science», 112, p. 528 (1950).

(8) P. ENRIQUES, «Mitt. Zool. Station Neapel», 15, p. 281 (1902).

(9) A. M. BIDDER, «Quart. Rev. Microsc. Sci.», 91, p. 1 (1950); «Pubbl. Staz. Zool. Nap.», 29, p. 139 (1957).

(10) C. RÖMIJN, «Arch. Néerl. Zool.», (Leiden), 1, p. 373 (1935).



si centrifuga immediatamente, il sedimento appare blu e il supernatante incolore. Ma se si lasciano i tubi per mezz'ora, la sospensione si colora in rosso e dopo centrifugazione il sedimento è rosso e il supernatante incolore. Il colore rosso del sedimento non viene rimosso mediante lavaggio. Se però si fa gorgogliare ossigeno nei tubi, la sospensione non cambia colore, ma rimane blu. Queste osservazioni concordano col comportamento dei mitocondri di mammifero <sup>(11)</sup>.

*Spettri differenziali.* - A causa della torbidità delle sospensioni usate e di conseguenza per la grande dispersione della luce da esse prodotta, non è possibile determinare gli spettri assoluti delle bande dei citocromi presenti nei particolati. Chance <sup>(12)</sup> però ha dimostrato che la dispersione della luce in una sospensione torbida non interferisce nella misura della variazione di densità ottica dei pigmenti, quando questi passano dalla forma ossidata alla ridotta, purché la dispersione sia la stessa nelle due forme. Infatti abbiamo trovato che è possibile misurare la differenza della densità ottica tra 380 e 640 m $\mu$  tra due sospensioni dei nostri particolati che producono la stessa dispersione, una delle quali contiene i pigmenti respiratori nella forma ossidata, l'altra nella forma ridotta. Le variazioni della densità ottica, riportate in grafico contro la lunghezza d'onda, danno lo spettro differenziale dei pigmenti presenti (spettro differenziale, cioè differenza tra lo spettro dei pigmenti nella forma ridotta e quello degli stessi nella forma ossidata).

Tutte le misure sono state eseguite con uno spettrofotometro Beckman munito di un fotomoltiplicatore. Le cuvette usate erano di tipo speciale appositamente costruite per ricerche in anaerobiosi e la riduzione dei pigmenti veniva effettuata mediante idrosolfito, ascorbato, succinato o DPNH in atmosfera di idrogeno in modo che i pigmenti una volta ridotti rimanessero tali per tutta la durata dell'esperimento. Il DPNH era preparato in laboratorio mediante riduzione del DPN con alcool deidrogenasi e precipitazione come sale di TRIS <sup>(13)</sup>. L'alcool deidrogenasi era preparata dal lievito col metodo di Racker <sup>(14)</sup>.

La posizione delle bande dei citocromi è nota per i citocromi dei Mammiferi e del lievito. Le  $\alpha$  bande dei pigmenti ridotti appaiono nella regione visibile dello spettro a 605, 564 e 550 m $\mu$  e corrispondono rispettivamente a una miscela dei citocromi  $a$  e  $a_3$ , al citocromo  $b$  e a quello  $c$ . Ancora nel visibile c'è una banda poco omogenea col massimo intorno a 523-525 m $\mu$  formata dalla sovrapposizione delle bande  $\beta$  dei citocromi suddetti. Le bande  $\gamma$ , chiamate anche bande del Soret, sono assai evidenti nella regione del violetto a 445 m $\mu$  (cit.  $a$  e  $a_3$ ), a 430 m $\mu$  (cit.  $b$ ) e a 415 m $\mu$  (cit.  $c$ ).

(11) A. LAZAROW e S. J. COOPERSTEIN, « Exp. Cell. Res. », 5, pp. 56, 69, 82 (1953).

(12) B. CHANCE, « Nature », 169, p. 215 (1952).

(13) F. A. LOEWUS, F. H. WESTHEIMER e B. VENNESLAND, « J. Am. Chem. Soc. », 75, p. 5018 (1953).

(14) E. RACKER, « J. Biol. Chem. », 184, p. 313 (1950).

La fig. 1 mostra lo spettro differenziale di una sospensione di particolato di muscolo. La riduzione era ottenuta mediante aggiunta di succinato o di idrosolfito. Le bande a 605 e 560  $m\mu$  corrispondono esattamente alle bande  $\alpha$  dei citocromi  $a$  e  $b$  rispettivamente; quella a 525  $m\mu$  è formata dalla fusione delle bande  $\beta$  dei tre citocromi. Nella regione del Soret la forte banda

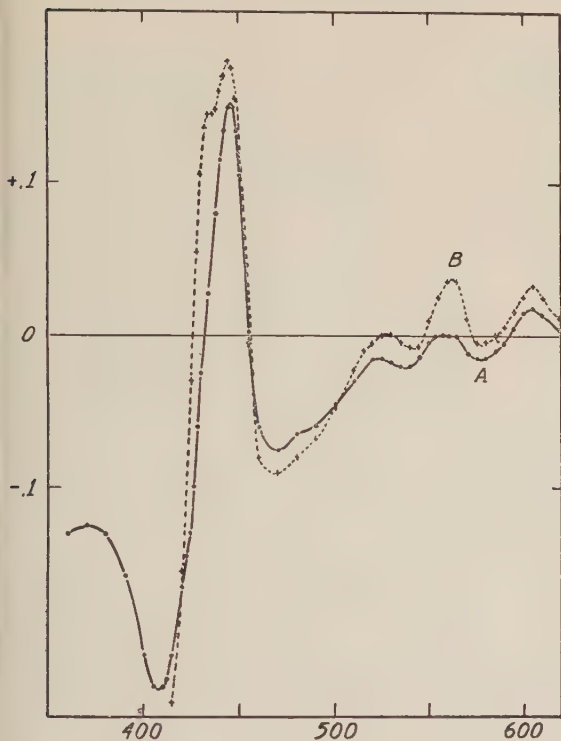


Fig. 1. — Spettro differenziale dei citocromi in una sospensione di particolato isolato dal muscolo di *Octopus vulgaris* (50 mg di peso secco per ml) Preparato n. 3.

Curva A: riduzione con succinato; curva B: riduzione con idrosolfito. Ascisse: lunghezza d'onda in  $m\mu$ ; ordinate: densità ottica.

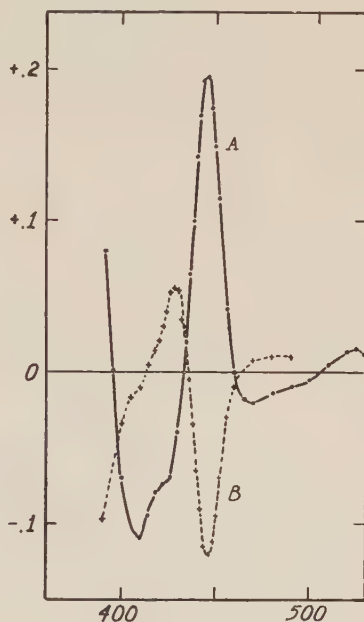


Fig. 2. — Spettro differenziale di una sospensione di particolato isolato dal muscolo di *Octopus vulgaris*.

Curva A: riduzione con ascorbato; curva B: riduzione con ascorbato e trattamento con ossido di carbonio. Ascisse: lunghezza d'onda in  $m\mu$ ; ordinate: densità ottica.

con massimo a 445  $m\mu$  corrisponde alla banda  $\gamma$  del citocromo  $a_3$ . La presenza di flavoproteine è dimostrata dall'abbassamento a 470  $m\mu$ . La riduzione con l'idrosolfito non solo produce aumento della densità ottica di tutte le bande ma rivela anche la banda  $\gamma$  del citocromo  $b$  che appare a 435  $m\mu$  circa. Bande distinte, attribuibili al citocromo  $c$  non sono visibili. Il citocromo  $c$ , idrosolubile, è stato certamente allontanato in gran parte durante la preparazione del particolato. Tuttavia in alcuni casi (riduzione con ascorbato) è stata osservata una piccola banda a 415  $m\mu$  (banda  $\gamma$ ).

Il citocromo  $a_3$  è stato anche identificato mediante lo studio spettrofotometrico del suo composto con ossido di carbonio. Il particolato era trattato con ascorbato e il suo spettro era letto contro la forma ossidata (curva A,

fig. 2). Quest'ultima era poi anch'essa ridotta e saturata con ossido di carbonio e il suo spettro letto contro la prima già ridotta con ascorbato (curva B, fig. 2). Come si vede, la banda a  $445\text{ m}\mu$  è spostata a  $430\text{ m}\mu$  mentre a  $445\text{ m}\mu$  corrisponde una banda negativa. Entrambe le bande sono tipiche del composto della citocromo ossidasi con l'ossido di carbonio.

*Attività succinossidasica e citocromo ossidasica.* - La partecipazione del sistema dei citocromi alla respirazione terminale dei Cefalopodi è stata di-

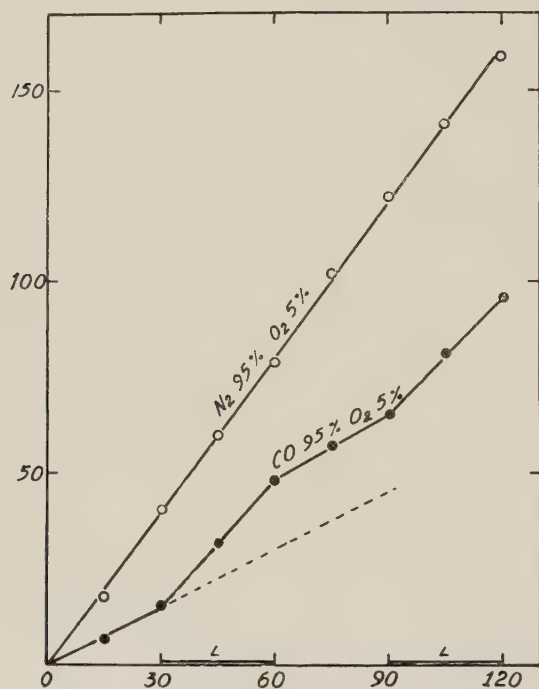


Fig. 3. - Effetto dell'ossido di carbonio al buio e alla luce sull'attività citocromossidasica di una sospensione di particolato di muscolo.

Nella vaschetta: particolato (10 mg peso secco) in 1 ml di tampone di fosfato 0,1 M pH 7,3 — cit.  $c$   $5 \times 10^{-5}$  M. Nel braccio laterale 0,3 ml ascorbato 0,1 M. Volume finale 3,1 ml,  $t = 25^\circ\text{C}$ .  
 Ascisse tempo in minuti; ordinate:  $\mu\text{l}$  di ossigeno consumati.

mostrata mediante lo studio delle attività enzimatiche dei particolari. L'ossidazione del succinato è stata studiata manometricamente con particolari preparati da vari organi<sup>(15)</sup> con e senza aggiunta di citocromo  $c$  in presenza di aria. In tal modo il trasporto degli elettroni dal substrato all'ossigeno avviene attraverso la catena dei citocromi  $b$ ,  $c$ ,  $a$  e  $a_3$ . L'attività enzimatica è limitata dalla quantità di cit.  $c$  presente nel particolare ed aumenta perciò per l'aggiunta di altro cit.  $c$ . (Tabella I). Il cit.  $c$  era preparato dal cuore di bue secondo il metodo di Keilin e Hartree<sup>(16)</sup>. Per l'epatopancreas lo studio manometrico dell'attività succinossidasica del preparato totale ha dato sempre risultati negativi. Si è dimostrato però una certa ossidazione del succinato col

metodo spettrofotometrico più sensibile<sup>(17)</sup> e dopo aver centrifugato il particolare in una soluzione a gradiente di densità di saccarosio. Uno solo degli strati in cui si risolve il particolare con questo trattamento mostra attività succinossidasica.

(15) E. C. SLATER, « Biochem. J. », 45, p. 1 (1949).

(16) D. KEILIN e E. F. HARTREE, « Proc. Roy. Soc. Lond. », 122 B, p. 298 (1937).

(17) S. J. COOPERSTEIN, A. LAZAROW e N. J. KURFESS, « J. Biol. Chem. », 186, p. 129 (1950).

TABELLA I.

*Attività succinossidastica dei particolari preparati dagli organi di «Octopus vulgaris». Succinato 30  $\mu$ M, Cit. c  $2,5 \times 10^{-5}$  M.  $\mu$ l O<sub>2</sub> in 1 ora.*

Organi	Senza aggiunta di cit. c	Con aggiunta di cit. c
Muscolo . . . . .	78,6	169,5
Ventricolo mediano . . . . .	26,5	172,0
Rene . . . . .	21,8	34,6
Cuore branchiale . . . . .	37,6	36,8
Branchia . . . . .	2,1	10,0
Epatopaneas . . . . .	0	0

TABELLA II.

*Attività citocromossidastica degli organi di «Octopus vulgaris». Substrato 30  $\mu$ M, Cit. c  $5 \times 10^{-5}$   $\mu$ l O<sub>2</sub> in 1 ora.*

Organi	Idrochinone			Ascorbato			p-fenilen diamina		
		Cit. c	Incr.		Cit. c	Incr.		Cit. c	Incr.
Rene . . . . .	17	351	334	8	300	292	4	59	55
Muscolo . . . . .	8	108	100	1	114	113	5	51	46
Epatopaneas . . . . .				6	369	363	0	51	51
Cuore branchiale . . . . .				6	25	19			
Branchia . . . . .				8	218	210			
Ventricolo mediano . . . . .	18	314	296						

Anche l'attività citocromossidastica è stata studiata manometricamente <sup>(18)</sup>. L'aggiunta di un eccesso di cit. c alla sospensione di particolato produce, se è presente citocromossidasi, un aumento della ossidazione di vari substrati come ascorbato, idrochinone o para-fenilendiamina. Tale incremento rappresenta l'attività citocromossidastica del preparato (Tabella II). Poiché l'azione

(18) E. C. SLATER, « Biochem. J. » 44, p. 305 (1949).



del cit. *c* può essere attribuibile ad una qualche ossidazione indiretta non connessa con l'attività citocromossidasi, è stata studiata l'inibizione dell'attività enzimatica con ossido di carbonio al buio e alla luce<sup>(19)</sup>. La fig. 3 riporta i risultati di un tipico esperimento con particolato di muscolo e mostra che l'inibizione prodotta dal CO è completamente annullata dalla luce.

### CONCLUSIONI.

Lo studio dell'azione degli inibitori specifici aveva indicato che la respirazione terminale dei Cefalopodi è catalizzata da ossidasi a ferro<sup>(20)</sup>. La presenza e le attività dei citocromi nei particolati isolati dagli organi dimostrano adesso che le ossidasi terminali di questi tipici Invertebrati ad emocianina sono enzimi ferro-porfirinici. Inoltre, come risulta dall'analisi degli spettri differenziali e dallo studio delle attività enzimatiche, il sistema dei citocromi dei Cefalopodi è formato da pigmenti assai simili a quelli che sono stati descritti negli organismi ad emoglobina. In particolare il cit. *c* di *Octopus* non deve essere molto diverso da quello di Mammifero se può essere sostituito da quest'ultimo nelle reazioni di riduzione del cit.  $\alpha_3$  e di ossidazione del cit. *b*.

La dimostrazione che le ossidasi terminali degli Invertebrati ad emocianina sono composti ferro-porfirinici fa cadere ogni supposta barriera tra questi organismi e quelli ad emoglobina. Anzi, poiché i citocromi sono i costituenti primordiali dai quali, nel corso dell'evoluzione, si è formata l'emoglobina, si può dire che i Cefalopodi, pur avendo un trasportatore di ossigeno nel sangue chimicamente tanto diverso, sono organismi potenzialmente ad emoglobina.

D'altra parte, diverse proteine a rame sono state descritte nei Vertebrati superiori<sup>(21)</sup> e si sa che esse devono essere in rapporto in qualche modo con la biosintesi delle ferro-porfirine<sup>(22)</sup>. La comparsa dell'emocianina in determinati gruppi di Invertebrati e il suo affermarsi come trasportatore di ossigeno al posto dell'emoglobina è probabilmente un fatto assai meno casuale di quanto possa sembrare e i fattori che lo hanno determinato vanno ricercati nelle interazioni tra proteine a ferro e proteine a rame il cui meccanismo biochimico è tuttavia ancora assai oscuro.

(19) O. WARBURG, « Biochem. Z. », 177, p. 471 (1926).

(20) A. GHIRETTI-MAGALDI, A. GIUDITTA e F. GHIRETTI, « Rend. Acc. dei Lincei » (1957).

(21) T. MANN e D. KEILIN, « Proc. Roy. Soc. Lond. », 126 B, p. 303 (1939); M. S. MOHAMED e D. M. GREENBERG, « J. Gen. Physiol. », 37, p. 433 (1954); C. G. HOLMBERG e C. B. LAURELL, « Acta Chem. Scand. », 2, p. 550 (1948); 5, pp. 476, 921 (1951).

(22) J. A. BUSH, « J. Exper. Med. », 103, p. 701 (1956); M. M. WINTROBE, G. E. CARTWRIGHT e C. J. GUBLER, « J. Nutrit. », 50, p. 395 (1953); C. J. GUBLER, G. E. CARTWRIGHT e M. M. WINTROBE, « J. Biol. Chem. », 224, p. 533 (1957).

**Biochimica.** — *Osservazioni sulla tropomiosina del muscolo scheletrico umano* (\*). Nota di ANDREA CORSI, presentata (\*\*) dal Cor-risp. M. ALOISI.

#### PREMESSA.

I primi studi sulla tropomiosina, eseguiti mediante estrazione del muscolo scheletrico di coniglio *in toto*, avevano fatto ritenere che questa proteina rappresentasse il 4 % del contenuto proteico delle miofibrille (Bailey<sup>(1)</sup>). Ma l'utilizzazione delle miofibrille isolate secondo il metodo di Perry<sup>(2,3)</sup> ed estratte con tampone di borato a bassa forza ionica ha permesso di dimostrare che la tropomiosina rappresenta una parte assai maggiore delle proteine miofibrillari del coniglio, cioè almeno il 10-12 % (Perry e Corsi<sup>(4)</sup>). Anche nel ratto e nel pollo sono state ottenute quantità di tropomiosina dello stesso ordine, sebbene un poco minori.

Nel corso di indagini sulle proteine muscolari in varie condizioni patologiche del coniglio e dell'uomo, si è studiata la tropomiosina del muscolo umano normale e in questa Nota si comunicano i risultati ottenuti.

#### MATERIALE E TECNICA.

Sono state utilizzate porzioni di quadricipite femorale di arti amputati per gangrena arteriosclerotica del piede e grande pettorale asportato per cancro della mammella. L'esame istologico ha accertato l'assenza di alterazioni morfologiche degne di nota. Le miofibrille sono state preparate con un metodo già usato in precedenti ricerche (Perry e Corsi, loc. cit.) lievemente modificato: per un buon isolamento si è trovato preferibile eseguire le centrifugazioni differenziali in cloruro di potassio 0,05 M, anziché 0,1 M. L'aggiunta di saccarosio 0,4 M facilita la rimozione dei sarcosomi, ma favorisce l'agglomerazione delle miofibrille, e perciò vi si è ricorso solo una volta.

Subito dopo la preparazione, la sospensione di miofibrille veniva diluita con 3 volumi di tampone di TRIS (triossimetilaminometano) 0,005 M a pH 8,1 e dializzata contro 80-100 volumi dello stesso tampone per 2 giorni, quindi trasferita in recipienti ben chiusi per altri 2 giorni. Dopo questo tempo la estrazione è praticamente totale, e d'altra parte dopo un tempo più lungo

(\*) Lavoro eseguito nel Centro per lo Studio della Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Modena, con un contributo della «Muscular Dystrophy Associations of America, Inc.».

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) K. BAILEY, «Bioch. J.», 43, 271 (1948).

(2) S. V. PERRY, «Bioch. J.», 51, 495 (1952).

(3) S. V. PERRY e T. C. GREY, «Bioch. J.», 64, 184 (1956).

(4) S. V. PERRY e A. CORSI, «Bioch. J.», in corso di stampa.

il mezzo alcalino potrebbe alterare in modo cospicuo le proprietà della tropomiosina.

L'estratto era quindi separato mediante centrifugazione a 20.000 g per 50 min a 0°: Il dosaggio della tropomiosina è stato eseguito con il metodo di Perry <sup>(5)</sup>, raffrontando la caduta di viscosità della soluzione in esame, dopo aggiunta di cloruro di potassio in condizioni standard, a una curva ottenuta da un campione di tropomiosina pura. Si è utilizzata una curva ottenuta da tropomiosina di coniglio: un controllo eseguito con un campione di tropomiosina umana preparata con il metodo di Bailey (loc. cit.) ha mostrato che la sensibilità all'aggiunta del cloruro di potassio è dello stesso ordine nelle due specie.

Per il dosaggio dell'azoto nella sospensione miofibrillare prima della centrifugazione e nel supernatante contenente la tropomiosina è stato usato il micrometodo di Kjeldhal. È stato eseguito anche l'esame elettroforetico del supernatante mediante l'apparecchio Perkin-Elmer, Mod. 38 A: a questo scopo il supernatante veniva concentrato a circa un terzo sospendendolo in un tubo da dialisi di fronte a un ventilatore a 0°, e poi dializzato contro una soluzione di cloruro di potassio 0,26 M tamponata a pH 6,9 con fosfati di potassio 0,05 M.

#### RISULTATI.

Come nel coniglio, così anche nell'uomo l'estrazione delle miofibrille isolate a bassa forza ionica e a pH 8,1 porta in soluzione la tropomiosina

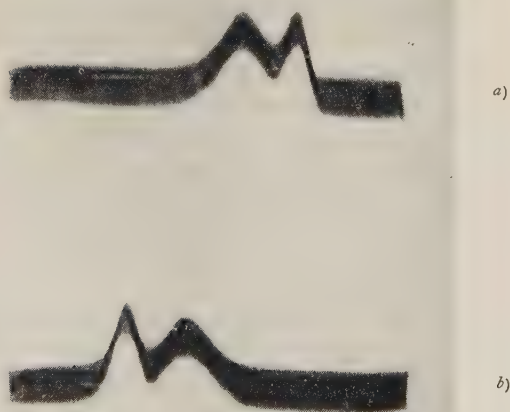


Fig. 1. - Immagine elettroforetica di estratto di miofibrille umane in TRIS 0,005 M. 525 min di elettroforesi.

a) fronte ascendente. b) fronte discendente. La cuspide della tropomiosina è quella più veloce (a destra nel fronte ascendente e a sinistra nel discendente).

insieme con un altro componente che è da considerare come una forma di actina inattiva (Perry e Corsi, loc. cit.). L'immagine elettroforetica del-

(5) S. V. PERRY, « Bioch. J. », 55, 114 (1953).

l'estratto delle miofibrille umane (fig. 1) è simile a quella ottenuta dalle miofibrille del coniglio.

La quantità totale estratta dalle miofibrille umane è risultata pari a circa il 35 % (3 determinazioni). La tropomiosina rappresenta il 32-35 % dell'estratto, cioè circa il 10-12 % del contenuto proteico delle miofibrille.

Si conclude quindi che anche nel muscolo scheletrico umano la tropomiosina è contenuta in quantità assai cospicua, pari a quella del coniglio. Anche nell'uomo è possibile supporre che la costante associazione con la actina negli estratti a bassa forza ionica corrisponda a una forma di associazione *in vivo*.

**Biologia (Biochimica).** — *Il glutatione nel fegato e nei muscoli di conigli in avitaminosi E* (\*). Nota di GIOVANNI FELICE AZZONE, ERNESTO CARAFOLI e GIUSEPPE BARBOLINI, presentata (\*\*) dal Corrisp. M. ALOISI.

Per lungo tempo il glutatione è stato considerato soltanto come portatore di gruppi sulfidrilici e quindi principalmente connesso con gli scambi ossido-riduttivi.

Recentemente tuttavia il glutatione, insieme con la glutamina e l'asparagina, è stato oggetto di ricerche [1, 2, 3] le quali hanno permesso di avanzare l'ipotesi che esso partecipi alla sintesi dei legami peptidici e quindi delle proteine; secondo questa ipotesi sia il glutatione che la glutamina funzionerebbero da composti intermedi, per l'utilizzazione dei legami ricchi di energia, nella sintesi dei legami peptidici. La utilizzazione dei  $\sim P$  avverrebbe attraverso la formazione preliminare di acilfosfati con successiva sintesi di  $\gamma$ -glutamil-peptidi. Una volta formato il  $\gamma$ -glutamil-peptide esso può trasformarsi in  $\alpha$ -glutamil-peptide e quindi mediante reazione con un altro  $\gamma$ -glutamil-peptide la catena può allungarsi.

Recenti ricerche hanno accennato ad un possibile intervento della vitamina E nelle sintesi proteiche: vedi Roderuck e al. [4] a proposito delle transaminazioni e Ferdmann [5] che riferisce di un aumentato turnover delle proteine muscolari, in condizioni di avitaminosi E. Altri recentissimi studi di Nason e Lehmann [6, 7] compiute su sistemi enzimatici purificati attribuiscono invece alla vitamina E una funzione nel sistema citocromo C-reductasi. Poiché la funzione del glutatione dell'organismo viene oggi appunto vista in relazione con entrambi i processi metabolici, cioè sia con gli scambi ossido-riduttivi che con i meccanismi di sintesi proteica, ci è sem-

(\*) Lavoro eseguito nel Centro per lo Studio della Fisiopatologia del C.N.R. presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Modena, con un contributo della «Muscular Dystrophy Associations of America, Inc.».

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.



brato interessante applicare la tecnica amperometrica, già da noi utilizzata per altri scopi [8], per la titolazione del glutatione nel fegato e nei muscoli di conigli carenti in vitamina E.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Conigli giovani (del peso di 700-900 g) sono stati tenuti a dieta carente di vitamina E secondo Houchin e Mattill [9], leggermente modificata [10]. Gli animali sono stati sacrificati dopo un periodo di tempo variabile dall'inizio della dieta per controllare l'eventuale sviluppo delle alterazioni. Gli animali sono stati uccisi per decapitazione dopo anestesia con  $\text{MgSO}_4$ . Subito dopo l'uccisione sono stati prelevati pezzi di fegato e di muscolo (psoas) rapidamente pesati e poi tritati in mortaio con sabbia di quarzo e con l'aggiunta di 10 ml di acido solfosalicilico al 2,5 %, freddo. L'estratto è stato poi centrifugato a 0° ed il supernatante conservato in camera fredda fino al momento della determinazione.

La determinazione del glutatione ridotto è stata effettuata entro 2 o 3 ore dalla preparazione dell'estratto. A tale scopo abbiamo adoperato la tecnica di Kolthoff e Strikes [11] con un elettrodo di platino ruotante e altro elettrodo formato da  $\text{HgI-KI}$ ; la titolazione è stata effettuata con  $\text{AgNO}_3$   $2 \times 10^{-3}$  M, in un mezzo di 30 ml così composto:  $\text{NaNO}_3$  0,25 M,  $\text{Na}_2\text{SO}_3$  0,05 M,  $\text{NH}_3$ , 0,1 M. Il sistema di misurazione veniva controllato con una soluzione di cisteina (Roche). Sono state in genere adoperate quantità di supernatante dell'ordine di 3 ml di estratto epatico e di 6 ml di estratto muscolare, corrispondenti rispettivamente a circa 600-800 mg di fegato ed a 1,5-3 g di muscolo.

#### RISULTATI E DISCUSSIONE.

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella I. Dobbiamo anzitutto notare che mentre nelle determinazioni dei fegati normali abbiamo in genere riscontrato una notevole costanza di risultati non possiamo dire altrettanto dei muscoli normali, il cui contenuto in GSH è più variabile. Probabilmente ciò è in relazione alle diverse quantità contenute nei due organi (il fegato ne contiene circa 10 volte di più); per quanto riguarda il muscolo è quindi necessario sia adoperarne quantità molto più cospicue, sia prolungare il periodo di triturazione delle fibre.

I dati esistenti in letteratura relativi al contenuto in GSH dei vari organi sono abbastanza diversi, a seconda del metodo adoperato; in genere quelli più bassi (180 mg %) sono ottenuti con la più specifica tecnica manometrica di Woodward [12] mentre con la tecnica iodometrica sono riportati valori più elevati (220 mg %) [13, 14]; molto scarsi invece i dati relativi al contenuto in GSH del muscolo (circa 26 mg %) [1]; v'è poi anche da notare che le determinazioni surriferite sono state fatte in genere su ratti (invece che su conigli) e che esistono variazioni perfino tra razze diverse di ratti.

TABELLA I.

*Contenuto in gruppi SH nel fegato e nei muscoli di conigli in avitaminosi E.*

(I valori sono calcolati in mg di glutatione (peso molecolare 307), per 100 gr. di organo fresco).

Organo	Periodo di Dieta	N° animali	valori in mg %
Fegato . . . . .	—	5	249 ± 10,7
» . . . . .	0-12 gg	5	217 ± 12
» . . . . .	12-24 gg	9	310 ± 23
» . . . . .	> 24 gg	5	351 ± 34,4
Muscolo (psoas) . . .	—	5	29,3 ± 5,6
» . . . . .	0-12 gg	5	16,3 ± 4,2
» . . . . .	12-24 gg	9	24,2 ± 3,9
» . . . . .	> 24 gg	7	30,1 ± 6,6

Abbiamo diviso i valori ottenuti dagli animali distrofici in 3 gruppi: il primo comprendente quelli ottenuti da animali fino ad un periodo di 12 giorni di dieta, il secondo tra 12 e 24 giorni di dieta ed il terzo oltre i 24 giorni.

Tale divisione è naturalmente arbitraria in quanto l'evoluzione del processo distrofico varia da animale ad animale in rapporto a cause diverse: età, peso iniziale, ecc. per cui si può avere distrofia conclamata dopo 20 giorni e assenza di lesioni istologiche e biochimiche dopo 25 giorni. Si osserva nella Tabella I come dopo una leggera diminuzione nei primi giorni di dieta vi sia un aumento progressivo del contenuto in GSH del fegato in rapporto alla durata del periodo di carenza vitaminica; il GSH aumenta da 249 mg % fino ad oltre 300 mg %. Il fenomeno è molto costante (eccetto in un caso in cui si è ottenuto un valore di 96 mg %) e si raggiungono anche valori fino ad oltre 400 mg % (in un caso 487 mg %).

Nei muscoli invece, a parte la suaccennata discordanza tra i singoli valori non si notano nelle medie complessive segni di aumento (a parte la caduta iniziale con progressivo ritorno ai valori normali) e ciò sembra oltremodo strano specialmente per il III gruppo (più di 24 giorni di dieta) in cui in genere sono ben evidenti i segni della distrofia muscolare.

V'è però da osservare che gli animali distrofici presentano nelle fasi finali una notevole diminuzione in peso e ciò è evidentemente dovuto alla disgregazione delle fibre muscolari a causa dell'evolversi del processo distrofico. Una diminuzione in peso ad esempio del 15 % corrisponde alla scom-

parsa del 40-50% di tessuto muscolare e ciò avviene a carico delle parti sarcoplasmatiche e miofibrillari mentre il tessuto di sostegno non viene modificato. Si può pertanto logicamente ammettere che un valore inalterato del contenuto in glutatione nei muscoli distrofici rappresenti invece un cospicuo aumento se riferito, invece che ai grammi di muscolo, alle unità di tessuto muscolare residuo presenti nella fibra degenerata.

L'aumento del glutatione rappresenta naturalmente un dato isolato che non permette alcuna speculazione riguardo alla comprensione delle alterazioni biochimiche connesse alla avitaminosi E. Esso può però rappresentare un utile punto di inizio per ricerche dirette a chiarire la funzione che deve assolvere il glutatione nella avitaminosi E, e tale da richiederne un cospicuo incremento ad esempio in un organo essenziale del ricambio come è il fegato. V'è comunque da osservare che il metodo di determinazione adoperato non è in grado di distinguere tra il glutatione ed altre sostanze egualmente titolabili come la cisteina, la cisteinil-glicina e la  $\gamma$ -glutamyl-cisteina. Una variazione di una di queste potrebbe simulare un aumento di glutatione e ciò vale particolarmente per la cisteina, la quale ha un peso molecolare molto inferiore al glutatione e può, quindi, aumentando, far apparire più cospicua la modificazione del glutatione.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] WAELSCH H., « *Advanc Enzy.* », 13, 237 (1952).
- [2] WAELSCH H., FODOR P. I., MILLER A., « *Fed. Proc.* », 11, n. 1 (1952).
- [3] HANES C. S., HIRD F. J. R., ISHERWOOD E. A., « *Nature* », 166, 288 (1950).
- [4] RODERUCK C. E., BASINSKI D. H., BARBER M. A., « *Ann. N. Y. Acad. Sci.* », 52, 156 (1949).
- [5] FERDMANN D. L., *Comunicazione alla Conferenza Internazionale sugli usi pacifici della energia atomica*, Ginevra, 1955.
- [6] NASON A., LEHMAN J. R., « *Science* », 122, 19 (1955).
- [7] NASON A., LEHMAN J. R., « *Jour. Biol. Chem.* », 222, 511 (1956).
- [8] AZZONE G. F., CARAFOLI R., BARBOLINI G., « *Ric. Sc.* », 26, 3035 (1956).
- [9] HOUCHIN O. B., MATTILL H. A., « *Jour. Biol. Chem.* », 146, 301 (1942).
- [10] ALOISI M., ASCENZI A., BONETTI E., « *J. Path. Bact.* », 64, 321 (1952).
- [11] KOLTHOFF J. M., STRIKES W. I., « *J. Am. Chem. Soc.* », 72, 1952 (1950).
- [12] WOODWARD G. E., « *Jour. Biol. Chem.* », 109, 1 (1935).
- [13] LINDAN O., WORK E., « *Biochem. J.* », 55, 554 (1953).
- [14] LEAF G., NEUBERGER A., « *Biochem. J.* », 41, 280 (1947).
- [15] FISCHER E., « *Proc. Symp. on Muscle* », Royamount, 274 (1950).

**Biologia.** — *La genesi delle intumescenze del midollo spinale negli Anfibi anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di abbozzi di arti*<sup>(\*)</sup>. Nota di TEODORO PERRI, presentata <sup>(\*\*)</sup> dal Socio G. CO-TRONEI.

In una mia Nota dell'anno scorso <sup>(1)</sup> ho esposto i risultati ottenuti in esperienze d'asportazione di un abbozzo d'arto posteriore in giovanissimi embrioni di *Bufo vulgaris*. Il mio scopo era di esaminare le varie tappe evolutive che portano alla formazione delle asimmetrie nel midollo spinale e nei corrispondenti gangli spinali, che conseguono appunto all'asportazione di un abbozzo d'arto. I precedenti Autori che negli Anuri avevano studiato, operando allo stadio di giovanissima larva (Braus, Dürken) o di embrione giovanissimo (May), l'influenza che l'asportazione di un arto esercita sul midollo spinale e sui gangli spinali, avevano esaminato gli operati dopo raggiunta la metamorfosi. Invece io ho studiato gli embrioni operati fissandoli in stadi vari di sviluppo, da embrione avanzato fino alla metamorfosi; questa ricerca mi ha permesso di distinguere, sia per il midollo spinale che per i gangli spinali, un periodo di sviluppo indipendente dalla presenza degli arti, da un successivo periodo che è invece dipendente dalla presenza degli arti.

Ho poi continuato in queste ricerche perché subito mi apparvero di notevole interesse ai fini di una migliore conoscenza della morfologia causale delle intumescenze e dei corrispondenti gangli spinali degli Anuri. Insieme con le asportazioni di un arto ho pure eseguito trapianti di arti, perché questi due tipi di esperienze sono tra loro complementari per vari aspetti. Ho recentemente pubblicato un lavoro in esteso sulle mie ricerche di asportazione <sup>(2)</sup> e ne vado ultimando un altro sui trapianti. Rinvio a questi lavori per la esposizione analitica dei risultati e per le notizie bibliografiche: la presente Nota ha lo scopo di riassumere brevemente i risultati raggiunti, e soprattutto di svolgere alcune considerazioni sulla morfologia causale delle intumescenze del midollo spinale e dei corrispondenti gangli spinali degli Anuri.

Vediamo dapprima i risultati raggiunti nell'esperienze di asportazione di un abbozzo di arto posteriore. Le operazioni furono eseguite in embrioni di *Bufo vulgaris* allo stadio di bottone codale piccolo o piccolissimo, prima cioè, come tutto lascia ritenere, che l'abbozzo dell'arto avesse potuto esercitare alcuna influenza sul midollo spinale o sui gangli spinali. L'esame degli operati, fissati in stadi vari da embrione avanzato sino alla metamorfosi, ha posto in rilievo, confrontando nel midollo spinale il lato normale con

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Perugia, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) T. PERRI, in questi « Rendiconti », vol. 20 (ser. 8\*), p. 136 (1956)

(2) T. PERRI, in « Arch. Zool. It. », vol. 41, p. 369 (1956).



quello dell'asportazione di un arto, i seguenti fatti che si riferiscono direttamente alla intumescenza lombo-sacrale ma che con tutta probabilità si possono estendere anche all'intumescenza brachiale.

Fino ad un certo stadio di sviluppo non vi è nessun differenziamento nel midollo spinale che permetta di riconoscere le future intumescenze: esse sono identificabili solo in base al posto che occupano. Non vi sono differenze tra il lato normale e quello dell'asportazione di un arto. In uno stadio un po' più avanzato si osservano - solo in corrispondenza delle future intumescenze - le prime fasi evolutive dei corni motori, i quali sporgono nella sostanza bianca. Non si hanno ancora apprezzabili differenze tra il lato normale e quello dell'asportazione di un arto; infatti questo primo differenziamento dei corni motori si ha pure sul lato dell'asportazione: trattasi adunque di un differenziamento indipendente dalla periferia, ossia dalla presenza o meno dell'arto.

Ho potuto riconfermare questi risultati <sup>(3)</sup> in esperienze di trapianto omoplastico di un ampio tratto di organi assili (compresa la futura intumescenza lombo-sacrale e un tratto di midollo intermedio alle future intumescenze) in giovanissimi embrioni di *Bufo vulgaris*. Anche in questi casi, che per alcuni aspetti corrispondono all'asportazione di ambedue gli arti posteriori, si osservano nel midollo spinale trapiantato le prime fasi evolutive dei corni motori.

Il periodo a sviluppo indipendente giunge, in *Bufo vulgaris*, sino allo stadio in cui inizia la digitazione degli arti (larve lunghe una ventina di millimetri); è in questo stadio che nel midollo spinale iniziano le asimmetrie tra il lato normale ed il lato dell'asportazione; nei gangli spinali lombo-sacrali le differenze tra un lato e l'altro sono più evidenti.

Il secondo periodo evolutivo del midollo spinale è invece dipendente dalla presenza degli arti. Esso consiste, essenzialmente, nell'aumento di grandezza delle cellule del corno motore. Se l'arto manca, questo aumento di volume delle cellule non si ha sul lato dell'asportazione, e successivamente scompare qualsiasi traccia del primo differenziamento del corno motore. È in questa seconda fase, come più volte ho posto in rilievo, che si verifica la correlazione (legge del Levi) che si ha nel neurone tra la grandezza del pirenoforo e l'estensione del corrispondente neurite.

Anche per i gangli spinali l'esperimento di asportazione di un abbozzo di arto posteriore ha permesso di distinguere un periodo di sviluppo indipendente dalla presenza dell'arto, da un periodo di sviluppo che invece ne dipende. Durante il primo periodo vengono a formarsi nette differenze regionali di grandezza dei gangli spinali, infatti quelli corrispondenti all'intumescenza lombo-sacrale sono di volume nettamente maggiore che i vicini. Nel secondo periodo, invece, sul lato dell'asportazione di un arto si ha che l'accrescimento dei gangli spinali, in confronto al lato normale, dapprima diminuisce, poi cessa del tutto ed infine si osservano in essi fatti di atrofia.

(3) T. PERRI, in questi « Rendiconti », vol. 20 (ser. 8ª), p. 666 (1956).

Già da questa prima parte del lavoro emerge che nella formazione delle intumescenze, e lo stesso dicasi per i gangli spinali corrispondenti, occorre la coordinazione (sinergismo) di più fattori dello sviluppo: è necessario che ai fattori intrinseci seguano quelli estrinseci.

Per quanto riguarda l'esperienze di trapianto di un abbozzo di arto, ricordo anzitutto che già altri Autori se ne erano occupati, come avrò occasione di esporre ampiamente nel lavoro in esteso. Mi limito a rammentare le ricerche del May<sup>(4)</sup> che sperimentando in embrioni di *Discoglossus pictus* ottenne un aumento di volume nel tratto interessato di midollo spinale; e quelle dell'Hamburger<sup>(5)</sup> che in embrioni di pollo osservò un notevole aumento numerico dei neuroni motori. Io mi occupo qui dei trapianti di abbozzo di arto allo scopo soprattutto di una migliore valutazione dell'importanza dei fattori intrinseci ed estrinseci nel determinismo delle intumescenze, anche in rapporto con la mobilità o meno degli arti trapiantati.

I trapianti di un presunto abbozzo di arto posteriore li ho eseguiti allo stadio di bottone codale piccolo o piccolissimo, ossia — come tutto lascia pensare — prima che gli abbozzi degli arti normali avessero potuto esercitare una qualsiasi influenza sullo sviluppo del midollo spinale o dei gangli spinali. Queste esperienze di trapianto mi hanno fornito interessanti risultati su varie questioni: qui mi occupo solo di quanto riguarda il midollo spinale ed i gangli spinali.

I trapianti furono eseguiti a vari livelli, ed in una notevole percentuale di casi si svilupparono assai bene. Tra quelli trapiantati nella parte anteriore del tronco, ne ho avuti una diecina con mobilità più o meno notevole, ma sempre nettamente inferiore al normale. Dico subito che non bisogna pensare che arti trapiantati mobili non si possano avere in rapporto con l'intumescenza lombo-sacrale. Ricordo infatti<sup>(6)</sup> che tra i miei casi di arti soprannumerari da induzione abnorme avuti negli Anuri, quelli dotati di mobilità più o meno ampia erano in connessione alcuni con l'intumescenza brachiale ed altri con quella lombo-sacrale.

Gli arti trapiantati e dotati di mobilità sono stati o singoli o, per lo più, duplici; in questi solo l'arto in posizione più cefalica si mostrò mobile. Gli arti mobili sono stati sempre con una quantità di muscolatura maggiore e meglio conformati che non gli arti immobili.

Gli arti mobili sono innervati dai nervi normali degli arti, particolarmente dal 3° e dal 4°. I rami che vanno al trapiantato prima di penetrarvi si anastomizzano tra loro. L'intumescenza brachiale presenta la metà destra (lato del trapianto) di dimensioni accresciute, però in grado modico: nella zona dell'intumescenza maggiormente interessata l'aumento è stato al massimo intorno al 12-13 % e riguarda sia la sostanza bianca che la grigia, ed

(4) R. M. MAY, in « Bull. biol. de la France et de la Belg. », vol. 67 (1933).

(5) V. HAMBURGER, in « Phys. Zool. », vol 12, p. 268 (1939).

(6) T. PERRI, in « Rivista di Biologia », vol. 47 (1955).

in quest'ultima sia la parte motoria che la sensitiva. L'entità di tale aumento è assai inferiore alla diminuzione di volume che si ha - nell'intumescenza lombo-sacrale - sul lato dell'asportazione di un abbozzo d'arto.

L'aumento unilaterale di volume del midollo spinale nei casi di immobilità è stato quasi sempre meno accentuato. Tale diversità sembra sia soprattutto in rapporto con la quantità di muscolatura degli arti trapiantati, la quale a sua volta è maggiore nei casi dotati di mobilità.

Questi risultati confermano quanto più volte ho avuto occasione di dire: che anche negli Anuri per la mobilità degli arti è indispensabile che l'innervazione sia fornita in notevole quantità dai plessi normali degli arti. Tale necessità sembra più rigorosa negli Anuri che negli Urodeli, e ricorda quanto avviene nel pollo (Hamburger) <sup>(7)</sup>.

Il tratto di midollo spinale intermedio alle intumescenze - che come si è visto sopra non ha capacità intrinseche per la formazione dei primi stadi evolutivi dei corni motori - non forma corni motori neppure se innerva arti trapiantati. È questa un'ulteriore dimostrazione del fatto che mancando i fattori intrinseci, quelli estrinseci pur presenti (trapianto di un arto) non sono in grado di portare alla costituzione di un corno motore. E pare probabile essere in rapporto con questo il fatto che gli arti che ricevono la loro innervazione solo dal tratto intermedio del midollo si siano sempre presentati immobili. Ricordo che i trapianti di arti li ho sempre eseguiti con le stesse modalità tecniche, a parte la zona d'impianto; e quindi il differente risultato di mobilità o immobilità dell'arto è in gran parte da ricercarsi nella diversa competenza del tratto di midollo spinale che corrisponde alla zona del trapianto.

I gangli spinali nei casi di trapianto si sono presentati nettamente aumentati di volume. Nel lavoro in esteso sarà riportata una tabella dei volumi dei gangli spinali dal 2° al 6° paio nei casi di arti mobili. Fra le tre paia di gangli dell'intumescenza brachiale (2°, 3°, 4°) i massimi aumenti percentuali sono stati riscontrati nel quarto paio; ma la maggior parte dell'aumento assoluto ha sempre gravato, nei casi di arti mobili, sul 3° paio. Per esemplificare ed anche per dare un'idea dell'aumento di grandezza che si può avere nei gangli spinali, ricordo che in un caso di arto mobile ebbi che a sinistra il volume (espresso in migliaia di  $\mu^3$ ) dei tre gangli è di 4.949 mentre a destra (lato del trapianto) è di 11.968 con un aumento di 7.019 (ossia del 142 %); il 2° ganglio è aumentato di 318 (del 162 %), il 3° di 4.410 (del 103 %) ed il 4° di 2.291 (del 486 %). Le asimmetrie che anche in condizioni normali possono esistere tra i due gangli di uno stesso paio non possono incidere in misura notevole sui risultati ottenuti. Si noti che anche in questi aumenti si mostra chiaramente l'importanza dei fattori intrinseci. Ho infatti detto precedentemente che alcuni gangli spinali (quelli in rapporto con le intumescenze, e soprattutto il 3° e il 9° paio) nel loro periodo a sviluppo indipendente raggiungono dimensioni nettamente maggiori dei vicini. Or-

(7) V. HAMBURGER, in « J. Exper. Zool. », vol. 80, p. 347 (1939).

bene, sono questi i gangli che per effetto di un trapianto di arto raggiungono i massimi volumi riscontrati. La conseguenza che se ne trae è che i gangli spinali che nel normale sviluppo presentano maggiore grandezza, la raggiungono sia per le capacità in sé stessi insite (fattori intrinseci) sia perché in rapporto con essi vi è successivamente (fattori estrinseci) un'ampia periferia, nel nostro caso rappresentata essenzialmente dagli arti.

Nel caso di arti immobili l'aumento di grandezza dei gangli spinali è generalmente meno notevole, e in ciò ha pure importanza la minore quantità di muscolatura che si ha negli arti immobili onde minore quantità di fibre propriocettive.

CONCLUSIONI. — Quanto è stato esposto pone adunque in rilievo vari dati sull'importanza dei fattori intrinseci ed estrinseci nella genesi delle intumescenze del midollo spinale negli Anfibi anuri. Spero che le ricerche già in corso sul normale accrescimento del midollo spinale e dei gangli spinali, e quello sui vari stadi di sviluppo degli arti trapiantati, possano portare altre precisazioni.

Per ora si può concludere che la sperimentazione ha documentato che nello sviluppo del midollo spinale e dei gangli spinali si possono distinguere due periodi: uno a sviluppo indipendente ed uno a sviluppo dipendente dalla periferia (nel nostro caso costituita essenzialmente dagli arti).

Lo sviluppo normale delle intumescenze e dei corrispondenti gangli che raggiungono dimensioni maggiori dei vicini, si attua perché ai fattori intrinseci seguono (nel secondo periodo evolutivo) i fattori estrinseci.

L'esperienze mostrano che nel tratto di midollo spinale intermedio alle intumescenze (tratto di midollo nel quale non si verificano i primi stadi evolutivi dei corni motori) il trapianto di un arto, anche se con buona quantità di muscolatura, non porta alla formazione di corni motori. Ciò mostra l'importanza dei fattori intrinseci. Parimenti per i gangli spinali, pur verificandosi che l'aumento della periferia (trapianto di un arto) può fare aumentare di molto il loro volume, si ha pur sempre che nel risultato finale ha notevole importanza il volume già raggiunto nel periodo a sviluppo indipendente.

Tutte queste ricerche mostrano l'importanza che ha nello sviluppo delle intumescenze e dei corrispondenti gangli spinali, la cooperazione dei fattori intrinseci ed estrinseci, e la necessità che agli intrinseci, dominanti in un primo periodo di sviluppo, seguano, in un secondo periodo, quelli estrinseci.

Ai fattori intrinseci ed estrinseci sono connesse le differenze regionali del midollo spinale nonché la mobilità degli arti sia normali che trapiantati.



**Biologia** (Microbiologia). — *Frazione citotossica non emolitica nella O-streptolisina, messa in evidenza per mezzo delle culture di tessuti « in vitro »* (\*). Nota di GIUSEPPE PENSO e GIUSEPPE VICARI, presentata (\*\*) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Abbiamo saggiato l'azione della O-streptolisina sulle colture dei tessuti impiegando le stesse cellule e la stessa tecnica da noi adottate nello studio dell'azione citopatogena della tossina difterica e riferita a cotesta Accademia nella seduta del 13 aprile u. s.

La O-streptolisina esercita netta azione citopatogena, sulla entità e qualità della quale avremo occasione di tornare in una prossima nota; vogliamo oggi qui soltanto riferire sul fatto che tale azione citopatogena si manifesta adoperando sia O-streptolisina naturale che O-streptolisina riscaldata per 30' a 100°, temperatura alla quale si distruggono invece la sua capacità emolitiche.

La O-streptolisina possiede perciò almeno due frazioni tossiche: una termolabile emolitica (streptolisina vera), una termostabile citotossica (streptotossina) dimostrabile attraverso la sua azione specifica istopatogena sulle cellule di tessuti coltivati in *vitro*.

**Biologia.** — *Ricerche sul movimento degli spermatozoi di Anfibi in condizioni sperimentali e con l'ausilio della cinematografia* (\*). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata (\*\*) dal Socio G. COTRONEI.

Le presenti ricerche sulle modalità di movimento e sul comportamento degli spermatozoi di Anfibi anuri e urodeli sono state eseguite nel quadro delle indagini che ho attualmente in corso sul comportamento delle cellule nella edificazione delle strutture istologiche (1) e delle cellule libere in coltura (*behaviourismo cellulare*). Il comportamento degli spermi è di particolare interesse avendo queste cellule acquisita una completa libertà di movimento.

Esaminando le condizioni del movimento di spermatozoi di rospo (*Bufo bufo*) e di tritone (*Triturus cristatus*) secondo i criteri esposti, ho potuto mettere in evidenza alcune condizioni generali della motilità di queste cellule

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità.

(\*\*) Nella seduta dell' 8 giugno 1957.

(\*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata della Università di Roma.

(\*\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.

(1) Rimando per la bibliografia sull'argomento al lavoro: A. STEFANELLI, *Sul comportamento sociale di neuroni in speciali condizioni sperimentali*. « Acta Embryol. Morphol. Exper. », 1, pp. 56-64 (1957).

che ho creduto utile di seguire anche con la cinematografia a velocità normale e rallentata. Ho presentato tale film a Perugia nella riunione del Gruppo Embriologico Italiano ivi tenutasi nei giorni 12-13 aprile scorso.

Sia gli spermatozoi di rospo che quelli di tritone presentano un flagello munito di membrana ondulante sostenuta nel suo bordo libero da un secondo flagello, questo è più lungo del principale così che anche nella immobilità la membrana appare ondulata. Gli spermatozoi di tritone sono assai più lunghi di quelli del rospo e il numero delle ondulazioni della membrana è molto maggiore (quattro-cinque nel rospo, circa venticinque nel tritone). Per una dettagliata morfologia degli spermatozoi di questi animali rimando ai classici lavori di Retzius, Ballowitz e Meves.

Una complessa questione riguarda i fattori che entrano in gioco nella mobilitazione degli spermatozoi. È noto come gli spermatozoi contenuti nel succo testicolare, concentrati, siano agglutinati ed immobili e come divengano mobili con la diluizione; nel caso degli spermatozoi di anfibi con la diluizione in acqua di fonte o in soluzioni di particolari sali, soprattutto quelli di potassio (l'azione del potassio è stata illustrata per gli spermatozoi di mammiferi da White, 1953, e da Blackshaw, 1953).

Nel riccio di mare la mobilitazione degli spermatozoi aggiungendo acqua di mare è stata messa in rapporto da Hartmann e la sua scuola con la diluizione di un inibitore o sostanza agglutinante che è stata identificata con l'androgamone I. Ma non tutti concordano con gli autori tedeschi e Tyler <sup>(2)</sup> ritiene che non sia questo il meccanismo con cui si esplica l'effetto di diluizione. Gli spermatozoi divengono infatti mobili sia diluendoli in acqua di mare che con plasma seminale ricco di androgamoni, come hanno dimostrato Gray (1928) e più recentemente Hayashi (1945). Così la diluizione con acqua distillata non provoca la mobilitazione degli spermatozoi negli Anfibi, ma ciò potrebbe essere in rapporto alla condizione di ipotonia dannosa al movimento. Secondo Bishop e Mathews (1952), Lardy, Hausen e Phillips (1945) e Rothschild (1948) la immobilità sarebbe, nei Vertebrati, in relazione alla bassa tensione di ossigeno dello sperma concentrato <sup>(3)</sup>. Vedremo tra breve il valore delle ossidazioni nel metabolismo degli spermatozoi.

Secondo Tyler e collaboratori (1950-52) la durata della motilità degli spermatozoi è aumentata aggiungendo al liquido diluente amino-acidi; questi però non sono utilizzati come fonti di energia, ma agiscono, come altre sostanze metallo-chelanti, ad esempio il versene, bloccando l'attività di tracce metalliche tossiche. L'effetto favorevole della diluizione con plasma seminale è interpretabile con questa azione.

Il problema della mobilitazione degli spermatozoi è negli anfibi più complesso, per lo meno in quelli provvisti di membrana ondulante, perché si possono distinguere tre gradi di movimento: 1°, movimento della sola mem-

(2) Vedi il capitolo: A. TYLER, *Gametogenesis, Fertilization and Parthenogenesis* del volume *Analysis of Development* edito da WILLIER, WEISS e HAMBURGER (Ed. Saunders), Philadelphia 1955.

brana ondulante; 2°, movimento della membrana ondulante accompagnato dal movimento vibratile del flagello, ma senza provocare la progressione della cellula; 3°, movimento completo della cellula, compresa la testa, che provoca la progressione. I fattori che evocono questi tre gradi di movimento sono ancora oscuri; tuttavia alcune osservazioni che ora esporrò possono chiarire alcuni aspetti del problema.

Mi è stato facile ottenere con l'agitazione meccanica spermatozoi di rospo spezzati in modo da produrre teste e code isolate, con e senza il pezzo intermedio contenente il centriolo a cui è stato attribuito tanto valore come centro del movimento dei flagelli. Ho anche ottenuto piccoli segmenti isolati della coda.

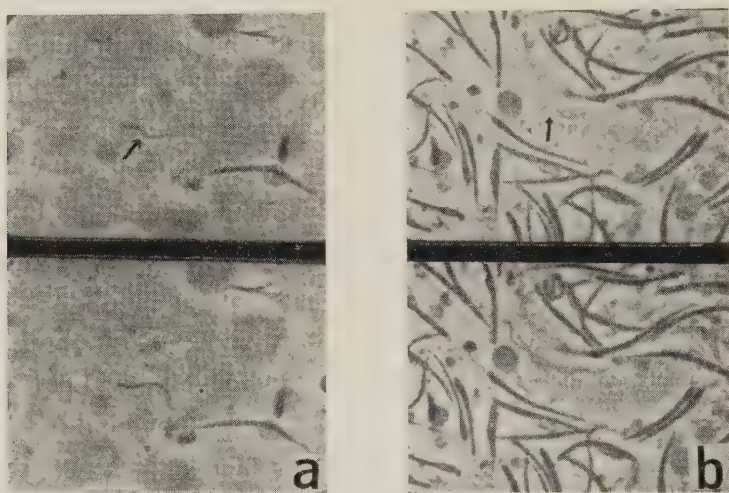


Fig. 1. - Fotogrammi mostranti:

a) il movimento di un frammento di coda di spermatozoo di *Bufo bufo*; b) il movimento di una coda staccata dalla testa nel succo testicolare concentrato quando gli spermatozoi integri sono invece agglutinati ed immobili. (Contrasto di fase).

Si può osservare innanzi tutto la possibilità di movimento e di progressione non solo delle code isolate, sia con pezzo intermedio che senza (cosa che appare già osservata da Mann in Mammiferi <sup>(3)</sup> e che Terni ha osservato in code di *Geotriton* isolate col micromanipolatore (1933-34) <sup>(4)</sup>), ma anche dei piccoli frammenti (fig. 1 a). Le code isolate procedono mantenendo la normale polarità di progressione; è invece difficile capire se nei frammenti tale polarità è rispettata. È evidente come il centriolo non sia indispensabile per il movimento sia del flagello che della membrana ondulante.

(3) Per la bibliografia vedi il volume sul Simposio della Ciba Foundation: *Mammalian Germ cells* (1953) Ed. Churchill, Londra.

(4) T. TERNI, *Microdissezione di spermatozoi*, « Boll. Soc. it. Biol. Sperim. » (1933). - VIII. *Recherches de micrurgie et de U. V. radiopique sur les spermatozoides des Urodeles*, « Arch. Exper. Zellforsch. », XV, pp. 334-340 (1934).



Un fatto nuovo che appare da queste mie osservazioni è che, nel succo concentrato, dove tutti gli spermii integri sono immobili, le code isolate, sono dotate di un movimento più o meno vivace (fig. 1 *b*). Questo fatto dimostra che l'effetto inibente agisce sulle teste e che la immobilità delle code è diretta dalla testa; le code isolate non risentono direttamente della azione inibente e manifestano un movimento autonomo. Anche spermii atipici, con la testa vescicolosa, sono mobili in questa condizione dimostrando di non risentire dell'effetto inibente.

Ma se si diluisce lo sperma con acqua di fonte o con una soluzione di sali di potassio si osserva come, man mano gli spermii integri si mobilitano, le code isolate che erano mobili vadano in breve tempo, un minuto circa al massimo, perdendo vivacità, e infine si immobilizzano.

Questo fenomeno fa pensare che le fonti di energia per il movimento della coda siano utilizzate in modo diverso nelle code isolate mobili nel succo concentrato e negli spermatozoi integri mobili nel succo diluito. Ricordo a questo proposito come la fonte di energia sia rappresentata negli spermii dei Vertebrati essenzialmente da esosi e precisamente, secondo Mann (1945), da fruttosio; esso è convertito in acido lattico e acido piruvico mediante un processo anaerobico glicolitico (Rendez, 1933, Lardy e Phillips, 1941, MacLeod, 1941). In presenza di ossigeno l'acido piruvico e lattico (e lipidi) sono ossidati con processo respiratorio. Ma la respirazione non è necessaria anche se, come ha dimostrato MacLeod (1946), in condizione di anaerobiosi la motilità cessa più rapidamente, anche se il substrato è ricco di materiale glicolizzabile. Secondo Lardy e collaboratori<sup>(3)</sup> i processi ossidativi si attuano negli spermii in modo simile a quello dei mitocondri e sono pertanto attivati da tiocomposti e da cisteina. Pertanto, secondo questi autori, la concentrazione dei tiocomposti liberi è fondamentale per l'attivazione della respirazione; questo può spiegare la differenza di tale attività in particolari condizioni: così, ad esempio, è minore negli spermii epididimici che in quelli ejaculati, in quanto nel succo dell'epididimo vi sarebbe un eccesso di tiocomposti. È pertanto presumibile che ci sia una differenza di rapporto tra glicolisi e respirazione, tra le code mobili in succo concentrato (povero di  $O_2$ ) e gli spermii integri mobili in succo diluito.

Il problema fondamentale che mi ha spinto a queste ricerche è stato quello del comportamento sociale degli spermii.

È stato messo in luce da Rothschild e collaboratori che gli spermii dei Vertebrati si muovano *a caso* e come non siano riscontrabili in modo certo fenomeni di chemiotropismo, quali invece sono stati messi in luce per gli anterozoidi delle felci (ad opera dell'acido malico) e per gli spermii di alcuni Invertebrati. Già Morgan, nel 1927, aveva messo in dubbio il chemiotropismo per gli spermatozoi. Questo fatto comporta, tra le altre cose, che gli spermii in condizione diluita si muovono senza apprezzabili rapporti reciproci; cosa accade quando sono in stretta vicinanza?



Dalle mie osservazioni con l'ausilio della cinematografia accelerata (e quindi rallentata in proiezione) appare evidente una reciproca influenza quando gli spermatozoi vengano con le teste ad un contatto più o meno stretto: in tali condizioni il battito dei flagelli tende ad entrare in sincronismo che risulta più o meno perfetto a seconda della distanza delle cellule. La Tavola I, fig. A e B mostra spermatozoi di rospo in cui le ondulazioni delle cellule vicine sono perfettamente sincrone. Tale sincronia si manifesta anche in ciuffi di spermatozoi con le teste tra loro agglutinate.

In ciuffi di spermatozoi di tritone, con le teste tra loro agglutinate, si può anche constatare un sincronismo della trasmissione delle ondulazioni delle membrane ondulanti lungo i flagelli.

Interessante è la condizione di movimento in spermatozoi che appaiono ancora fissati con l'estremità della testa nella cellula di Sertoli o a suoi frammenti pur non essendo le teste stesse a stretto contatto né avvengano contatti tra le code. Si osservano in queste condizioni degli ampi movimenti di flessione della testa e delle code che portano a delle ondulazioni perfettamente sincrone (Tavola I, fig. C).

Si potrebbe pensare, nel caso degli spermatozoi di rospo, ad un effetto puramente meccanico nel sincronismo del movimento dei flagelli dovuto al reciproco contatto; ma sovente si può benissimo vedere come, seppur vicini, non vi siano contatti né tra i corpi cellulari, né tra le code. Ciò è chiarissimo nel caso degli spermatozoi di tritone. Si deve piuttosto pensare che queste cellule pur dotate di movimento indipendente, siano portate a limitarlo, nel quadro di una coordinazione reciproca, quando vengano associate in modo più o meno intimo, coordinazione dello stesso tipo di quella che si manifesta nel movimento dei flagelli di cellule epiteliali tra loro associate.

In conclusione, da queste osservazioni con l'ausilio della cinematografia, risulta innanzi tutto la possibilità di movimento e progressione sia di code isolate che di frammenti in assenza del centriolo; così pure flessioni della testa si possono verificare in assenza della coda e del pezzo intermedio (nel rospo). Risulta che il fattore di inibizione del movimento nel succo testicolare concentrato agisce sugli spermatozoi integri e non sulle code isolate che in queste condizioni sono dotate di movimento. Il differente comportamento alla diluizione, tra spermatozoi integri e code isolate, dimostra un diverso modo di utilizzazione delle sorgenti di energia chimica.

L'aggregazione di spermatozoi porta ad un coordinamento nel movimento vibratorio dei flagelli e delle membrane ondulanti. Ciò dimostra che gli spermatozoi, cellule dotate di movimento tipicamente indipendente, perdono questa indipendenza per una coordinazione di movimenti, quando siano in stretta vicinanza. Tale coordinazione non è semplicemente dovuta a condizioni meccaniche di contatto poiché si manifesta anche in casi in cui non si verificavano diretti contatti materiali tra le cellule.



A e B: due esempi di sincronismo nel moto flagellato delle code di spermatozoi di *Bufo bufo* in contrasto con la testa. C: sincronismo di movimento di spermatozoi di *Triturus cristatus* ancora fissati con la testa ad un frammento della cellula di Sertoli. (Da cinematografia a 64 fotogrammi al m<sup>2</sup>; in contrasto di fase, I fotogrammi delle figure sono selezionati 1 ogni 20; senso del movimento dall'alto in basso delle figure).



## COMMEMORAZIONI

## Commemorazione del Socio Nazionale Pietro Rondoni

tenuta (\*) dal Corrisp. LUIGI CALIFANO

La figura spirituale di Pietro Rondoni, assai complessa per ricchezza e per altezza di interessi, si erge su una figura umana semplice e schietta, che concepì la vita e la visse in bontà ed in umiltà, consapevole della propria missione di uomo e di studioso.

Forse la struttura del Suo carattere, estraneo a quanto non fosse spirituale, cioè alla volgarità che Goethe definì « tutto ciò che non si riferisce allo spirito », gli impose, attraverso il travaglio della mente mai paga, l'anelito a quella evoluzione che progressivamente conquistò.

Ebbe dalla natura molti doni: forte ingegno e vigorosa memoria, capacità a rapidamente intendere e assimilare, originalità di idee e senso e gusto critico, ma ebbe anche il dono grandissimo della profonda e continua analisi di se stesso e perciò spinta e necessità alla correzione ed al miglioramento. Conobbe, cioè, profondamente se stesso da giudice severo e perciò, forse, indulgeva facilmente agli altri perché meno poteva in egual guisa giudicarli e meno pretendere quella perfezione che in se stesso non riusciva a trovare.

La Sua vita si svolse nella ricerca della verità in un progressivo perfezionamento di pensiero, su piani sempre più elevati.

Iniziò la Sua carriera di ricercatore sotto la guida del Lustig verso il quale serbò ognora gratitudine soprattutto come Maestro di vita, nell'Istituto di Patologia generale dello Studio fiorentino del quale era orgoglioso di sentirsi discepolo ed i nomi dei Suoi grandi Maestri, del Chiarugi, del Banti, del Lustig ricorrevano di frequente nel Suo parlare, nomi che ricordava con venerazione e con rimpianto.

Il giovanile tentativo di dedicarsi alla Neurologia, nel tempo in cui si svolgevano le grandi conquiste istologiche e funzionali sul sistema nervoso, indica l'interesse del Suo spirito ad una dottrina che più di ogni altra era in via di conquista della verità. Circostanze d'ambiente lo distolsero da tale inclinazione ed Egli si interessò alla Patologia generale, disciplina anch'essa in tumulto, da una parte per le grandi scoperte microbiologiche e soprattutto immunologiche che avevano già dato un nuovo volto alla Medicina biologica e pratica e dall'altra per l'indirizzo biochimico e funzionale che il Galeotti andava affermando, indirizzo diretto alla scoperta e interpre-

(\*) Nella seduta del 6 giugno 1957.



tazione della essenza dei fenomeni morbosi, segnato allora e quindi affermatosi, e che ora costituisce il corpo stesso della Patologia generale.

Fra gli immunologi d'allora si ergeva sovrana la figura di Paul Ehrlich, che fu e resta uno dei più grandi biologi di ogni epoca per scoperte di fatti e per genialità di concezioni. Il Rondoni fu allievo di Ehrlich e da lui trasse l'indirizzo che portava a riconoscere in ogni fenomeno biologico, e quindi anche nella Immunologia, l'espressione di corrispondenti fenomeni chimici e chimico fisici. La potente personalità di Ehrlich esercitò decisiva influenza sul Rondoni ed Egli volentieri, anche dopo tanti anni e tanto progredire del sapere e dopo che la stessa teoria immunologica delle catene laterali si dimostrò inadeguata e superata, si rifaceva a lui e vedeva nello sviluppo attuale della ricerca agganciamenti ed estensioni dell'opera di Ehrlich.

Ricerche di Immunologia, di Microbiologia e di Patologia sperimentale Egli continuò nel Laboratorio di Firenze, ricerche adeguate alla limitazione dei mezzi. Della Sua attività di ricercatore di quel periodo Egli fu sempre memore e quando, come spesso solea, ammoniva che anche con mezzi limitati è pur sempre possibile eseguire buona ricerca, purché ci sia passione, cultura e tecnica, riandava, io penso, con la mente al vecchio Laboratorio di Via degli Alfani nel quale era maturata la Sua giovinezza e dal quale era uscita una schiera di valorosi Patologi, sovrano fra tutti Gino Galeotti.

Verso la fine del periodo fiorentino, cioè del Suo assistentato, il Rondoni inizia, quasi timidamente, la Sua attività di biochimico, sotto la spinta di Angeli che lo interessò, per la parte biologica sperimentale, alle ricerche sui pirroli nella melanogenesi. Da questo momento l'interesse di Rondoni si sposta più e più verso lo studio e la indagine biochimica, indirizzo che presto diventa predominante nell'opera di Lui, e che anche se negli inizi fu una rivelazione, segna un progresso decisivo del Suo spirito. Nel biennio trascorso a Napoli, come successore di Galeotti, il Rondoni elaborò il Manuale di Biochimica che aggiornò poi in ciascuna delle numerose edizioni e del tutto rifece nelle due ultime. Il libro Egli dedicò alla memoria di Gino Galeotti del quale era allora unanime e doloroso il rimpianto per la immatura dipartita. C'è da chiedersi per quale movente spirituale Egli abbia dedicato l'opera alla memoria di un Uomo col quale non ebbe particolare domestichezza né particolari legami, se non quello della comune origine dall'Istituto di Firenze e quindi dallo stesso Maestro. Io penso che l'impulso all'atto devoto sia originato dal rispetto che Egli portava all'indirizzo biochimico del Galeotti, al quale ora si sentiva più coscientemente vicino e col quale forse quasi si scusava di aver fatto un'opera in un campo nel quale l'altro era già stato splendida affermazione.

La direzione dell'Istituto del Cancro di Milano, con la conseguente responsabilità di direzione della ricerca oncologica, dà al Rondoni l'occasione di interessarsi al problema dei tumori, campo al quale già prima si era avvicinato con ricerche sperimentali e, eclettico com'era, aveva poi sempre coltivato dottrinalmente. Da quel momento la Sua attività si va sempre più concentrando in tali studi, e l'assillo di avvicinarsi ad intendere l'essenza

del meccanismo della cancerogenesi lo dovrà accompagnare sempre, lasciandolo sempre insoddisfatto, sempre più consapevole della difficoltà del problema e della temporaneità di questa e quella concezione, con sempre viva l'idea che l'opera di molti, per diverse vie, per svolgimenti su piani sempre più complessi di ricerca, prima o poi, dovrà pure risolvere. Come il Manuale di Biochimica offriva agli altri il servizio del riassunto della cultura che in quel campo aveva conquistato, così il volume sul cancro è servizio reso agli studiosi con l'offerta di quanto Egli aveva appreso e di quanto, col Suo pensiero, era riuscito a comprendere ed interpretare. Questo volume sul cancro fu preparato durante la guerra, tra gli stenti e i dolori e le ansie di essa, ed è, anche per questo, espressione di quel raccoglimento e di quel senso di dovere che Egli si impose, non potendo dare altro al Paese, di offrire agli studiosi il frutto del Suo lavoro. Di quel tempo è pure il volume di Genetica ai quali studi Egli attese in concomitanza dell'estendersi e dell'approfondirsi delle ricerche biochimiche ed oncologiche. La sempre più chiara relazione tra geni e metabolismo, anzi l'affermarsi del concetto della dipendenza genica delle sintesi enzimatiche e, quindi, del corrispondente fenomeno metabolico, estendeva da Beadle in poi, la Genetica dal piano prevalentemente morfologico a quello biochimico e funzionale e l'interesse di Rondoni, già vivo per la Genetica, per i molti legami che tale Scienza ha con la Patologia generale, si accrebbe, armonizzandosi nel campo oncologico sul sempre più esteso rapporto che veniva dimostrandosi tra tumori e linee genetiche sia per la cancerizzazione indotta artificialmente, che per la propagazione dei ceppi dei tumori spontanei.

In tal momento Rondoni ha raggiunto la piena maturazione della Sua personalità di studioso e di ricercatore. Ora Egli domina veramente con il Suo pensiero la Patologia generale e ne può considerare sotto i molteplici aspetti ogni problema vecchio o nuovo per Lui o per altri. Non si sente, in realtà, di possederla tutta e tale impossibilità rende più profondo in Lui il senso di umiltà e di rassegnazione. Di tale inclinazione spirituale ci sono tante espressioni verbali e scritte tra cui, ad esempio, quando in occasione della cura che fece della edizione italiana del Manuale di Patologia generale del Buchner, libro a indirizzo sostanzialmente morfologico e per il quale sentì la necessità di integrazioni parziali e della aggiunta di alcuni capitoli di Immunologia, mi esprimeva, nella scarsa soddisfazione che comportava tale opera di revisione e di aggiornamento, l'utilità che ne aveva tratto nello apprendere o riapprendere cognizioni di morfologia patologica descrittiva.

La Sua salda preparazione istologica e microbiologica, la conoscenza che ebbe profonda e larga della Immunologia, e per la diretta partecipazione che prese con le Sue ricerche alla evoluzione di essa, e per l'amore che sempre portò a tali studi che seguì con diligenza estrema nel loro attuale e complesso svolgimento, gli davano la conoscenza dei fenomeni patologici nella loro estrinsecazione formale e di prima interpretazione. L'essenza del fenomeno Egli poteva intendere, o avvicinarsi ad intendere, sul piano metabolico nel quale largamente si moveva per la conquistata competenza bio-

chimica che continuamente affinava ed estendeva. Il problema del cancro, molteplice per le sue complesse espressioni, Egli poteva intendere, perciò, con sguardo d'insieme nel suo aspetto formale citogenetico e in quello non meno grave e complesso del metabolismo non solo e non tanto di quello energetico, ma sostanzialmente di quello plastico. Tale lo intese e cercò di interpretare. I Suoi due ultimi più cospicui contributi riflettono tale interesse: uno è l'articolo pubblicato nel 1949 in «*Ergebnisse der Enzymforschung*», l'altro comparso nel terzo volume di «*Advances in Cancer Research*» dal titolo: *Some aspects of carcinogenesis* porta la data del 1955, ma, in effetti, apparve nel 1956, pochi mesi prima della Sua dipartita.

La acquisita dottrina nei vari campi della Patologia, della Biochimica pura e della Biologia generale è espressione di quella evoluzione di pensiero cui ho accennato e che perciò rende alta e nobile la Sua figura spirituale. Tale evoluzione trascende gradatamente l'interesse meramente biologico e si avvicina alla astrazione metafisica, nell'ansia di intendere il significato degli stessi fenomeni biologici, i limiti e le possibilità della Scienza, la posizione del proprio pensiero e della propria spiritualità. Gli scritti occasionali più antichi su: *Dolori e gioie dello scienziato, Salute e malattia, Il finalismo dei fenomeni biologici, Eredità ed ambiente dal punto di vista morale, Ai confini del mondo vivente, Considerazioni medico-biologiche sulle lettere di San Paolo, Il problema della vita* e quelli più recenti su: *Libertà e vincoli nel pensiero scientifico, Scienza e umiltà, I virus e l'essenza della vita, La sintesi della sostanza vivente, Il finalismo nei processi della vita*, sono frutto di tale inclinazione e di tale evoluzione onde nel complesso la figura di Pietro Rondoni appare, attraverso la autoeducazione da autoanalisi, la figura del Saggio.

Il Rondoni in varie occasioni ha riassunto i Suoi contributi scientifici raggruppandoli per argomenti ed innesta le ricerche più recenti su quelle più antiche e vi inserisce i contributi dei propri Allievi, scrupolosamente avvertendo nella stessa prefazione ai vari *curricula* di non avere considerato i lavori dei Suoi Collaboratori ed Allievi svolti con autonomia di pensiero e di esecuzione.

Le ricerche di Immunologia riguardano in buona parte la reazione di Wassermann per la quale il Rondoni, in collaborazione con Sachs, pose in evidenza il fenomeno detto dipoi « Fenomeno di Sachs e Rondoni » della sensibilità degli antigeni in rapporto al grado di dispersione degli estratti lipidali in acqua, fenomeno servito, in seguito, per la interpretazione della reazione stessa e per la standardizzazione della relativa tecnica. La possibilità di staccare l'anticorpo emolitico dalle emazie a mezzo di alcali dimostrata dal Rondoni nel 1911, mentre contribuì allora a far conoscere il modo di reazione tra antigene e anticorpo è servita in seguito a parecchi studiosi per l'isolamento e individuazione chimica degli anticorpi.

Nelle ricerche sulla polarimetria dei sieri, particolarmente di quelli luetici, iniziate a Sassari nel 1920-22 e poi integrate successivamente da Allievi milanesi, risulta un fatto tuttora oscuro nel suo significato e cioè che non solo nei sieri immuni aumenta il potere rotatorio ma che tale aumento



precede la comparsa degli stessi anticorpi, ciò che fa ammettere che nel corso della immunizzazione passino nel siero, a causa della intervenente sintesi degli anticorpi nelle cellule che li generano, costituenti di tali cellule, ciò che indica il perturbamento metabolico che in queste si avvera. Che la sintesi degli anticorpi fosse legata a variazioni metaboliche specialmente ossidative dei tessuti in via di immunizzazione è stata idea più volte sostenuta dal Rondoni e appoggiata da alcune ricerche di Allievi e in particolare da quelle di Di Marco, idea collegantesi con quella riguardante la sintesi proteica nelle cellule neoplastiche, come sarà detto più innanzi.

Le ricerche sulla infezione sperimentale da *Trypanosoma brucei*, mentre costituirono il primo tentativo di dimostrazione di corpi tossici in tali protozoi e furono tra le prime ricerche inerenti alla messa in evidenza, attraverso la vaccinazione, di una immunità antiprotozoaria, dimostrarono nella milza e gangli linfatici degli animali infetti una estesa infiltrazione plasmacellulare, di quelle plasmacellule che per il ricco contenuto del citoplasma in acido ribonucleinico sono considerate sede assai attiva di sintesi proteiche, e verosimilmente uno dei tipi cellulari capaci di formare anticorpi.

Tra i germi patogeni il Rondoni rivolse particolare interesse a quello tubercolare e dimostrò nel 1924 l'azione eccitante che i filtrati di vecchie culture esercitano sulla moltiplicazione. Interessante fatto che oggi possiamo interpretare e così di recente Rondoni lo interpretò, come fornitura di particolari complesse molecole di lenta sintesi che i germi culturalmente esigenti sintetizzano con difficoltà ma che, se presenti nel mezzo di sviluppo, determinano accelerazione della velocità di moltiplicazione. Il fenomeno è di interesse generale non solo per la Microbiologia ma per la Fisiologia generale, perchè riguarda la possibilità di sostituzione, con apporto esterno, di molecole complesse a specifiche e lente sintesi cellulari onde ne consegue incremento nella crescita e nella moltiplicazione.

Ricerche giovanili del Rondoni misero in evidenza nella reazione istogena tubercolare la diversità di sviluppo nella prima infezione e nella reinfezione. Nel primo caso la inoculazione endoperitoneale di bacilli determina una reazione cui largamente partecipano gli istiociti e si ha così il primo nucleo dal quale origina il tubercolo mentre nella reinfezione predomina la reazione linfatico-granulocitica onde tendenza alla colliquazione e sequestro del focolaio. Queste ricerche costituiscono, per la parte istologica, la spiegazione del fenomeno di Koch, la cui essenza, che è di natura immunitaria e quindi biochimica, permane tuttora oscura. Connesse con questi studi sono le ricerche eseguite di tempo in tempo dal Rondoni ed Allievi sul meccanismo della reazione tubercolinica, diversa nelle sue estrinsecazioni fisiopatologiche da altre forme allergiche e principalmente dalla anafilassi.

Ricerche molto estese furono eseguite intorno al 1919 sulla chemioterapia della tubercolosi sperimentale con sali di nichelio e di cobalto per i quali si palesò *in vitro* una spiccata azione antimicrobica, ricerche che, come il Rondoni stesso dice nel suo ultimo *curriculum*, andrebbero ora riprese



sia in concomitanza dei potenti chemoterapici attuali, sia adoperando complessi con affinità per il bacillo di Koch.

Un punto, credo, meriti anche rilievo e cioè l'idea prospettata dal Rondoni della importanza di metaboliti di semplice costituzione nella immunità aspecifica. Egli provò alcuni di tali metaboliti con qualche effetto interessante. Ma non è il risultato che ha gran rilievo, è l'idea informativa di questi tentativi che deve essere posta in evidenza. Noi sappiamo ora, specie per opera di Dubos e di Racker, che il metabolismo generale e specialmente quello locale dei tessuti hanno grande importanza per la sensibilità e resistenza alla infezione tubercolare. Sappiamo, ad esempio, che l'acido citrico e l'acido aceto-acetico incrementano assai lo sviluppo della infezione sperimentale tanto da causare la morte del topo da BCG come, per contrario, l'acido lattico innalza sensibilmente la resistenza. Si tratta di metaboliti semplici cui pensava il Rondoni ed è veramente un peccato che questa idea, indipendentemente sorta in altri ricercatori, abbia portato a risultati particolarmente interessanti, mentre nell'opera del Rondoni essa sia rimasta presso che allo stato potenziale.

Gli studi sulla melanogenesi, iniziati sotto la spinta dell'Angeli, portarono alla importante dimostrazione della melanogenesi da inoculazione di composti pirrolici. I neri di pirrolo di Angeli sono, come dice Quilico, melanine schematiche con aggiunta, in quelle naturali, di altri complessi ciclici e Rondoni ha il merito di aver data la prima dimostrazione biologica della utilizzazione dell'anello pirrolico nella sintesi della melanina.

Ai tempi dello assistentato fiorentino del Rondoni l'interesse dei Patologi italiani era teso allo studio della eziopatogenesi della pellagra per la quale regnava ampia confusione di idee, e tra queste anche quella della origine infettiva della malattia. Il Lustig presiedeva una Commissione di studio per tale flagello sociale ed il Rondoni iniziò larga sperimentazione in tal campo dimostrando, prima di ogni altro fatto, la insostenibilità della natura infettiva e la inesistenza di fenomeni immunitari pure ammessi e valorizzati. Concentrava pertanto la ricerca nel campo alimentare e specialmente vedeva nella genesi della malattia una carenza vitaminica, dimostrando la regressione della sintomatologia sperimentale mercè estratti idroalcoolici di fegato ed estratti di vegetali freschi, e con ciò la carenza di principî essenziali nelle diete. Queste ricerche non portarono all'isolamento dell'acido nicotinico ma sono certamente precorritrici di tale scoperta, resa possibile dalla fortunata scelta da parte di Elvehjem del cane come animale da esperimento che va incontro alla black tongue, alterazione a tipo pellagroso, mentre nella cavia le diete antipellagrose, usate dal Rondoni e da altri ricercatori italiani, determinano anche alterazioni scorbutiche e pertanto quadri patologici misti.

Nelle ricerche sullo scorbutico delle cavie Rondoni dimostrò il fatto che poi ha portato alla scoperta della vitamina C e cioè l'imponente ipertrofia surrenale, constatazione a torto attribuita a McCarrison.

Anche per la vitamina D Rondoni ha ricerche precorritrici quando eleva dubbi che la colesterina fosse il principio attivabile fotochimicamente a vitamina e pensa alla presenza di ignote sostanze presenti come impurità nella colesterina. Presto venne la dimostrazione che la ergosterina è la provitamina contenuta nei preparati non puri di colesterina.

La iperplasia surrenale nello scorbutto sperimentale richiamava l'attenzione di Rondoni sulla importanza di questa ghiandola nella patogenesi della malattia e così trovò che l'adrenalina aveva una certa azione curativa. Queste ricerche furono riprese nel 1932 da Deotto che dimostrava, a mezzo della stabilizzazione con acido citrico, che l'estratto surrenale normale è assai più attivo nella cura dello scorbutto che non estratti di fegato, per la presenza nel primo di una sostanza antiscorbutica che fu poi chiamata acido ascorbico.

Lo studio della infiammazione allergica, che già il Rondoni aveva seguito nel corso della reinfezione tubercolare e in quella stessa epoca anche nella reinoculazione da siero, viene ripreso dopo vari anni con la dimostrazione dell'azione potenziatrice che l'acido urico ha sul processo infiammatorio onde la espressione di cofattore della flogosi che Egli dà a tale metabolita. La notevole estensione sperimentale del Chini su questo fatto ha portato a riconoscere nell'acido urico un fattore umorale di molto significato nella patogenesi delle alterazioni articolari. La dimostrazione che l'acido urico in concentrazioni di per sé inattive rende più grave una infiammazione allergica evidentemente per effetto sulla permeabilità vasale mentre l'altra constatazione che l'acido urico in dosi maggiori ha di per sé un'azione flogogena, come ha dimostrato Chini con lo studio dei granulomi uratici, fanno riconoscere a questo metabolita un duplice ufficio nel determinismo della gotta. Da un lato, per via umorale, esso con l'influenza esercitata sulla permeabilità delle membrane incrementa i fenomeni flogistici allergici locali e con ciò si ha anche maggiore deposizione dello stesso acido urico che, d'altra parte concentrandosi nel focolaio infiammatorio di per sé agisce da agente flogogeno aggravando la infiammazione già in atto. Forse non si tratta di due azioni diverse, ma di due tempi diversi di uno stesso effetto in una specie di circolo vizioso patogenetico.

A proposito di ricambio purinico va anche rammentato un importante lavoro del Rondoni del 1930 nel quale veniva dimostrato il fatto che il ratto a dieta apurinica elimina tracce appena apprezzabili di allantoina, la quasi totalità di escrezione essendo rappresentata da acido urico, un ricambio, dunque, a tipo umano, mentre per dieta iperpurinica si ha elevata eliminazione di allantoina, una «uricolisi di fortuna» come la definì il Rondoni, fenomeno certamente complesso che, come Egli stesso consiglia, andrebbe ulteriormente indagato.

Dal 1926 l'attività scientifica di Rondoni si va sempre più concentrando sulla biologia dei tumori per diventare, quindi, preminente e poi esclusiva negli ultimi anni. La Sua mente è sempre più assillata dal problema che Egli riguarda da ogni punto di vista che gli si presenta aggredibile speri-

mentalmente, spinto dall'ansia di strappare il segreto alla Natura. Si dedica a ricerche di metabolismo perché la patogenesi della crescita neoplastica si svolge, come ogni altra patogenesi, sul piano metabolico, studia alcuni agenti cancerogeni - *virus* e idrocarburi - per il lato eziologico, esamina l'influenzamento della crescita ad opera di vari fattori per risalire, attraverso corrispondenti risultati, a considerazioni eziologiche o patogenetiche. È qui che nell'opera di Rondoni appare forse più che altrove la fertilità della Sua mente poderosa e la capacità del tutto peculiare a raccordare fenomeni e osservazioni con concezioni dottrinali, a trarre da tali interpretazioni spunti e idee per nuove ricerche e anche sovente a distinguere l'essenziale dall'accessorio, l'effetto dalla causa.

Si era già occupato, in gioventù, della influenza della introduzione forzata di glucosio sullo sviluppo neoplastico con l'interessante reperto della accelerazione della velocità di crescita del sarcoma di Jensen, dimostrando così la intensa capacità del tessuto neoplastico al metabolismo carboidrato, sul quale metabolismo si ebbero poi le fondamentali scoperte di Warburg sulla glicolisi. Rondoni è stato, però, sempre contrario a riconoscere in tale atteggiamento metabolico della cellula neoplastica significato eziologico come, invece, sosteneva Warburg e come questi sostiene ancora al presente in ricerche che si seguono con notevole frequenza. Rondoni vede nella glicolisi un effetto della cancerizzazione e ritiene, in base a risultati di Borghi e di Deotto, che le cellule neoplastiche traggono, come quelle normali, la energia di moltiplicazione da fenomeni ossidativi e sostiene con vigore quella che Egli chiama la teoria ossibiotica della crescita. La questione permane aperta e sebbene la concezione di Warburg poggi su argomenti assai importanti e mentre io stesso partecipo tuttora per tale concezione, debbo riconoscere che al presente, specie per opera delle ricerche di Weinhouse con lipidi marcati, la lipolisi ossibiotica ha notevole sviluppo nelle cellule cancerose. Forse è da credere che il metabolismo dei tumori sia un metabolismo misto idrocarbionato e lipidico il primo in accordo con Warburg largamente anaerobico e limitatamente aerobico, mentre quello lipolitico è esclusivamente aerobio. Concorderebbe tale conciliazione col fatto che il quoziente respiratorio delle cellule neoplastiche è minore dell'unità. È possibile anche che i due momenti metabolici abbiano diverso sviluppo per la cellula nella fase moltiplicativa ed in quella intercinetica. Un aspetto metabolico strutturale riguardato a più riprese dal Rondoni è quello della lipolisi non nel senso di metabolismo demolitivo, ma di metabolismo strutturale. Egli stesso fa risaltare questa precisazione intendendo riferirsi, come si esprime « ai lipidi complessi legati alle strutture cellulari, che non sono, cioè, i lipidi metabolici ». Giunge alla conclusione, attraverso molte indagini proprie e di Allievi, che nella cellula neoplastica c'è una alterazione o spostamento o, come Egli dice, un rimaneggiamento dei lipoidi strutturali, con ripercussioni sul metabolismo generale lipidico dell'ospite. Concezione questa importante perché riguarda la substruttura della cellula di cui la anaplasia potrebbe considerarsi espressione sul piano strutturale microscopico. È ovvio che l'alterazione lipidica



strutturale può farci avvicinare a comprendere uno dei lati dell'azione degli idrocarburi cancerogeni e di altri cancerogeni liposolubili.

L'argomento che forse più di ogni altro ha interessato Rondoni nel campo oncologico e anche fuori di questo, perché di portata generale, è quello della sintesi proteica. Egli, specie negli ultimi anni e assai chiaramente e con convincenti argomenti nell'articolo pubblicato nel 1955 in «*Advances in Cancer Research*», sostiene che «il vero problema della cancerogenesi è piuttosto concentrato nei processi della sintesi proteica». Si avvicina a tale concezione con due linee di ricerche. La prima riguarda l'azione aggregatrice di proteine o peptidi superiori da parte di piccole quantità di acqua ossigenata e la induzione che la denaturazione termica di una proteina esercita su altra genuina funzionando essa da «germe», come si esprimeva Egli nel 1938, o da starter o primer come potremmo dire meglio oggi, in analogia a quanto accade nella sintesi, ad esempio, dei polisaccaridi. L'altra linea sperimentale è costituita dalle ricerche sulle catepsine dei tessuti in varie alterazioni patologiche e in altre condizioni sperimentali. Senza negare alle catepsine importanza nei processi di autolisi proteica, Rondoni ritiene che questi fermenti agiscano prevalentemente nella sintesi catalizzando l'istituirsi dei nuovi legami peptidici tra gli aminoacidi deposti in corrispondenza dell'aminoacido identico nella già costituita catena peptidica, come in un processo di cristallizzazione. Questa concezione, espressa dopo vari anni da Haurowitz, è ora largamente sostenuta in base anche alla cosiddetta legge del tutto o del nulla della sintesi proteica.

L'insieme dei risultati e relativi inquadramenti dottrinali porta il Rondoni alla formulazione di una ipotesi sulla cancerizzazione che Egli espresse proprio nei Suoi ultimi scritti e che è da considerarsi, pertanto, l'ultima scintilla della Sua capacità interpretativa e intuitiva. Nel tessuto tumorale si ha, secondo le osservazioni di Greenstein, una violenta diminuzione delle catalasi in confronto al tessuto matrice. Secondo la concezione di Rondoni, gli agenti cancerogeni producono inibizione o distruzione della catalasi per cui si accumula acqua ossigenata, catabolita obbligato dei processi deidrogenativi, che in condizioni fisiologiche viene appunto attaccato da tale enzima. L'acqua ossigenata agirebbe per quel potere che ha a determinare quella aggregazione proteica o polipeptidica molto simile ad una denaturazione, darebbe la prima impronta alla cancerizzazione, le molecole seguenti risentirebbero di tale rimaneggiamento, cioè dello spostamento di forze polari così come si presume avvenga in due altri processi di sintesi proteica condizionata, cioè nella formazione degli anticorpi e nella moltiplicazione delle *virus* proteine. La concezione di Rondoni è certamente assai brillante e si poggia su alcuni dati che sembrano convalidarla quale, ad esempio, l'alto contenuto in  $H_2O_2$  del tessuto neoplastico, e la produzione dello stesso corpo per azione delle radiazioni penetranti, noti agenti carcinogeni.

La ricerca futura dirà la sostenibilità o la non sostenibilità della teoria di Rondoni, per ora essa costituisce certamente una ipotesi di lavoro e, co-



munque, pone il problema, in realtà vivo e importante, della alterazione strutturale proteica nella cellula carcinomatosa.

Del problema eziologico, inteso come risposta a cancerogeni noti, il Rondoni, si è ripetutamente occupato. Le ricerche in collaborazione col Corbellini dimostrarono l'azione altamente cancerizzante del benzopirene e la più blanda azione delle dibenzoacridine con la osservazione della funzione cocancerogena esercitata da vari stimoli sulla insorgenza dei tumori indotti da tali sostanze. Della essenza dell'azione degli idrocarburi si occupa con la Pozzi in rapporto alla inattivazione dei gruppi SH mentre con la Mayr dimostra l'importante fatto che i valori della suscettibilità magnetica per gli idrocarburi non cancerogeni corrispondono a quelli calcolati, mentre per i carcinogeni essi sono più vasti, ciò che indica anormalità della nuvola elettronica con concentrazione in alcuni punti della molecola e rarefazione in altri, fatti che si ricollegano alla teoria elettronica sostenuta da vari sperimentatori. Infine, vanno ricordate le ricerche sul *virus* di Shope per il quale Rondoni poté precisare che si tratta di un *virus* papillomatoso e non cancerigeno. La cancerizzazione, che talvolta si osserva, è da interpretare come esercitantesi occasionalmente su di una alterazione precancerosa quale va considerato il papilloma.

L'opera di Rondoni, quale è stata esposta nei tratti in realtà a me più familiari, è assai vasta ed è proficua. Vasta per la estensione e la profondità delle indagini, proficua di idee dalle quali son germinate nuove ricerche e nuove idee, proficua soprattutto per quanto in futuro da esse si potrà trarre e per quanta luce di verità potrà derivarne.

Essa fu improntata ad infinito amore alla Scienza, fu guidata da una mente aperta alla visione del mondo, fu espressione di una cultura che non si impose limiti, ansiosa di ogni acquisizione, sempre vigile, in attesa di perfezionarsi.

Uno dei caratteri peculiari della Sua figura di studioso e di ricercatore fu la stupefacente laboriosità. Anche quando la vista gli declinava più rapidamente, Egli non diede riposo ai Suoi occhi stanchi, troppo stanchi per la mente irrequieta ognora tesa a nuove conoscenze, a quel continuo elevamento e perfezionamento spirituale che furono la Sua stessa natura. Si doleva negli anni ultimi della limitazione cui era sottoposto, si doleva di non potere più studiare come prima e, con particolare nostalgia, di non potere più leggere la scrittura gotica di una bella edizione che, regalo di un amico, aveva ognora sul Suo tavolino di lavoro, delle opere di Goethe, le opere di quello spirito sovrano del quale Egli sentiva tutto il fascino e del quale citava volentieri detti memorabili in particolare degli Xenia con Schiller.

Quando la più grave infermità lo costrinse alla inazione, appena che un poco glielo consentissero le forze, si faceva leggere da una devota e pia e intelligente Collaboratrice lavori comparsi negli ultimi fascicoli dei giornali scientifici. Ascoltava ansioso, ma insoddisfatto perché si sentiva un po' estraniato nell'apprendere così di seconda mano. Di più non poteva né doveva fare e così procedeva, com'era possibile, nel culto della costante laboriosità.

Quando due Allievi, tra gli altri carissimi, Deotto e Di Marco, gli proposero, lusingati da una pausa del male, di fare convegni settimanali nella Sua camera da letto e di discutere su ricerche in atto e riferire su lavori letti, Egli, mi si disse, ne fu felice tanto da apparire, ora, come spoglio da quella malinconia e da quell'avvilimento che progressivamente lo avevano pervaso. La sorte, ostinata nella tortura, non gli consentì tale conforto. Egli si spense nel culto del lavoro, con nel cuore il rimpianto della interruzione e la speranza della ripresa.

Uno degli ultimi scritti di Croce si intitola *Soliloquio* ed è la considerazione serena di un Saggio sulla aspettazione della morte. «La vita intera» scrisse Croce, «è preparazione alla morte, e non c'è da fare altro sino alla fine che continuarla, attendendo con zelo e devozione a tutti i doveri che ci spettano. La morte sopravverrà a metterci in riposo, a toglierci dalle mani il compito cui attendevamo; ma essa non può fare altro che così interromperci, come noi non possiamo fare altro che lasciarci interrompere, perché in ozio stupido essa non ci può trovare».

Tale fu la vita di Pietro Rondoni, l'attesa della morte in una costante operosità. In varie occasioni, come ho accennato, fece stampare *curricula* nei quali riassunse l'opera Sua, l'ultimo di essi è del 1956, a qualche mese dalla fine. Elaborò e pubblicò questi resoconti della Sua vita di studioso e di ricercatore assolutamente senza finalità pratiche, senza scopi immediati, solo mosso dallo stimolo di stabilire la verità intorno all'opera Sua, di dire quanto di essa fosse ormai sbiadito o sorpassato, quanto vivo e fecondo di sviluppo. Questo motivo della utilità che l'idea informativa di una ricerca o quella da questa derivata potesse servire di spunto o di lievito ad altri studiosi ricorre di frequente nella esposizione dei riassunti dei singoli lavori. È la premura dello studioso verso altri, ignoti, studiosi, è l'amore verso quella idea, è l'amore alla Scienza, al progresso della quale Egli spera di contribuire oltre la morte, nell'opera futura, con la face che scorrendo dalla mano stanca viene raccolta da altre mani vigorose, è soprattutto preparazione alla morte. Così Egli fu saggio anche in questo, nella aspettazione della morte in laboriosità ed in umiltà.

Che sia benedetta la Sua memoria, ne perduri il ricordo e si rinnovi in nuove vite la Sua figura morale!

#### BIBIOGRAFIA.

PIETRO RONDONI nacque il 2 ottobre 1882 a S. Miniato al Tedesco da Giuseppe e da Enrichetta Maioli.

Compì gli studi secondari e quelli universitari di Medicina a Firenze, laureandosi con lode nel 1906.

Fu assistente volontario nell'Istituto di Patologia generale nell'anno accademico 1906-1907, cioè fin quando - vinto il concorso per una borsa di studio biennale all'Estero - si recò prima a Francoforte sul Meno ove frequentò l'Istituto neurologico Senckenberghiano (prof. Eddinger) e l'Istituto di Terapia sperimentale (prof. Ehrlich), reparto sierologico (prof. Sachs),

poi a Londra, il Laboratorio anatomo-patologico del Claybury Asylum (prof. Mott), infine a Parigi, il servizio ospitaliero del prof. Widal al Hôpital Cochin.

Dopo due anni di permanenza all'Estero (dall'ottobre 1907 all'ottobre 1909), rientrato in Patria, fu assistente effettivo presso l'Istituto di Patologia Generale di Firenze nel 1909-1910 e, dal 1° gennaio 1911 aiuto.

Conseguita la Libera Docenza in Patologia Generale nel 1911, si recò nel 1912 a Berlino a lavorare nell'Istituto R. Koch, sezione tropicale (prof. Cl. Schilling).

Docente in Bacteriologia nel 1913, tenne l'incarico ufficiale dell'insegnamento di questa disciplina, nella Facoltà Medica dell'Università di Firenze dal 1913 al 1920, anno in cui vinse il concorso per Professore straordinario di Patologia Generale.

Fu Professore a Sassari, dal 1920 al 1922; nel 1922 successe a Gino Galeotti nella Cattedra di Patologia Generale di Napoli.

Il 1° dicembre 1924 si trasferì nell'Università di Milano, ove fondò l'Istituto di Patologia Generale, che diresse fino al 31 ottobre 1952, data del suo collocamento fuori ruolo per limiti di età.

A Milano, dal 1928 in poi, organizzò la Divisione Biologica dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori, di cui fu Direttore Generale dal luglio 1935 in poi.

Socio dell'Accademia dei Lincei, Corrispondente dal 17 luglio 1930 e Nazionale dal 6 maggio 1935.

Membro dell'Accademia d'Italia dal 1934.

Socio d'onore della Deutsche Chemische Gesellschaft.

Socio della Biochemical Society.

Socio della Akademie der Naturforscher di Halle.

Socio della Società dei Medici Tedeschi di Praga.

Socio dell'Accademia Medica di Buenos Aires.

Socio dell'Accademia Medica di Madrid.

Dal 1946 fu Presidente della Lega Italiana per la lotta contro i tumori.

Dal 1952 fu Direttore del Centro di Oncologia Sperimentale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Morì in Milano il 5 novembre 1956.

#### ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

1. - *Lo scapsulamento del rene*, « Sperimentale », anno LXI, fasc. 1-2, gennaio-aprile 1907.
2. - *Lo scapsulamento del rene di fronte alla patologia sperimentale*, « Policlinico », vol. XIV, Sez. Chir., Roma 1907.
3. *Sul comportamento del tessuto elastico nei tumori specialmente maligni*, « Sperimentale », anno LXI, fasc. 5, settembre-ottobre 1907.
4. - *Contributo alla resistenza del bacillo paratifo B (Schottmüller)*, « Sperimentale », anno LXII, fasc. 1, gennaio-febbraio 1908.
5. - *Contributo alla patologia dello sviluppo del cervello*, « Sperimentale », anno LXII, maggio-giugno 1908.
6. - *Zum Aufbau der Hirnrinde* (in coll. con H. Vogt), « Deutsche Mediz. Wochenschrift », n. 44, 1908.
7. - *Beiträge zur Theorie und Praxis der Wassermann'schen Syphilisreaktion. - I. Ueber den Einfluss der Extraktverdünnung auf die Reaktion* (in coll. col prof. H. Sachs), « Berliner Klin. Wochenschrift », n. 44, 1908.
8. - *Beiträge zur Theorie und Praxis der Wassermann'schen Syphilisreaktion. - II. Ueber den Ersatz der Organextrakte bei der Reaktion* (in coll. col prof. H. Sachs). « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. und exper. Therapie », I, n. I, 1908.
9. - *Beiträge zum Studium der Entwicklungsstörungen des Gehirns*, « Arch. f. Psychiatrie », 45, n. 3, 1909.

10. — *On some hereditary Syphilitic Affections of the Nervous Systems*, « Proceed. Royal Soc. Med. », Londra, 1909.
11. — *Contributo alla conoscenza della azotemia*, « Policlinico », vol. XVII, Roma, 1910.
12. — *Zur Frage der antitryptischen Wirkung des Blutserums*, « Berliner Klin. Wochenschr. », n. 12, 1910.
13. — *Sul potere antitriptico del siero di sangue*, « Sperimentale », anno LXIV, n. 1, 1910.
14. — *La reazione di Wassermann. Relazione fatta all'Accademia medico-fisica fiorentina nell'adunanza del 16 febbraio 1910*, « Sperimentale », anno LXIV, fasc. I, 1910.
15. — *Ueber den Einfluss der Reaktion auf die Wirkung hämolytischer Sera*, « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. und exper. Therapie », 7, n. 5, 1910.
16. — *Ricerche sull'immunità anticolerica con speciale riguardo alla immunizzazione mediante il nucleoproteide colerico secondo Lustig-Galeotti*, « Sperimentale », anno LXIV, fasc. 5, 1910.
17. — *Considerazioni sopra il lavoro del prof. Roncoroni: ricerche sulla citoarchitettonica corticale*, « Rivista di patologia nervosa e mentale », anno XVI, fasc. 2, Firenze 1911.
18. — *Beiträge zur hämolytischen Wirkung der Lipotide*, « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. und exper. Therapie », 9, n. 2, 1911.
19. — *Microscopical Investigation of a Case of Tobo-Paralysis with Ophthalmoplagia Bilaterale*, « Archives of Neurology », 5, 1911.
20. — *A Case of Diffuse Cancer, with special reference to the Changes in the Brain* (in coll. con E. S. Calthrop), « Archives of Neurology », 1911.
21. — *Sulla scissione del complemento*, « Clinica Medica Italiana », 1911.
22. — *Influenza dell'alimentazione medica e della luce solare sui topi in rapporto alla teoria fotodinamica della pellagra*, « Sperimentale », anno LXV, fasc. 3, 1911.
23. — *Ricerche sul siero di sangue dei pellagrosi*, « Sperimentale », anno LXV, fasc. 3, 1911.
24. — *Fenomeno di Fischer (proliferazione epiteliale sperimentale nel padiglione auricolare del coniglio) e blastomiceti*, « Sperimentale », anno LXV, fasc. 5-6, 1911.
25. — *Il colera, la peste e la febbre gialla nella conferenza sanitaria internazionale di Parigi nel 1911*, « Sperimentale », anno LXVI, fasc. 2-3, 1912.
26. — *Ricerche sperimentali sul sarcoma dei ratti*, « Sperimentale », anno LXVI, fasc. 4, 1912.
27. — *Sulla ipersensibilità dei pellagrosi al mais*, « Sperimentale », anno LXVI, fasc. 5, 1912.
28. — *Ricerche sperimentali sul Nagana. I<sup>a</sup> Comunicazione. — Su alcune proprietà biologiche della milza nella infezione sperimentale da « Trypanosoma Brucei »* (in coll. con G. Goretti), « Sperimentale », anno LXVII, fasc. I, 1913.
29. — *Ueber einige biologische Eigenschaften der Milz bei experimenteller Nagane-infektion* (in coll. con G. Goretti), « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. und exper. Therapie », 17, n. 4, 1913.
30. — *Sulla classificazione dei protozoi emoparassiti: il nuovo ordine di Binucleati (Hartmann)*, « Sperimentale », anno LXVII, fasc. I, 1913.
31. — *Esperienze di vaccinazione contro il « Trypanosoma Brucei »*, « Sperimentale », anno LXVII, suppl. fasc. 4, 1913.
32. — *Ricerche sperimentali sul Nagana. II<sup>a</sup> Comunicazione. — Studi sull'immunizzazione attiva* (in coll. con G. Goretti), « Sperimentale », anno LXVII, fasc. 4, 1913.
33. — *Studien über Schutzimpfung gegen experimentelle Naganainfektion* (in coll. con G. Goretti), « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. und exper. Therapie », 18, n. 5, 1913.
34. — *Ricerche sperimentali sui tumori*, « Sperimentale », anno LXVII, fasc. 2, 1913.
35. — *Tentativi di cura della tubercolosi polmonare colla tubercolina di Rosenbach* (in coll. con G. Pierallini), « Rivista critica di Clinica Medica », anno XIV, n. 31, 1913.
36. — *Tossine Tripanosomiche ed immunità di fronte ai tripanosomi* (in coll. col prof. Schilling), « Sperimentale », anno LXVII, fasc. 5, 1913.
37. — *Ueber Trypanosom-Toxine und Immunität* (in coll. col prof. Schilling), « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. und exper. Therapie », 18, n. 6, 1913.
38. — *Collaborazione al Trattato A. Lustig. — Le malattie infettive dell'uomo e degli animali*. Milano, Vallardi, 1913.



39. - *Ricerche sperimentali sul Nagana*. - V<sup>a</sup> Comunicazione - *Le alterazioni istologiche della milza e delle ghiandole linfatiche nella infezione sperimentale da « Trypanosoma Brucei »* (in coll. con F. Rietti), « Sperimentale », anno LXVIII, fasc. 3-4, 1914.
40. - *Sulla ipersensibilità delle cavie maidizzate di fronte al siero di sangue dei pellagrosi, con considerazioni sulla genesi della pellagra*, « Rivista Pellagologica italiana », 1914.
41. - *Die Beteiligung des Nervensystems an den Immunitätsvorgängen und an den allgemeinen Infektionskrankheiten*, « Ergebnisse der Neurologie und Psychiatrie », 2, n. 2, 1914.
42. - *Ricerche e considerazioni sul maidismo sperimentale*. Estr. da « Ricerche di biologia dedicate al prof. A. Lustig nel 25<sup>o</sup> anno del suo insegnamento universitario », 1914.
43. - *Alimentazione maidica e vitamine*, « Sperimentale », anno LXIX, fasc. 3, 1915.
44. - *L'alimentazione maidica ed il monofagismo*, « Pathologica », 3, n. 155, 1915.
45. - *Ancora sul monofagismo*, « Pathologica », 3, 1915.
46. - *Alterazioni istologiche nelle cavie alimentate à mais*. (in coll. con M. Montagnani), « Sperimentale », anno LXIX, fasc. 3, 1915.
47. - *Lesioni istologiche nel maidismo, nel digiuno e nello scorbutto sperimentale* (in coll. con M. Montagnani), « Sperimentale », anno LXIX, fasc. 4, 1915.
48. - *Ricerche sull'alimentazione maidica con speciale riguardo alla eziologia della pellagra*, « Sperimentale », anno LXIX, fasc. 4, 1915.
49. - *Alcune considerazioni sulla pellagra, la sua eziologia e la sua prevenzione e cura*, « Policlinico » (Sezione Pratica), anno 1915.
50. - *Paolo Ehrlich* (Necrologia), « Sperimentale », anno LXIX, fasc. 5 1915.
51. - *Patologia generale degli organi a secrezione interna* (dal trattato di Patologia generale dei proff. A. Lustig e G. Galeotti), Milano, Soc. Ed. Libreria, 1915.
52. - *La reazione flogistica nell'organismo in stato allergico, studiato specialmente colla colorazione vitale mediante il « trypanblau »*, « Sperimentale », anno LXIX, fasc. 6, 1915.
53. - *La reazione peritoneale ai bacilli tubercolari ed alla tubercolina, studiata specialmente colla colorazione vitale mediante il « trypanblau »*, « Sperimentale », anno LXX, fasc. 1, 1916.
54. - *A proposito dell'influenza degli zuccheri sullo sviluppo dei tumori trapiantabili*, « Sperimentale », anno LXX, fasc. 1, 1916.
55. - *Direttive moderne nella profilassi e cura del colera*, « Sperimentale », anno LXX, fasc. 3-4, 1916.
56. - *La chemioterapia della tubercolosi. Tentativi e speranze*, « Rivista critica di Clinica medica », anno XVII, nn. 48-49, Firenze 1916.
57. - *L'azione dei sali di nichelio sui bacilli tubercolari e sulla tubercolosi sperimentale*, « Sperimentale », anno LXXI, 1917.
58. - *Gli itteri infettivi ed epidemici* (rivista sintetica), Firenze, ed. R. Bemporad, 1917.
59. - *Sul periodo di conservazione ed usabilità dei vaccini (antitifico ed anticolerico)*, « Sperimentale », anno LXXI, fasc. 5-6, 1917.
60. - *Vaiuolo e vaccinazione*, « Sperimentale », anno LXXI, fasc. 5-6, 1917.
61. - *Osservazioni cliniche e batteriologiche sull'influenza*, « Sperimentale », anno LXXIII, 1919.
62. - *Su di una piccola epidemia di gozzo nella campagna fiorentina* (in coll. con A. Bellini), « Rivista di Clinica Medica », anno XX, n. 10-11, Firenze 1919.
63. - *Remarks on the pathogenesis of deficiency diseases and on pellagra*, « British medical Journal », 3 maggio 1919.
64. - *Ricerche sperimentali sulla chemioterapia della tubercolosi con particolare riguardo ad alcuni composti del nichelio*, « Sperimentale », anno LXXIII, fasc. 3-4, 1919.
65. - *Sull'origine delle melanine dal pirrolo*, « Sperimentale », anno LXXIV, fasc. 4-5, 1920.
66. - *Sull'origine delle melanine dal pirrolo*, « Lo Sperimentale », anno LXXV, fasc. 1-3, 1921.
67. - *Su di una nuova concezione dei fenomeni immunitari*, « Riforma Medica », anno XXXVII, n. 48, 1921.

68. — *Sulla specificità della reazione alla tubercolina*, « Riforma Medica », anno XXXVII, n. 38, 1921.
69. — *L'influenza della tossina difterica sulla innervazione respiratoria*, « Archivio di fisiologia », 20, fasc. 4, 1922.
70. — *Polarimetrische Serumuntersuchungen und ihre Beziehungen zur Wassermannschen Reaktion*, « Zeitschr. für Immunitätsforsch. », 34, n. 5, 1922.
71. — *Zur Frage des Einflusses der Ernährung auf die Blutdrüsen und insbesondere auf den Adrenalinegehalt der Nebennieren*, « Zeitschr. f. die ges. exper. Mediz. », 29, n. 3-4, 1922.
72. — *Sulle variazioni del potere rotatorio del siero*, « Lo Sperimentale », anno LXXXVI, n. 5-6, 1922.
73. — *L'azione della tubercolina sul cuore isolato di cavia: contributo alla conoscenza del meccanismo di azione della tubercolina*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », 1922, n. 5.
74. — *La fisiopatologia generale degli organi a secrezione interna*. Edit. Istituto Sieroterapico Milanese, 1922.
75. — *L'anafilassi alimentare*. Dal volume « Anafilassi » edito dall'Ist. Sieroterapico Milanese 1922.
76. — *Alcuni nuovi tentativi di immunoterapia e chemioterapia della tubercolosi*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », n. 4, 1922.
77. — *I rapporti fra bacillo tubercolare ed altri germi acidoresistenti*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », n. 6, 1922.
78. — *I fattori esterni della costituzione*. Prolusione al corso di Patologia Generale nell'Università di Napoli, 1922.
79. — *Sulla emoclasia digestiva secondo Widal*, « Rassegna Internazionale di Clinica e Terapia », anno IV, n. 9, 1923.
80. — *Zur Frage der Virulenzsteigerung der saprophytischen säurefesten Bacillen*, « Klinische Wochenschrift », anno II, n. 32, 1923.
81. — *Ueber den Einfluss des Tuberkulins auf die Gewebsatmung*, « Zeitschr. f. die gesamte exper. Medizin. », XLII, n. 1-3, 1924.
82. — *Influenza su organi e sostanze bacillari sullo sviluppo culturale del bacillo tubercolare*, « Lo Sperimentale », anno LXXVIII, n. 4-5, 1924.
83. — *L'azione eccitoproliferatrice del pirrolo*, « Giorn. di Biologia e Med. Sperim. », 2, n. 4, 1925.
84. — *Elementi di Biochimica*, « U.T.E.T. », 1925.
85. — *La patogenesi della gotta*. Conferenze alla Scuola Minich. Venezia 1925.
86. — *Ueber den Einfluss der Glukoseverabreichung auf Teercarcinomwachstum*, « Klinische Wochenschrift », n. 11, 1926. In italiano in « Boll. Soc. Biol. Sper. », I, fasc. 3, 1926.
87. — *Ueber die Beteiligung des Pyrrols am Aufbau des Melanins*, « Biochem. Zeitschr. », 169, n. 1-3, 1926.
88. — *Irradiazione degli alimenti con raggi ultravioletti e la vitamina antirachitica*, « Lo Sperimentale », anno LXX, n. 4, 1926.
89. — *Ueber die Beziehungen der Eigenlipoidimmunisierung zu den durch Teer hervorgerufenen Wucherungsvorgängen*, « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. », 49, p. 91, 1926.
90. — *Sintesi, teorie, eziologie, ecc.*, In *Neoplasmi*, edito a cura Istituto Sieroterap. Milanese.
91. — *La febbre nella tubercolosi polmonare*. Dal trattato *La tubercolosi polmonare* di Carpi e Ronzoni.
92. — *Sindromi neurovegetative*, « Terapia », anno XVI, agosto 1926.
93. — *Costituzione in rapporto al sistema endocrino*, « Terapia », anno XVI, settembre 1926.
94. — *L'apparato reticolo-endoteliale*, « Atti Soc. Lomb. Scienze Med. e Biol. », 15, n. 3, 1926.
95. — *L'opera di Camillo Golgi in Patologia*, « Atti Soc. Lomb. Scienze Med. e Biol. », 15, n. 1.
96. — *La chemioterapia della tubercolosi*, « Biologica medica », n. 1, 1926.
97. — *Il meccanismo della reazione di Wassermann*, « Rassegna Clinico-scientifica dell'Istituto Biochimico Ital. », anno V, n. 10, 1927.

98. - *Immunità e vaccinazioni antitubercolari*, « Rivista di patologia e Clinica della tubercolosi », anno I, fasc. 3, 1927.
99. - *Fisiopatologia generale del ricambio*. Parte III del *Trattato di Anatomia patologica* del prof. Pio Foà, U.T.E.T., 1927.
100. - *Fattori di resistenza e di guarigione nella tubercolosi*. Conferenza tenuta all'Istituto Sieroterapico Milanese, 1927.
101. - *Ricerche sperimentali sull'azione chemioterapica di un nuovo preparato di oro (Orosan) nella tubercolosi*, « Bioch. e terapia sperimentale », anno XIV, fasc. 8, 1927.
102. - *Ueber den Einfluss der kombinierten Serum-Lipoid Behandlung auf das Geschwulstwachstum*, « Zeitschr. f. Krebsforsch. », 25, n. 6, 1927.
103. - *La formazione di sostanze attivanti lo sviluppo bacillare nelle culture di bacillo tubercolare*, « Archivio per le scienze mediche », 51, 1927.
104. - *I nuovi orizzonti della terapia sperimentale dei tumori maligni*, « Rivista italiana di Terapia », n. 2, 1928.
105. - *La chimica delle vitamine*, « Rassegna medica », n. 3, 1928.
106. - *L'immunità nei tumori*, « Rassegna clinico scientifica dell'Istituto Biochimico Italiano », anno VI, n. 6, 1928.
107. - *L'antigene eterofilo di Forssmann nell'adenocarcinoma del topo*, « Archivio di Scienze biologiche », 12, 1928.
108. - *Significato patogenetico dell'uricemia*, « Riforma Medica », anno V, n. 21, 1928.
109. - *Weitere Untersuchungen über die kombinierte Serum-Lipoid Behandlung des Mäusecarcinoms*, « Zeitschr. f. Krebsforschung », 27, n. 6, 1928.
110. - *Il metabolismo delle cellule neoplastiche*, « Rinascenza medica », anno V, n. 21, 1928.
111. - *Il ricambio del calcio*, « Rassegna clinico-scientifica dell'Ist. Biochimico Italiano », anno VI, n. 11, 1928.
112. - *Ricerche sull'immunità nel cancro del topo*, « Boll. Soc. Ital. di Biologia Sperimentale », 3, n. 7, 1928.
113. - *La chimica delle vitamine*, « Rassegna medica », n. 3, 1928.
114. - *Il metabolismo delle cellule neoplastiche*, « Rinascenza medica », n. 21, 1928.
115. - *Vitamina e resistenza immunitaria con speciale riguardo alla tubercolosi*. Estratto dalla raccolta 10 lezioni sulle vitamine dell'Istituto Biochimico Italiano, 1929.
116. - *La patologia generale del ricambio proteico*. (Lezione tenuta all'Istituto di cultura medica di Varese), « Biologie médicale », n. 8-9, 1929.
117. - *Richerche immunobiologiche sui tumori, con speciale riguardo al metabolismo lipideo (1926-1929)*, « Boll. Lega Italiana per la lotta contro il cancro », n. 2 1929.
118. - *Eziologia dei tumori*, « Rassegna clinico-scientifica dell'Ist. Biochimico Italiano », n. 11, 1929.
119. - *L'influenza di una dieta a base di timo sul ratto, con particolare riguardo alla reattività infiammatoria*, « The Amer. Journ. of Physiology », n. 2, 1929.
120. - *Allergische Entzündung*. (Lezione tenuta all'Università di Leiden-Olanda, maggio 1929), « Immunität, Allerg. u. Infektionskr. », vol. I, n. 10-11, 1929.
121. - *Das Wesen der Tuberkulinreaktion* (Lezione tenuta all'Università di Leiden-Olanda, maggio 1919), « Die Tuberculose », n. 7, 1929.
122. - *Il problema biologico dell'artrite deformante*, « Rinascenza medica », anno VII, n. 1.
123. - *Gli effetti di una dieta iperproteinica ed iperpurinica (dieta timica) nel ratto*, « Archivio dell'Istituto Biochimico Italiano », n. 2, 1930.
124. - *La chimica degli antigeni e degli anticorpi*, « Rassegna clinico-scientifica dell'Ist. Biochimico Italiano », n. 6, 1930.
125. - *Experimentelle Untersuchungen über Beziehungen der Harnsäure zur Allergie*, « Verhandl. d. deutschen pathologischen Gesellschaft », aprile 1930.
126. - *Sulla precipitazione dell'acido urico in reazione alcalina*, « Biochimica. Terapia sperimentale », anno XVII, n. 2, 1930.
127. - *La chimica del cancro*, « Giornale di Chimica industriale ed applicata », p. 136, 1930.



128. — *Le basi chimico-fisiche della tecnica istologica*, « Arch. It. di Anatomia e Istologia patologica », 2, 1930.
129. — *Fattori aspecifici individuali agevolanti l'infezione e loro meccanismo d'azione. Fattori costituzionali, fattori alimentari, avitaminosi, traumi, perfrigerazioni, intossicazioni, fattori nervosi. Infezioni miste, secondarie e doppie, locali e generali*, nel volume *Come si contraggono le malattie infettive*, Milano, Istituto Sieroterapico Milanese, 1930.
130. — *La patologia dei capillari*, « Biologie Médicale », n. 8-9, 1930.
131. — *L'azione inibente della digitonina sullo sviluppo dell'adenocarcinoma del topo*, « Boll. Soc. It. di Biol. Sper. », 5, 1930.
132. — *Die Einwirkungen verschiedener Lipide auf Wachstum des Mäusekrebs*, « Zeitschr. f. Krebsforschung », 32, n. 4, 1930.
133. — *Ueber die Wirkung des Digitonins auf den Mäusekrebs*, « Zeitschr. f. Krebsforschung », 31, n. 6, 1930.
134. — *L'eliminazione purinica nel ratto*, « Archivio di scienze biologiche », 15, n. 6, 1930.
135. — *Ricerche sulla sierodiagnosi del cancro*, « Rendiconti Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », 64, fasc. 11-15, 1931.
136. — *Biochemie der Zellenlipide und Krebsforschung*, « Zeitschr. f. Krebsforschung », 34, n. 2-3, 1931.
137. — *Lipoidosi e tumori*, « Minerva medica », anno XXII, n. 8, 1931.
138. — *Azione delle onde elettromagnetiche ultracorte sull'adenocarcinoma trapiantabile del topo*, « Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei », 14, ser. 6<sup>a</sup>, n. 5-6, 1931.
139. — *Recherches expérimentales sur le métabolisme purinique*, « Archives italiennes de Biologie », 85, 1931.
140. — *Experimentelle Beiträge zur Pathogenese der Gicht und der Gelenkerkrankungen*, « Krankheitsforsch. », n. 9, n. 3, 1931.
141. — *La patogenesi dell'uremia*, « Biologia medica », n. 1-2, 1931.
142. — *La chimica della tubercolosi*, « Giornale di Chimica industriale e applicata », anno XIII, 1931.
143. — *Investigaciones experimentales sobre al metabolismo purinico y sobre la gota*. (Conferenza tenuta all'Accademia Nazionale di Medicina di Buenos Aires), « El Dia Medico », n. 14, anno III, 1931.
144. — *Il ricambio purinico nel ratto*. (Comunicazione al Congresso internazionale di Biologia di Montevideo, 7-12 dicembre 1930), « Archivos de la Sociedad de Biologia de Montevideo », fasc. 3, p. 680, 1931.
145. — *L'influenza delle acque cloruro-sodiche sull'equilibrio acido-basi espresso dai caratteri urinari*, « Minerva medica », anno XXII, vol. II, n. 46, 1931.
146. — *Ricerche sperimentali sulla gotta e sulle artropatie*, « Rassegna Clinico-scientifica », n. 3, 1931.
147. — *La patogenesi degli edemi*, « La Medicina italiana », n. 6, giugno 1931.
148. — *La dottrina della pletora*, « La Medicina italiana », n. 6, giugno 1931.
149. — *I fattori dominanti la moltiplicazione cellulare*. (Discorso a Classi riunite, tenuto al Congresso Soc. Italiana Progresso Scienze, Milano, 1931).
150. — *Ueber den Einfluss gewisser Stoffwechselprodukte auf die experimentelle Meerschweinchentuberkulose*, « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. », vol. 77, n. 3-4, 1932.
151. — *La fisiopatologia delle articolazioni*, « Rassegna clinico-scientifica dell'Ist. Biochimico Italiano », anno X, n. 3-4, 1932.
152. — *Ueber den Einfluss der Phosphatide auf proteolytische Fermente*, « H. S. Zeitschr. für physiologische Chemie », 207, n. 1-2, 1932.
153. — *Ueber Harnsäurewirkungen und experimentelle Gelenkspathologie*, « Medizinische Klinik », n. 9, 1932.
154. — *La spécificité de la cellule du cancer*, « Scientia », marzo 1932.
155. — *L'acido urico come co-fattore della infiammazione*, « Rendiconto dell'Ist. Lombardo di Scienze e Lettere », vol. 65, n. 11-15, 1932.



156. - *Die Regulierung der Wucherungsvorgänge im Organismus*, « Jahreskurse für ärztliche Fortbildung, Jahrgang », XXIII, n. 1, 1952.
157. - *La proteolisi nei tumori*, « Il cancro », 3, n. 2, 1932.
158. - *Proteolysis in tumors*, « Biochem. Journ. », 26, p. 147, 1932.
159. - *L'influenza dei fosfatidi sugli enzimi proteolitici*, « Boll. Soc. Italiana di Biologia sperimentale », 7, n. 4, 1932.
160. - *Relazione al II Volume del Trattato di Patologia generale Lustig-Rondoni-Galeotti*. VII edizione. Soc. Editrice Libreria Milano, 1952.
161. - *I fermenti proteolitici nei tumori: azione della lecitina sintetica «in vivo»*, « Boll. Soc. It. di Biol. Sperimentale », 7, n. 7, 1932.
162. - *Infiammazione e modificazioni organismiche*, « Biologia medica », n. 8, n. 11, 1932.
163. - *Il potere tampone delle acque minerali*, « Rivista di Idrologia, Climatologia e Terapia fisica », n. 10, 1932.
164. - *L'influenza della dieta timica sulla crescita neoplastica*, « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », 17, serie 6<sup>a</sup>, n. 2, 1933.
165. - *Il metabolismo proteico della cellula neoplastica*, « Cancro », 4, n. 3, 1933.
166. - *Le attività proteolitiche nel contenuto duodenale sotto la influenza delle acque cloruro-sodiche*, « Archivio italiano malattie apparato digerente », 2, n. 1, 1953.
167. - *In memoria di Giovanni Polverini*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », fasc. 6, 1933.
168. - *I laboratori ospedalieri*, « Rivista Ospedale Maggiore », anno XXI, n. 3, 1933.
169. - *Studio sull'influenza dei lipoidi sui fermenti proteolitici*. Dal volume della R. Accademia d'Italia, Fondaz. Volta, *Viaggio di studio ed esplorazioni*, 1933.
170. - *Relazione della III Edizione del Trattato di Biochimica*, U.T.E.T., Torino 1933.
171. - *Ueber den Einfluss reduzierender und oxydierender Behandlung auf die Funktion der Organkathepsine*, « H. S. Zeitschr. für physiol. Chemie », 219, n. 1-2, 1933.
172. - *La patogenesi della gotta*, « Le Forze Sanitarie », n. 33, 1933.
173. - *La biochimica del cancro*, « Boll. e Atti R. Accademia medica », Roma 30 dicembre 1933.
174. - *La Vitamina C (acido ascorbico)*, « Scientia », luglio 1934.
175. - *Hormonas y Vitaminas*, « Presa Medica Argentina », 4 febbraio 1934.
176. - *Some observations on Proteolytic Enzymes in Cells*, « Arch. f. exp. Zellforsch. », 15, 1934.
177. - *La dottrina della infiammazione nei riflessi idrologici*, « Rivista Idrol. Talass. e Terapia fisica », n. 7, 1934.
178. - *Proteolisi-proteosintesi e fenomeni ossidoriduttivi*, « Rivista della Sociedad Argentina de Biologia », Suppl. vol. X, 1934.
179. - *Formazione dell'essudato e reperti ematici per trattamento sperimentale con acque cloruro-sodiche* (in coll. con il dott. A. Pozzi), « Boll. Accademia Pistoiese Filippo Pacini », 1934.
180. - *Natura ed origine degli anticorpi*. Conferenza tenuta alla Soc. Medico-chirurgica di Padova, « Atti Soc. Medico-chir. di Padova », n. 4, anno XIII (serie II), 1935.
181. - *L'azione cancerogena di idrocarburi policiclici sintetici*, « La chimica e l'industria », p. 148, 1935.
182. - *A proposito dell'influenza del siero di sangue sullo sviluppo culturale del bacillo di Koch*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », fasc. 4, 1935.
183. - *Oxydationsvorgänge, Proteinaufbau und Wachstum*, « Leeuwenhoek-Vereeniging ». Conferenza tenuta ad Amsterdam, giugno 1935.
184. - *Polarimetrische Veränderungen des Serums während des Immunisierungsvorg.*, dal volume giubilare dedicato alla prof.ssa Lina Stern, Mosca 1935.
185. - *Commemorazione di Giuseppe Pianese, letta il 26 maggio 1935 nella R. Accademia d'Italia*, « Annuario R. Accademia d'Italia », vol. VII.
186. - *Patologia generale della tubercolosi con speciale riguardo alla tubercolosi extrapolmonare* (in collab. col prof. B. Borghi), dal volume *La tubercolosi extrapolmonare*, Ed. A. Wassermann, 1935.

187. — *Ricerche sulla sieroamilasi e sierolipasi* (in coll. con A. Pozzi), « Boll. Accademia Pi-  
stoiese », F. Pacini, 1955.
188. — *Ueber den Einfluss des Wasserstoffsperoxyds auf die Fällbarkeit der Proteine* (in coll.  
con A. Pozzi), « H. S. Zeitschr. f. physiol. Chemie », 325, n. 1-2, p. 81, 1935.
189. — *L'azione cancerogena di 1, 2-benzopirene sintetico* (in coll. con A. Corbellini), « Rendi-  
conti R. Accademia Naz. dei Lincei », vol. 21, ser. 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 3, 1935.
190. — *Gli indirizzi moderni di ricerca sperimentale sul cancro*, « Atti Accademia medica,  
lombarda », 25, n. 1, 1936.
191. — *Le direttive attuali nello studio dei tumori maligni*, « Attualità medica », anno I, n. 1,  
anno I, n. 1, 1936.
192. — *Agenti cancerogeni di natura chimica ben definita*, « Biologia medica », n. 12, n. 4, 1936.
193. — *Le métabolisme de la cellule cancéreuse*, « Acta Union internat. contre le cancer »,  
1, n. 3, 1936.
194. — *A proposito di pubblicazioni mediche*, « Le forze sanitarie », n. 1, gennaio 1936.
195. — *Critica dei recenti metodi di sierodiagnosi e sierocitodiagnosi del cancro*, « Relazione  
Congresso Lotta scientifica e sociale contro il cancro », Bruxelles, 1936 p. 262.
196. — *L'azione cancerogena delle dibenzoacridine e l'ustione come fattore realizzante* (in col-  
laborazione con il prof. A. Corbellini), « Tumori », 22, n. 1, 1936.
197. — *Über das Auftreten von oestruserregenden Stoffen, in Organen « in vitro »* (in coll. coi  
proff. V. Carminati e A. Corbellini), « H. S. Zeitschr. f. physiol. Chemie », 241, 71, 1936.
198. — *L'influenza delle acque cloruro-sodiche sui processi ossidoriduttivi nei tessuti studiati  
col metodo al bleu di metilene*, « Rivista di Idroclimatologia. Talassologia, Terapia fisica »  
n. 3-4, 1937.
199. — *Les recherches scientifiques à Montecatini-Thermes*, « Archives of medical Hydrology »,  
luglio 1937.
200. — *Il meccanismo della reazione alla tubercolina*, dalle *Lezioni di Tisiologia*, vol. II del-  
l'Istituto Vittorio Emanuele III in Lecco per la profilassi e cura della tubercolosi,  
1937.
201. — *Fragen der Allergie*, « Zentralbl. f. Bakter. Par. u. Infektionskrankh. », 127, 1937.
202. — *Alcuni contributi della chimica alla moderna cancerologia*, « Rassegna clinico-scienti-  
fica », n. 7, 1937.
203. — *Die vermutliche oestrogene Wirkung eines Cholesterinpräparates* (in coll. coi proff. Car-  
minati e Corbellini), « H. S. Zeitschr. f. phys. Chemie », 247, 1937.
204. — *Der Einfluss der krebserregenden Stoffe auf enzymatische Vorgänge* (in coll. con W. Bel-  
trami), « Enzymologia », vol. III, 1937.
205. — *Vergleichende histologische Beobachtungen über die Bindegewebsreaktion einigen can-  
cerogenen und nichtcancerogenen Stoffen gegenüber*, « Zeitschr. f. Krebsforschung », 47,  
1, 1937.
206. — *Nuovi indirizzi di studio per la lotta contro il cancro*, « Atti società italiana per il  
Progresso Scienze », vol. I, 1937.
207. — *Recenti progressi della chimica delle proteine*, « La Chimica e l'industria », p. 65, feb-  
braio 1938.
208. — *Nephelometrische Serumuntersuchungen: Wirkung des Wasserstoffperoxyds und der  
Hitzung*, « H. S. Zeitschr. f. physiol. Chemie », 254, 3-6.
209. — *Fattori esterni della cancerogenesi*, « Atti e memorie Soc. Lombarda di Medicina »,  
6, n. 6, 1938; e *Forze Sanitarie*, n. 15, agosto 1938.
210. — *Ulteriori osservazioni sull'azione cancerogena del virus papillomatoso nel coniglio*, « Tu-  
mori », 2-4, fasc. 4-5, 1938.
211. — *Das Problem der Proteinsynthese im physiolog. und patholog. Leben*, « Klinische Wo-  
chenschr. », n. 46, p. 1601, 1938.
212. — *La denaturazione proteica pratica e la fibrillogenesi connettivale*, « Arch. italiano di  
chirurgia », 54, 288, 1938.
213. — *Ymena latek pri rustu* (in lingua ceca). Conferenza tenuta alla Società Ceca di  
Biologia di Praga, 1938.

214. - *Commemorazione di Antonio Cesaris-Demel fatta alla R. Accademia Naz. dei Lincei*, « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXIX, ser. 6<sup>a</sup>, fasc. 11, 1939.
215. - *I meccanismi della cancerogenesi*. Conferenza tenuta alla Sanità pubblica di Roma, « Rendiconti Istituto Sanità pubblica », vol. II, 1939, pubbl. anche in « Riforma medica », anno LV, n. 30, 1939.
216. - *Il significato e gli scopi della patologia comparata*, « Rassegna clinico-scientifica ». Anno XVII, n. 7, 1939; « Atti IV Congr. int. Patologia comparata », Roma, II vol. 1939.
217. - *In tema di patogenesi dei tumori. Risposta al prof. Vernoni*, « Boll. Lega Italiana per la lotta contro i tumori », Anno XIII, n. 5, 1939.
218. - *Influenza dei tumori da idrocarburi sulla crescita di trapianti di tumori pure indotti da idrocarburi* (in coll. con il dott. W. Beltrami), « Tumori », anno XXVI, n. 6, 1939.
219. - *Recenti sviluppi sulla dottrina dei tumori*, « L'attualità medica », 4, 193, 1939.
220. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale Vittorio Emanuele III, per lo studio e la cura del cancro in Milano*, anno 1939.
221. - *Proteinsynthese und Wachstum*, « Erg. der Hyg. Bakter. Immunitätsforsch. u. exper. Therapie. Springer », Berlino, 23, 1-63, 1940.
222. - *Dolori e gioie dello scienziato*. Conferenza tenuta il 4 marzo 1940 nella « Sala d'Oro » della Società del Giardino per invito anche dell'Associazione per lo sviluppo dell'Alta cultura.
223. - *Das Induktionsphänomen bei der Eiweissdenaturierung, mit besonderer Berücksichtigung der U. V. Strahlenwirkung*, « Schweiz. med. Wochenschr. », 70, 273, 1940.
224. - *Virus e tumori maligni*, « Tumori », 26, 315, 1940.
225. - *Untersuchungen über Tumorproteine: N- und P-Fraktionierungsversuche*, « Zeitschr. f. phys. Chemie », 265, 102, 1940.
226. - *Salute e malattia*. (Discorso tenuto per l'inaugurazione dell'anno accademico 1940-41 presso il R. Istituto di scienze e lettere di Milano), « Rivista di Scienza e Tecnica », 4 605, 1940.
227. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale Vittorio Emanuele III, per lo studio e la cura del cancro in Milano*, 1940.
228. - *Commemorazione di Alberto Pepere, tenuta il 23 novembre 1940 alla Accademia d'Italia*, « Rend. Accad. d'Italia », Classe sci. fis. mat. e nat., ser., VII, vol. II, n. 6, 1941.
229. - *Das Wesen der bösartigen Entartung der Zelle*. (Conferenza tenuta al « Krebsbildungskurse des Zentralkomitees für das ärztliche Fortbildungswesen in Ungarn ». Budapest 25 maggio 1940). « Orvoskepzes », n. 1, 1941.
230. - *Über einige biochemische Fragen der Proteinsynthese*, « Enzymologia », 9, 380, 1941.
231. - *Agenti lesivi endogeni*, Athena 1941.
232. - *I recenti progressi della chimica delle proteine in rapporto alla dottrina dei tumori maligni*, « Scienza e tecnica », 5, 721, 1941.
233. - *Importanza biologica e medica dei problemi vitaminici* (Prolusione all'Istituto di Vitaminologia « G. Lorenzini », 7 dicembre 1941), Estratto dal volume *Attualità in tema di Vitaminologia*.
234. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale Vittorio Emanuele III, per lo studio e la cura del cancro in Milano, per l'anno 1941*, « Tumori », 28, 142, 1942.
235. - *Untersuchungen über Tumorproteine; der Gehalt der Benzpyrensarkome in Nucleoprotein P*, « Schweiz. mediz. Wochenschr. », 71, 31, 1941.
236. - *Il contenuto in fosforo dei nucleoproteidi nel sarcoma da benzopirene ed in tessuti normali del ratto* (in coll. con il dr. L. Goldflisch), « Tumori », 28, 1, 1942.
237. - *Proposte per un riordinamento della Facoltà di Medicina e Chirurgia*, « Annali della Università di Italia », 3, n. 4, 1942.
238. - *Filippo Bottazzi, commemorazione tenuta il 17 gennaio 1942 alla R. Accademia d'Italia*, Estr. « Annuario Acc. d'Italia », 14, 1942.
239. - *Le reazioni fornitrici di energia nei processi di sintesi proteica*, « Medicina e Biologia », I, 23, 1942.



240. — *Das Wesen der krebsigen Umwandlung der Zelle und die Ausblicke einer biologischen Krebstherapie*, « Schweiz. Mediz. Wochenschr. », 72, 1185, 1942.
241. — *Relazione della IV Ed. del Trattato di Biochimica*, U.T.E.T., 1942.
242. — *Krebsige Entartung der Zelle und Eiweissdenaturierung*, « Oesterr. Chemiker Zeitung », 45, 97, 1942.
243. — *Il finalismo dei fenomeni patologici*, « Studi filosofici », Riv. trimestrale di filosofia contemporanea, 1942, n. 3.
244. — *Su di un caso di trasmissione di tumore di benzopirene*, « Tumori », 29, 143, 1943.
245. — *Camillo Golgi*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », 22, 223, 1943.
246. — *Eredità ed ambiente dal punto di vista della morale* (Conferenza tenuta l'8 aprile 1945 alla Pontificia Università Gregoriana), « Gregorianum », 24, 107, 1943.
247. — *Il mondo subatomico*. (Prolusione alla conferenza tenuta dal prof. B. von Borries), « La Chimica e l'industria », 5, 170, 1943.
248. — *Versuche über die hermische Beeinflussung der Schaumbildungsfähigkeit des Normalserums* (in coll. con C. Soresina), « Zeitschr. f. Immunitätsforsch. », 104, 332, 1943.
249. — *La valutazione dell'ereditarietà* (Conferenza tenuta all'Angelicum dei Frati minori di Milano, aprile 1943). Estratto dal volume « Biologia e Morale ».
250. — *Cancerogenesi e denaturazione proteica*, « Rend. Ist. Lombardo di scienze e lettere », 77, 441, 1943-44.
251. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale Vittorio Emanuele III, per lo studio e la cura del cancro in Milano per l'anno 1942*, « Tumori », 29, 1, 1943.
252. — *Ai confini del mondo vivente. Le virus-proteine*, « Nuova Antologia », anno 79, 3, 1944.
253. — *Il contributo italiano agli studi cancerologi e pellagrologi*, « Acta medica italiana », anno X, n. 1, 1944.
254. — *Relazione dell'attività dell'Istituto Nazionale Vittorio Emanuele III, per lo studio e la cura del cancro in Milano per l'anno 1943*, « Tumori », 30, 1, 1944.
255. — *Redazione della V Edizione del Trattato di Biochimica*, U.T.E.T., Torino, 1945.
256. — *Il cancro come problema di chimica fisica delle proteine*, « Scientia », 77, 34, 1945.
257. — *La produzione cancerologica sperimentale in Italia ed in Germania dal 1940 al 1945*. Relazione « Pontificia Accademia Scientiarium 1939-1945 ».
258. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1944*, « Tumori », 31, 1, 1945.
259. — *Recenti conoscenze sulla natura e sull'origine degli anticorpi*, « Zooprofilassi », n. 2-3, agosto-settembre 1946.
260. — *La chemoterapia dei tumori maligni*, « Il Farmaco », anno I, 344, 1946.
261. — *Virus e cancro*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », numero speciale, p. 40, 1946.
262. — *A propos du rapport entre race et cancer*, « Experientia », 2, n. 11, 1946.
263. — *Fattori di crescita per il bacillo tubercolare*, « Giornale Italiano della tubercolosi », I, 55, 1946.
264. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori di Milano per l'anno 1945*, « Tumori », 33, 1-2, 1946.
265. — *Cancro e denaturazione delle proteine*, « Experientia », 2, n. 4, 1946.
266. — *Il cancro. Istituzioni di patologia generale dei tumori*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1946.
267. — *Considerazioni medico-biologiche sulle lettere di S. Paolo*, « Vita e pensiero, Rassegna italiana di Cultura », 30, 78, 1947.
268. — *Recenti acquisizioni in fatto di eziologia e terapia dei tumori maligni*, « La Riforma Medica », anno LXI, p. 57, 1947.
269. — *Il metabolismo sintetico dei batteri*, « L'ospedale Maggiore », anno XXXV, p. 55, 1947.
270. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori di Milano per l'anno 1946*. « Tumori », 33, fasc. 1-2, 1947.
271. — *Tentativi di bacterioterapia dei tumori*, « Terapia », gennaio-marzo 1947.
272. — *La figura morale di Pasteur*, « Convivium », n. 1, 1947.



273. - *Le malattie ereditarie. Istituzioni di eredo-patologia generale*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1947.
274. - *Il problema della vita*. Editrice Studium Christi, Roma 1947.
275. - *Virus e tumori*. Accademia Nazionale dei Lincei, Anno CCCVLIV, «Quad. I: Problemi attuali di scienza e di cultura», 1947.
276. - *Nuovi agenti curativi, chemoterapici ed antibiotici*. (Riassunto della conferenza tenuta il 10 maggio 1947). Accademia Nazionale dei Lincei 1947 «Problemi attuali di scienza e di cultura, Quaderno n. 2».
277. - *Gruppi sulfidrilici e cancerogenesi* (in coll. con G. Boretti). «Tumori», 33, 274, 1947.
278. - *Ancora sulla bacterioterapia dei tumori*, «Terapia», luglio-settembre, p. 69, 1947.
279. - *Proteins and Enzymes in cancer* (Researches carried out during the years 1940-46), «Enzymologia», 12, 128, 1947.
280. - *Libertà e vincoli nel pensiero scientifico*, «Vita e pensiero. Rassegna Italiana di cultura», 31, 148, 1948.
281. - *Dopo un soggiorno in Svezia*, «La ricerca scientifica», 18, n. 1-2, 1948.
282. - *Der Wirkungsmechanismus der krebs-erregenden Agentien, und die Natur der Krebszelle*, «Schweiz. mediz. Wochenschrift», 78, 419, 1948.
283. - *Alimentazione e cancro*, «Oncologia», 22, 191, 1948.
284. - *Il metabolismo della cellula nervosa*, «Rassegna clinico-scientifica», 24, 329, 1945.
285. - *Centro di studi per la patologia cellulare. Attività svolta dal marzo 1947 al giugno 1948*.
286. - *Nuovi indirizzi della terapia sperimentale delle malattie infettive*, «Progressi di Terapia», n. 1, 1948.
287. - *Gruppi sulfidrilici nella funzione degli idrocarburi cancerogeni*, «Acta Pontificia Academia Scientifica», 12, 1, 1948.
288. - *Azione di sostanze cancerogene su enzimi proteolitici* (in coll. con M. Bassi), «La ricerca scientifica», 18, 1038, 1948.
289. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1947*, «Tumori», 34, fasc. 1-2, 1948..
290. - *Il cancro nell'insegnamento medico*, «Minerva Medica», anno XL, n. 17, 1949, vol. I.
291. - *Einige Merkmale der Krebszelle und die Natur der krebsigen Umwandlung*, dal volume *Mikroskopische und chemische Beiträge zum Krebsproblem* redatto da C. Coronini, Verlag Georg Fromme & C., Wien 1949.
292. - *Die entzündungsbeeinflussenden Faktoren* (Conferenza Zurigo). «Bull. d. Schweiz. Akad. d. medicin. Wissenschaften», 5, 184, 1949.
293. - *Der Aufbau der Eiweisskörper im tierischen Organismus*, «Ergebn. d. Enzymol. forsch.», 10, 65, 1949.
294. - *Precisazioni in tema di allergia*, «Annali di Igiene», 59, n. 7, 1949.
295. - *L'organizzazione dei così detti Istituti del cancro*, «Oncologia», 23, 65, 1949.
296. - *On magnetic behaviour of some carcinogenic substances* (in coll. con Mayr e Gallico), «Experientia», 5, 357, 1949.
297. - *Contributo magnetochimico allo studio di alcuni ormoni* (in coll. con Mayr e Gallico), «Rend. Accad. Naz. Lincei», Cl. sc. fis. mat. e nat., ser. 8<sup>a</sup>, 7, 196, 1949.
298. - *The mode of action of the carcinogenic hydrocarbons. Semaine d'étude sur le problème biologique du cancer*, «Pontificia Academia Scientiarum, Scripta varia» 1949.
299. - *La «Settimana di Studio» dedicata al problema biologico del cancro presso l'Accademia pontificia delle Scienze, Città del Vaticano, 6-13 giugno 1949*. «Tumori», 36, I, 1950.
300. - *The mode of action of the carcinogenic hydrocarbons*. V Congr. Internat. de Pathologie comparée, Istanbul, 13-19 Mai 1949.
301. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1948*, «Tumori», 35, 1949.
302. - *Centro di studio per la patologia cellulare. Attività svolta dal luglio 1948 al dicembre 1949*, «La Ricerca scientifica», 20, 784, 1950.
303. - *Necrologia di A. Pepere (1873-1940)*, «Verhandl. d. deutschen. Gesellschaft für Pathologie», 32, Tagung, p. 445, 1950.

304. — *Natura e costituzione del complemento*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », 29, 1, 1950.
305. — *Ancora sull'azione di idrocarburi ed altre sostanze cancerogene o no sopra enzimi SH-attivati*, « La Ricerca scientifica », 20, 671, 1950.
306. — *The action of some carcinogenic compounds on SH-activated enzymes* (in coll. con Barbieri P.), « Enzymologia », 14, 10, 1950.
307. — *Quelques récentes directives dans la recherche cancérologique expérimentale*, « Le concours médical », 72, 2923, 1950.
308. — *La cura medica del cancro. Tentativi seri e speranze lecite*, « Boll. della Lega Italiana per la lotta contro i Tumori e Rassegna di Oncologia », 24, 279, 1950.
309. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1949*, « Tumori », 36, 1950.
310. — *The colchicine-like action of an acridine derivative* (in coll. con A. Necco), « Experimentia », 7, 142, 1951.
311. — *Elementi di Biochimica (Chimica fisiologica e patologica)*, VI Edizione U.T.E.T., Torino 1951.
312. — *Alcune conquiste della cancerologia sperimentale in campo eziologico*, « Gazzetta sanitaria », n. 5, 1951.
313. — *Recherches sur quelques poisons de la mitose*, « Acta Union internat. contra cancerum », 7, 518, 1951.
314. — *Scienza e umiltà*, « Vita e Pensiero », n. 12, 1951.
315. — *The action of hydrogen peroxyde on protein systems* (in coll. con M. Bassi), « Enzymologia », 15, 70, 1951.
316. — *Gli apporti pratici della cancerologia sperimentale*, « Minerva medica », anno XIII, vol. II, n. 89, 1951.
317. — *Natura e funzione degli anticorpi*, « Boll. Ist. Sieroterapico Milanese », 31, 337, 1951.
318. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1950*, « Tumori », 37, 1951.
319. — *La cura medica del cancro*, « La clinica terapeutica », 3, 3, 1952.
320. — *Quelques recherches effectuées en Italie depuis la dernière réunion de l'I.C.R.C.* (Juillet 1950, Paris), « Acta Union internation. contre le cancer », 8, 188, 1952.
321. — *Recenti progressi delle conoscenze sul cancro*, « Boll. di Oncologia (Lega Italiana per la cura contro i tumori) », 26, n. 4, 1952.
322. — *La chemioterapia dei tumori*, « Accademia medica », anno LXVII, n. 4, 1952.
323. — *I virus e l'essenza della vita*, « Vita e Pensiero », ottobre 1952.
324. — *Patologia generale delle malattie infettive con particolare riguardo alla immunità naturale* (Lezione tenuta all'inaugurazione del Corso sulla diagnosi batteriologica e sierologica delle malattie infettive, presso l'Istituto Sieroterapico Milanese, 12, maggio 1952), « Boll. Istituto Sieroterapico Milanese », 31, 263, 1952.
325. — *Un problema scientifico e sociale: il cancro*, « Nuova Antologia », n. 1824, dicembre 1952.
326. — *Se oggi esistano basi biologiche per una eventuale terapia medica del cancro*, « Medico Condotta - Medico pratico », 3, 13, 1952.
327. — *Experiments with some mitotic poisons*, « Journ. of Gerontology », 7, 614, 1952.
328. — *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori di Milano per l'anno 1951*, « Tumori », 3, 13, 1952.
329. — *Ueber die Wirkung einiger Steroide auf den Ascorbinsäuregehalt der Organe bei Ratten* (in coll. con F. Arienti), « Intern. Zeitschr. », 24, 272, 1952.
330. — *La sintesi della sostanza vivente*, « Rass. Clin. Scientifica », 29, I, 1953.
331. — *Fattori esterni del cancro, con particolare riguardo ai cancri professionali*, « Gazzetta Sanitaria », n. 7-8, 1953.
332. — *La struttura della cellula batterica*, « Boll. Istituto Sieroterapico Milanese », 32, maggio-giugno 1953.
333. — *Alcuni problemi di sintesi delle proteine*, « Lo Sperimentale », 103, 1-2, 1953.

334. - *Patologia cellulare ed oncologia sperimentale*, « La Ricerca scientifica », 23, 789, 1953.
335. - *Recenti progressi delle conoscenze sul cancro*, « I problemi del Servizio Sociale », Quaderno, 4, 1953.
336. - *Hydrogen Peroxide in Tumours* (in coll. con G. Cudkowicz), « Experientia », 9, 9, 348, 1953.
337. - *Azione combinata di colchicina e di un acridinico su culture di fibroblasti embrionali di pollo* (in coll. con A. Necco), « Tumori », 39, 161, 1953.
338. - *Wasserstoffsuperoxyd in Tumorgewebe*, « Verhandlungen der Deutschen Gesellschaft für Pathologie », 37, Tagung 278, 1953.
339. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per la cura e lo studio dei tumori in Milano per l'anno 1952*, « Tumori », 30, 1953.
340. - *Capitoli integrativi alla traduzione del « Trattato di patologia generale » di F. Büchner*, U.T.E.T., Torino 1954.
341. - *Che cos'è una malattia*, « Nuova Antologia », n. 1839, 357, 1954.
342. - *Ormonoterapia dei tumori maligni*, « Relazioni Clinico-Scientifiche », n. 37, p. 43, anno 7, vol. VI, 1954.
343. - *Centro di studio per l'oncologia sperimentale. Attività svolta durante l'anno 1952-1953*, « La Ricerca scientifica », 24, 752, 1954.
344. - *Relazione sull'attività dell'Istituto Nazionale per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1953*, « Tumori », 40, 105, 1954.
345. - *Hydrogen Peroxide and protein changes in tumours*, « Acta Union Internat. contra Cancrum », 10, 157, 1954.
346. - *Commemorazione di Emil von Behring e Paul Ehrlich nel centenario della nascita (1854) tenuta presso l'Istituto Sieroterapico Milanese*, « Boll. Istituto Sieroterapico Milanese », 33, 225, 1954.
347. - *Il metabolismo batterico*, « Boll. Istituto Sieroterapico Milanese », 33, 321, 1954.
348. - *Le influenze psichiche sullo sviluppo delle malattie organiche*, « Gazzetta Sanitaria », fasc. 4, 1954.
349. - *Lipoidi e crescita tumorale*, « Bollettino di Oncologia », 28, n. 3, 1954.
350. - *Le leucemie con speciale riguardo alla patologia sperimentale*, « Gazzetta Sanitaria », n. 2, 1955.
351. - *La chemioterapia dei tumori: tentativi e speranze*, « Progressi di Terapia », n. 1, 1955.
352. - *Un indirizzo nella chemioterapia dei tumori. Sostanze citotossiche alchilanti*, « Recenti Progressi in Medicina », 18, 239, 1950.
353. - *La patologia generale nelle malattie infettive*, « Boll. Istituto Sieroterapico Milanese », 34, 357, 1955.
354. - *I tumori condizionati*, « Gazzetta Sanitaria », n. 9, 1955.
355. - *Gesichtspunkte und Versuche über die krebsige Umwandlung der Zelle*, « Bull. Schweiz. Akademie d. med. Wissensch. », 11, 274, 1955.
356. - *Some aspects of carcinogenesis*, « Advances in Cancer Research », 3, 171, 1955.
357. - *Il finalismo nei processi della vita*, « Quaderni di San Giorgio », 1, « Il valore del fine nel mondo », 1955.
358. - *Relazione sull'attività dell'Istituto per lo studio e la cura dei tumori in Milano per l'anno 1954*, « Tumori », 41, 1955.
359. - *Conclusioni sull'aggiornamento in tema di terapia dei tumori*, « Atti Convegno Fondazione Ganassini » Milano, 1955.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte del prof. Gaetano Quagliariello, Socio Nazionale della Categoria V (Sezione Fisiologia), deceduto il 2 corrente a Napoli, ove era appena rientrato da un viaggio da lui compiuto a Roma, per intervenire a una riunione accademica.

Il Presidente ricorda, con commosse parole, la vita intemerata del caro Collega scomparso, l'appassionata dedizione alla scienza, la fervida e geniale attività che l'aveva reso il capo incontestato della chimica biologica italiana ed eleva, alla memoria di Gaetano Quagliariello, un reverente pensiero d'omaggio.

Il prof. Giordani dà quindi la parola al Collega Califano, che commemora il compianto Socio Pietro Rondoni.

La Signora Elena Rondoni, impossibilitata a intervenire, per ragioni di salute, ha inviato un commosso messaggio e altre adesioni sono pervenute dal Rettore dell'Università di Milano, rappresentato dal prof. Margaria, dal Preside della Facoltà Medica di quella Università e da amici e discepoli dell'illustre Maestro scomparso.

Il Presidente ringrazia il Collega Califano per la sua elevata orazione e rinnova ai famigliari del Socio Rondoni, presenti alla seduta, l'espressione del più vivo cordoglio della Classe e suo personale, per la scomparsa dell'insigne Collega che altamente onorò la scienza medica italiana.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il prof. Giordani comunica che assistono all'adunanza i prof. Karl Schröder dell'Accademia delle Scienze di Berlino, Gregorio Moisi dell'Accademia delle Scienze Romana, Kustaanheimo dell'Università di Helsinki e Miss Joshie Katsurada dell'Università di Hokkaido. Ai graditi ospiti il prof. Giordani porge il più cordiale saluto dell'Accademia e suo personale.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente presenta il fascicolo di marzo dei Rendiconti della Classe e rivolge un vivo ringraziamento ai Segretari accademici Signorini e Cotronei che, con tanta appassionata competenza, curano la pubblicazione degli Atti.

Il prof. Beniamino Segre presenta all'Accademia un suo volume or ora apparso, dal titolo: «Some properties of differentiable varieties and transformations (with special reference to the analytic and algebraic cases)». Uno dei suoi scopi è quello di contrapporsi all'ognor crescente eccessiva astrazione e specializzazione nelle matematiche. L'esposizione viene in esso condotta sì da poter essere seguita senza troppe difficoltà anche da chi non



abbia già conoscenze specifiche sugli argomenti trattati; sebbene – per ragioni di spazio – varie delle dimostrazioni vi si trovino soltanto adombrate, pure l'essenza dei metodi risulta sempre chiarita, mentre d'altronde – alla fine dei singoli capitoli – vengono anche fornite indicazioni bibliografiche bastevoli per ulteriori approfondimenti. La trattazione ha carattere monografico, e presenta parecchie novità di forma e di sostanza secondo quanto trovasi a volta a volta specificato nelle Note che iniziano e chiudono i singoli capitoli.

Delle nove Parti in cui l'opera è divisa, le prime quattro hanno carattere essenzialmente differenziale, le successive tre si svolgono nell'ambito della geometria algebrica, e le ultime due concernono certi aspetti della teoria delle equazioni differenziali e di quella delle corrispondenze fra varietà topologiche. Uno sguardo all'indice può bastare per dare un'idea più precisa della ricchezza e varietà del contenuto, la cui caratteristica principale è quella di stabilire suggestivi e talora impreveduti legami fra argomenti apparentemente lontani (relativi a vari indirizzi della geometria differenziale in piccolo ed in grande, alla geometria algebrica, alla teoria delle funzioni, alla topologia, ecc.), dando risalto al lato geometrico dei problemi ed evitando i lunghi calcoli per quanto possibile.

Il volume è una versione in inglese – con numerose aggiunte ed ampliamenti – del corso di lezioni tenuto dal prof. Segre a Pavia dal 26 settembre al 5 ottobre 1955, per invito del «Centro Matematico Estivo». Esso appare nella serie degli «*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*» da lui diretta, nella quale già sono apparse in questo dopoguerra le importanti monografie di Pierre Samuel, Leonard Roth e Mario Baldassarri, mentre altre sono in preparazione ad opera di Francesco Severi ed Aldo Andreotti. Questo multiforme complesso di pubblicazioni mette in chiara luce la preminenza del contributo geometrico italiano, sottolineandone internazionalmente l'importanza in vista dell'amplessissima diffusione della suddetta Collezione, curata in modo altamente encomiabile dalla benemerita Casa editrice tedesca dello Springer.

Il Socio D'Erasmo presenta un volume edito dalla Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Napoli, a cura della Soprintendenza Bibliografica per la Campania e la Calabria, dal titolo «*Pubblicazioni periodiche esistenti nelle Biblioteche pubbliche e negli Istituti universitari di Napoli (fino al 1950)*».

Il prof. D'Erasmo, dopo aver premesso che il suddetto volume verrà oggi presentato anche alla Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche dal Collega Colamonico, mette in evidenza l'importanza dell'opera che risponde a un antico voto degli studiosi napoletani e che si propone di facilitare la consultazione di tutto il materiale sparso nelle tante pubblicazioni periodiche esistenti nelle Biblioteche pubbliche e negli Istituti universitari di Napoli. Il volume comprende riviste propriamente dette, letterarie e scientifiche; Atti accademici e pubblicazioni ufficiali a carattere periodico; Giornali, esclusi i numeri unici, dal 17° al 20° secolo. Alla realizzazione dell'impresa hanno contribuito finanziariamente, oltre che le quattro Accademie costi-

tuenti la Società Nazionale, l'Accademia Pontaniana, l'Università, il Banco di Napoli, la Camera di Commercio e l'Isveimer.

Il Presidente ringrazia vivamente i Colleghi Segre e D'Erasmo delle loro comunicazioni e si compiace che nell'interesse della scienza siano state condotte a termine opere così importanti.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci Carobbi, Segre, Caglioti, Cotronei, Margaria e Aloisi.

Viene letto l'elelenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Caglioti, anche a nome dei Colleghi Cambi e Natta, legge la relazione della Commissione incaricata di esaminare la Memoria dei Sigg. Peroni e Cocchi dal titolo « Relazioni di simmetria all'interfaccia per epitassia ».

Tale relazione, che conclude proponendo la stampa del lavoro nelle Memorie accademiche, viene messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

## CONGRESSI

Il prof. Giordani comunica che, dall'11 al 18 aprile 1958, avrà luogo a Nizza il XV Congresso Internazionale d'Orticoltura e rivolge preghiera a quei Colleghi che intendessero prender parte alla suddetta manifestazione, di voler rappresentare l'Accademia.

## TEMI DI DISCUSSIONE

Il Presidente invita i Soci a formulare proposte per determinare i temi di discussione e conferenze per l'anno accademico 1957-58.

La Classe, dopo aver preso atto che quest'anno non è stato possibile, per cause varie, tenere la prevista discussione sulle ossidazioni biologiche, delibera di rinviare la discussione stessa al 1957-58, confermando ai Colleghi Califano, Margaria, Meneghetti, Rossi-Fanelli e Tonzig l'incarico di organizzare la manifestazione.

Il Socio Montalenti ricorda che nel prossimo anno cadrà il bicentenario della Pubblicazione del « Sistema Naturae » di Linneo, mentre, nel 1959, ricorrerà il centenario della stampa dell'opera di Darwin « On the origin of species ».

Se la Classe lo ritenesse opportuno, si potrebbe prendere in considerazione la possibilità di dedicare alle due importanti ricorrenze un convegno di sistematica biologica e di evoluzione.

Dopo breve discussione, alla quale partecipano numerosi Soci, la Classe decide di indire, nel prossimo anno accademico, una conferenza pubblica per il bicentenario dell'opera linneiana e di studiare la possibilità di organizzare, per il 1959, un convegno sulla specie.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 6 giugno 1957*

*Archives des Sciences*. Editées par la Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève, Vol IX, 1956, fascicule speciale: 5<sup>e</sup> Colloque Ampère. Genève, 21-22-23 mars 1956.

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. COMITATO PER LA GEOGRAFIA, GEOLOGIA E MINERALOGIA. — *Bibliografia geologica d'Italia*. Vol. II: *Lombardia* (sino al 1954 incluso). A cura di Ardito Desio, Napoli, Stab. Tip. Genovese, 1957., Pp. 300, in-8°.

DE MENEZES ACCIAIOLI Luis. — *Geologia de Portugal*. Ensaio bibliográfico, 1<sup>o</sup> volume. Lisboa, Direcção de Minas e Serviços geológicos, 1957. Pp. LXIII-505, in-8°.

DESIO Ardito. — Vedi: Consiglio Nazionale delle Ricerche... *Bibliografia geologica d'Italia*.

NICOLAU Șt. S. — *Elemente de inframicrobiologie generală*. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1956. Pp. XV-773, in-4°, con figg. e tavv.

*La partecipazione dell'Italia all'anno geofisico internazionale*. Estr. da «Documenti di Vita Italiana», a. VII, 1957, n. 65.

*Pubblicazioni periodiche esistenti nelle biblioteche pubbliche e negli istituti universitari di Napoli (fino al 1950)*. A cura della Soprintendenza Bibliografica per la Campania e la Calabria. Napoli, Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, 1957. Pp. XVI-739, in-8°.

QUAGLIA G. Battista. — *Considerazioni teoriche sulla eziopatogenesi delle neoplasie maligne*. Estr. da «Metapsichica», 1956, fasc. I.

SALFI Mario. — *Zoologia*. — Milano, F. Valardi, 1957. Pp. XXI-1309, in-4°, con figg. e tavv.

SEGRE Beniamino. — *Some properties of differentiable varieties and transformations with special reference to the analytic and algebraic cases*. Berlin, Gottingen etc., Springer Verlag, 1957, Pp. 183, in-8°. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, n. f., h. 13. Reihe: 'Algebraische Geometrie besorgt von B. Segre').

WEHLÉ Philippe. — *L'univers aléatoire*. Préface de Ferdinand Gonseth. Neuchâtel, Editions du Griffon, 1957. Pp. 459, in-8° (Bibliothèque Scientifique, 29).

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

## INDICI DEL VOLUME





## INDICE PER AUTORI

## A

- ALEMAGNA A., BACCHETTI T.  
 ALOISI M., Commemorazione del Socio Nazionale Guido Vernoni, 114.  
 AMOROSO L., L'equazione canonica della funzione logistica. Nota I, 127.  
 — L'equazione canonica della funzione logistica. Nota II, 238.  
 ANTONIANI C. e LANZANI G. A., L'anello tiatzolico della cocarbossilasi identificato quale gruppo attivo cocarboligasico, 516.  
 ANTONINI E., vedi ROSSI-FANELLI A.  
 APARO E., Sulle equazioni algebriche matriciali, 20.  
 ARDUINI A. e POMPEIANO O., Modificazioni dell'attività di singole unità nel nucleo del tetto per stimolazioni della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva, 98.  
 ARRIGONI O., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XX. Effetto dell'acido ascorbico e dell'acido deidroascorbico sull'attività fosfoglucomutase, 77.  
 ARRIGONI O., vedi MARRÈ E.  
 ASCENZI A. e DI GUGLIELMO R., Inquadramento e nosologia di una nuova situazione morbosa: la reticolosi linfoide disprotidemica o Malattia di Waldeström, 205.  
 AZZONE G. F., CARAFOLI E. e BARBOLINI G. Il glutatone nel fegato e nei muscoli di conigli in avitaminosi E, 763.

## B

- BACCHETTI T. e ALEMAGNA A., Decomposizione termica di 1-2-4-osodiazoloni-5. Una nuova sintesi di benzimidazoli, 637.  
 BAFFONI G. M. e ELIA E., L'attività mitotica durante la morfogenesi cerebellare in un Anfibia anuro, 109.  
 BAFFONI G. M., Il corpo cromatoide e l'eterogametia in Potamon fluviatile (Crustacea Decapoda), 200.  
 — La cromatina sessuale in elementi somatici di un Crostaceo decapode, 533.  
 BAIADA E., La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale de calcolo delle variazioni in una variabile, 584.  
 BARASA A., Grandezza dei neuroni piramidali della corteccia cerebrale in alcune specie di Mammiferi di differente mole somatica, 347.  
 BARBOLINI G., vedi AZZONE G. F.  
 BATTAGLIA E., La sostituzione dell'idrolisi a caldo con l'idrolisi a temperatura ambiente (« idrolisi fredda ») nel metodo Feulgen, 188.  
 — Metodo Feulgen in Ematologia; un procedimento semplificato (idrolisi a temperatura ambiente) e rapido (30 minuti), 337.  
 BELLINI L., Studio delle dipeptidasi e proteinasi nello sviluppo di « Artemia salina » Leach, 340.  
 BERTOTTI B., Sul flusso secondario nello strato limite tridimensionale, 455.  
 BIGNAMI A. e JOPPOLO C., Su la polmonite da « Pneumocystis carinii », 659.  
 BIGNAMI A. e MARCHIAFAVA P., Dimostrazione di sinapsi in un ganglioneuroma periferico, 661.  
 BIOCCEA E., Il contributo dell'Istituto di Parasitologia dell'Università di Roma alla conoscenza dell'ospite intermedio e del ciclo di vita degli schistosomi dei mammiferi (Schistosoma haematobium e Schistosoma bovis) in Somalia. Rilevi alla Nota di Enzo Sobrero su Bulinus abyssinicus, 376.  
 — Angiostrongylus chabaudi n. sp., parassita del cuore e dei vasi polmonari del gatto selvatico (Felis silvestris), 526.  
 — e LE ROUX P., Su un nuovo genere (Angulocirrus gen. nov.) e su due nuove specie di tricostrongilidi (Angulocirrus orycteropi sp. nov., Angulocirrus minor sp. nov.) parassiti di mammiferi africani, 57.  
 — vedi LE ROUX P.  
 BONINO G. B. e FABBRI G., Sullo spettro ultravioletto di assorbimento del cuprotetracianuro di potassio in soluzione acquosa ed allo stato cristallino, 402.  
 BOSCO G., Sulla metodologia di studio della parete cellulare dei batteri, 547.

## C

- CACACE F., GIULIANO R. e INAM-UL-HAQ, L'acido benzimidazol-N-acetico e la sua azione auxinica, 510.
- CAGLIOTI V., SARTORI G. e SCROCCO M., Ricerche di spettrofotometria I.R. su alcuni complessi cianidrici del ferro (II e III), del cromo (III) e del manganese (I, II e III), 266.
- CALAPSO M. T., Sulle curve a flessione costante, 438.
- CALIFANO L., Commemorazione del Socio Nazionale Pietro Rondoni., 777.
- CAPRIOLI G., vedi FORTINI T.
- CARAFOLI E., vedi AZZONE G. F.
- CARDANI C., vedi QUILICO A.
- CARINI G., Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica, 38.
- Osservazioni sulle onde cilindriche della magneto idrodinamica, 482.
- CARINI S., vedi GHIRINGHELLI R.
- CARRA S., vedi SIMONETTA M.
- CARRANO F., Effetti del  $\gamma$ -dinitrofenolo sulle uova di « *Aplysia limacina* », 216.
- CASNATI G., Sulla rigenerazione dei composti carbonilici dai loro dinitro-fenilidrazoni, 54.
- CAVALLINI D., vedi ROSSI-FANELLI A.
- CERQUIGLINI S., Un nuovo metodo di esplorazione delle funzioni laringee: la fotoelettrolaringografia, 352.
- CESARI M., vedi NATTA G.
- CHERUBINO S., Sulla dinamica economica, 281.
- CHINAGLIA B., vedi DEMICHELI F.
- CHIORBOLI P. e TEDESCHI E., Spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa e allo stato cristallino, 44.
- CIPRIANI C., Un nuovo minerale fra i prodotti boriferi di Larderello, 519.
- COLOMBO G., Sulla struttura e funzione della cromatina delle cellule nutrici e degli oociti nella oogenesi del baco da seta (« *Bombyx mori* L. », Lepidoptera) 64.
- Sopra un notevole fenomeno nel campo delle vibrazioni non lineari di combinazione., 726.
- COLONNETTI G., Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili. Nota I, 3
- Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili. Nota II, 130.

- CONTI R., Sistemi differenziali asintoticamente equivalenti, 588.
- CORRADINI P., Sulla struttura cristallina del trimero della esaidrobenzaldeide, 504.
- Sulla struttura cristallina del succinil-succinato di metile, 615.
- CORRADINI P., vedi NATTA G.
- CORSI A., Osservazioni sulla tropomiosina del muscolo scheletrico umano, 761.
- CORSI A. e GALLUCCI V., Osservazioni sulla composizione proteica delle miofibrille cardiache, 664.
- COTTI E., CREPAX P. e SILVESTRINI B., Analisi elettroencefalografica dell'effetto Rossi ottenuto in Cani predisposti e non predisposti alla epilessia riflessa, 103.
- CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., Caratteri dell'attività elettrica unitaria dei neuroni corticocerebellari, 540.
- NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di impulsi tattili e propriocettivi ovvero di variazioni del livello pressorio, 649.
- NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di stimoli chimici, 748.
- CREPAX P., vedi COTTI E.

## D

- DANUSSO F. e PAJARO G., Analisi di  $^{14}\text{C}$  in etilene o polietilene marcati, 48.
- D'ARCANGELO P., Effetti della streptomycin e della diidrostreptomycin sul consumo di  $\text{O}_2$  da parte di omogenati di cervello di ratto, 654.
- DEL RE G., Sulla struttura elettronica dell'ossido di benzonitrile, 491.
- DE MARCO C., vedi ROSSI FANELLI A.
- DEMICHELI F., Può l'unità « roentgen » venire estesa all'intervallo di energie (0,10 ÷ 100) MeV? 610.
- CHINAGLIA B., Spettroscopia nucleare dei nuclidi della famiglia del torio con il metodo delle coincidenze discriminate, 613.
- DI GUGLIELMO R., vedi ASCENZI A.
- DINCULEANU N., Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Nota I, 135.
- Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs, Fonctions linéaires continues. Nota II, 269.

**E**

- ELIA E., vedi BAFFONI G. M.  
 ELTER G. e ELTER P., Sull'esistenza, nei dintorni del Piccolo S. Bernardo, di un elemento tettonico riferibile al ricoprimento del Pas du Roc, 181.  
 ELTER P., vedi ELTER G.

**F**

- FABBRI G., Sullo spettro ultrarosso del cobaltocianuro di potassio cristallino alla temperatura dell'azoto liquido, 488.  
 FABBRI G., vedi BONINO G. B.  
 FAEDO S., Un principio di esistenza nell'analisi lineare e sua applicazione alla dualità di alcune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali, 434.  
 FARINELLI U., Sull'approssimazione « ritardato infinito » nello studio del transitorio di un reattore nucleare, 606.  
 FENOGLIO M. e RIGAULT G., Contributo alla geochimica dell'euroipo, 420.  
 FERRARI I., Sul campo elettromagnetico di un dipolo immerso in un mezzo non omogeneo, 172.  
 FERRERO F., MALVANO R. e TRIBUNO C., Comportamento anomalo della sezione d'urto per neutroni veloci nella fotodisintegrazione del Cr, As, I, Ta, 730.  
 FICHERA G., Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse, 706.  
 FORTI G., vedi MARRÈ E.  
 FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione centro-lembo del Sole del tripletto verde del Magnesio:  $\lambda$  5167,3- $\lambda$  5172,7- $\lambda$  5183,6, Nota I, 294.

**G**

- GALLUCCI V., vedi CORSI A.  
 GARAVELLI C. L., Bonattite: un nuovo minerale di alterazione del giacimento elbano di Capo Calamita, 318.  
 GASPARINI CATTANEO I., Sulle geodetiche di una  $V_n$  relative a una connessione affine, 146.  
 GHIRETTI F., vedi GHIRETTI-MAGALDI A.  
 GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., Contenuto di flavine e sensibilità

al cianuro e all'ossido di carbonio dei tessuti di « *Octopus vulgaris* » (Lam.), 667.

- GIUDITTA A. e GHIRETTI F., I citocromi dei Cefalopodi, 753.  
 GHIRINGHELLI R. e CARINI S., Riduzione « in vitro » della colesterina ad opera di « *Escherichia coli* », 514.  
 GHIZZETTI A., Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota I, 276.  
 — Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota II, 430.  
 GIACOMELLO G., LIQUORI A. M. e RIPAMONTI A., Struttura cristallina dell'1-5-naftiridina, 418.  
 GIANNUZZI M. A., Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota II, 298.  
 — La moderna colorimetria delle stelle binarie ed il nuovo fotometro colorimetrico dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario. Nota I, 464.  
 GIUDITTA A., vedi GHIRETTI-MAGALDI A.  
 GIULIANO R. e STEIN M. L., Composti solfo-nammidici a nucleo dell'indolo. -il 5-solfonammido-triptofano. Nota I, 626.  
 GIULIANO R., vedi CACACE F.  
 GORTANI M., Commemorazione del Socio Nazionale Federico Sacco, 226.  
 GRAZIOSI F., Studio quantitativo dell'adattamento di *Micrococcus pyogenes* e *Proteus vulgaris* alla novobiocina in coltura continua, 369.  
 GRIOLI G., Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla, 459.

**H**

- HAIMOVICI A., Una generalizzazione del metodo di Fourier per la risoluzione di alcuni problemi ai limiti, 573.  
 HALANAY A., Solutions périodiques des systèmes non linéaires à petit paramètre, 30.

**I**

- INAM-UL-HAQ., vedi CACACE F.  
 INGHILLERI G., Su una proprietà dell'errore medio di una funzione di quantità compensate, 598.



## J

JOPPOLO C., vedi BIGNAMI A.

## K

KATSURADA Y., Alcune trasformazioni parallele di varietà algebriche  $\{H, K\}$  di Del Pezzo-Segre, 719.

## L

LAMPARIELLO G., Intorno alla propagazione di onde elettromagnetiche nei superconduttori e ai teoremi di reciprocità del campo elettromagnetico, 302

— Le oscillazioni di un plasma sulla base del principio einsteiniano dell'impulso, 477.

LANZANI G. A., vedi ANTONIANI C.

LASCU A. T., I gruppi di omologia della varietà delle secanti di una curva algebrica iperspaziale, 716.

LATTANZI F., Espressioni delle proiezioni su un retta del peso elastico assiale di un'asta, 449.

LE ROUX P. e BIOCCA E., Su una nuova specie del genere *Uncinaria* e su due nuove specie del genere *Ancylostoma*, 192.

LE ROUX P., vedi CIOCCA E.

LIPPARONI E., Sopra alcuni esemplari femmine di *anchilostoma*, riportabile ad «*A. iperodontatum*», parassita di «*Caracal nobicus*», 539.

LIQUORI A. M., vedi GIACOMELLO G.

## M

MAJORANA Q., Sull'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale, 392.

— Ipotetiche conseguenze dell'assorbimento gravitazionale, 397.

MALVANO R., vedi FERRERO F.

MARCHIAFAVA P., vedi BIGNAMI A.

MARCUS S., Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota I, 24.

— Sur certaines classes de fonctions continues à deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota II, 140.

MARGARIA R., GUALTIEROTTI T. e SPINELLI D., Resistenza alle alte accelerazioni di animali immersi in acqua, 703.

MARIANI B. M., Osservazioni sulle cellule nervose motorie del midollo spinale di An-

fibi urodeli in seguito all'amputazione dell'arto, 220.

MARRÈ E., ARRIGONI O. e FORTI G., Reazioni metaboliche all'auxina. — II. Effetto di concentrazioni sopraottimali di auxina sui sistemi del glutatone e dell'acido ascorbico, e sul metabolismo energetico in segmenti di intermedio di pisello, 85.

— e ARRIGONI O., Interazione tra glutatone e auxina nello stimolo della crescita, 641.

— e SERVETTAZ O., Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. — II. Sulla termoresistenza «in vitro» del sistema citocromo riduttasico di *Cianoficee* termali, 91.

— e SERVETTAZ O., Sul meccanismo dell'azione attivante della florizina sulla fotosintesi e sulla reazione di Hill, 328.

MAZZI F., Metodo di determinazione del calcio e del magnesio nelle rocce mediante il diffrattometro a raggi X, 739.

MELETTI P., Risultati di un trapianto di embrioni fra cariossidi di due razze culturali di grano, 269.

MERLI L., Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale  $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ , 580.

MESSERI E., «Influenze cosmiche» e suicidio. (Sugli effetti di poco note condizioni ambientali sull'attività nervosa superiore), 360.

## N

NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M., Determinazione quantitativa della cristallinità del polipropilene, 11.

NEGRI G., Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Gola, 680.

NICOLAUS R., vedi SCROCCO M.

NIOLETTI B. e SOLIMA A., Velocità di sviluppo e ritmicità di sfarfallamento in «*Drosophila melanogaster*», 71.

NIGRO A., vedi CREPAX P.

NOBILE V., Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota III, 6.

NORINELLI A., Il gradiente del campo gravitazionale, 470.

O

ONICESCU O., Variétés riemanniennes multilocalles, 154.

P

PAJARO G., vedi DANUSSO F.

PARMEGGIANI P. L., vedi CREPAX P.

PENSO G. e VICARI G., Ricerche sulla titolazione di tossine e antitossine per mezzo delle colture di tessuti « in vitro ». Nota preliminare, 375.

— e — Sull'azione citopatogena della tossina difterica, studiata per mezzo delle colture di tessuti « in vitro », 555.

— e — Sull'azione citopatogena della tossina stafilococcica, studiata per mezzo delle colture di tessuti « in vitro », 673.

— e — Frazione citossica non emolitica nella O-streptolisina, messa in evidenza per mezzo delle colture di tessuti « in vitro », 772.

PERRI T., La genesi delle intumescenze del midollo spinale negli Anfibi anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di abbozzi di arti, 767.

PICONE M., Riduzione dimensionale del problema dell'integrazione, in grande, dei sistemi di equazioni ai differenziali totali, 242.

PIOZZI F., Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer. Nota III, 629.

PIOZZI F., vedi QUILICO A.

POMPEIANO O., Analisi degli effetti della stimolazione elettrica del nucleo rosso nel Gatto decerebrato, 100.

POMPEIANO O., vedi ARDUINI A.

PUNTONI V., Commemorazione del Socio Nazionale Dante De Blasi, 675.

Q

QUILICO A., CARDANI G. e PIOZZI F., Sulla struttura dell'echinulina, 411.

R

RIGAULT G., vedi FENOGLIO M.

RIPAMONTI A., vedi GIACOMELLO G.

ROMEO A. e SCHIMBERTI A. M., Sull'addizione di ammino-esteri al 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone, 620.

ROMEO A., e VILLOTTI R., Su di un metodo per purificare i 3- $\beta$ -idrossi- $\Delta_5$ -steroidi, 733.

ROSATI L. A., Sui piani desarguesiani affini « non-ciclici », 443.

ROSSI-FANELLI A., CAVALLINI D. e DE MARCO C., Ricerche sulla mioglobina fetale, 18.  
— e ANTONINI E., Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. Nota I. Isolamento e cristallizzazione di un nuovo pigmento dai muscoli della *Aplysia depilans* e dell'*Aplysia limacina*, 133.

RUFFINO G., Contatore elettronico algebrico di frange d'interferenza, 602.

S

SARTORI G., vedi CAGLIOTTI V.

SCHIMBERNI A. M., vedi ROMEO A.

SCROCCO M. e NICOLAUS R., Costanti di ionizzazione acida e comportamento spettrofotometrico nell'I. R. e nell'U. V. di acidi c-metil-pirrolici, 311.

— e — Ricerche spettrofotometriche I. R. ed U. V. su una serie di esteri pirrolici, 500.

SCROCCO M., vedi CAGLIOTTI V.

SEGRE B., Dilatazioni di varietà differenziabili, 249.

— Fibrizioni differenziabili di un' $r$ -sfera mediante  $k$ -sfere equatoriali, 383.

SERVETTAZ O., vedi MARRÈ E.

SILVA G., Sulla determinazione degli errori di lettura di una livella dovuti a imperfezioni della costruzione, 257.

SILVESTRINI B., vedi COTTI E.

SIMONETTA M. e CARRÀ S., Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina. — Parte I: velocità di bensoilazione delle coronaftilammine, 176.

SOBRERO E., *Bulinus* (Physopsis) abyssinicus, ospite intermedio di *Schistosoma haematobium* in Somalia. Ricostruzione del ciclo di vita del parassita, 553.

SOLIMA A., vedi NICOLETTI B.

STEFANELLI A., Ricerche sul movimento degli spermatozoi di Anfibi in condizioni sperimentali e con l'ausilio della cinematografia, 772.

STEIN M. L., vedi GIULIANO R.

STORCHI E., Soluzioni ad un parametro del problema plastico della deformazione piana, 286.

STORCHI E., Soluzioni ad un parametro del problema plastico degli sforzi piani, 593.

### T

TEDESCHI E., vedi CHIORBOLI P.

TODESCHINI B., Sulle correnti piane poco rotazionali, 167.

TRIBUNO C., vedi FERRERO F.

TRUEDELL C., Sulle basi della termomeccanica. Nota I, 33.

— Sulle basi della termomeccanica. Nota II, 158.

### V

VICARI G., vedi PENSO G.

VILLOTTI R., vedi ROMEO A.

---

## INDICE PER MATERIE

## A

**Aerodinamica.** — Sulle correnti piane poco rotazionali. TODESCHINI B., 167.

**Analisi.** — La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile. BAIADA E., 584.

— Sistemi differenziali asintoticamente equivalenti. CONTI R., 588.

**Analisi funzionale.** — Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Nota I. DINCULEANU N., 135.

— Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionnelles linéaires continues. Nota II. DINCULEANU N., 269.

**Analisi matematica.** — Un principio di esistenza nell'analisi lineare e sua applicazione alla dualità di alcune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali. FAEDO S., 434.

— Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota I. GHIZZETTI A., 276.

— Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota II. GHIZZETTI A., 430.

— Una generalizzazione del metodo di Fourier per la risoluzione di alcuni problemi ai limiti. HAIMOVICI A., 573.

— Solutions périodiques des systèmes non linéaires à petit paramètre. HALANAY A., 30.

— Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota I. MARCUS S., 24.

— Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale  $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ . MERLI L., 580.

— Riduzione dimensionale del problema dell'integrazione, in grande, dei sistemi di equazioni ai differenziali totali. PICONE M., 242.

**Astronomia.** — Variazione centro-lombo del Sole del tripletto verde del Magnesio;  $\lambda$  5167,3- $\lambda$  5172,7- $\lambda$  5183,6. Nota I. FORTINI T. e CAPRIOLI G., 294.

**Astronomia.** — Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota II. GIANNUZZI M. A., 298.

— La moderna colorimetria delle stelle binarie ed il nuovo fotometro colorimetrico dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario. Nota I. GIANNUZZI M. A., 464.

— Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota III. NOBILE V., 6.

**Astronomia geodetica.** — Sulla determinazione degli errori di lettura di una livella dovuti a imperfezioni della costruzione. SILVA G., 257.

## B

**Biochimica.** — Osservazioni sulla tropomiosina del muscolo scheletrico umano. CORSI A., 761.

— Osservazioni sulla composizione proteica delle miofibrille cardiache. CORSI A. e GALLUCCI V., 664.

— Contenuto di flavine e sensibilità al cianuro e all'ossido di carbonio dei tessuti di «*Octopus vulgaris*» (Lam.). GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., 667.

— I citocromi dei Cefalopodi. GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., 753.

— Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. Nota I. Isolamento e cristallizzazione di un nuovo pigmento dai muscoli della *Aplysia depilans* e dell'*Aplysia limacina*. ROSSI-FANELLI A. e ANTONINI E., 133.

**Biologia.** — Il glutatione nel fegato e nei muscoli di conigli in avitaminosi E. AZZONE G. F., CARAFOLI E. e BARBOLINI G., 763.

— L'attività mitotica durante la morfogenesi cerebellare in un Anfibio anuro. BAFFONI G. M. e ELIA E., 109.

— Il contributo dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma alla cono-



- scenza dell'ospite intermedio e del ciclo di vita degli schistosomi dei mammiferi (*Schistosoma haematobium* e *Schistosoma bovis*) in Somalia. Rilievi alla Nota di Enzo Sobrero su *Bulinus abyssinicus*. BIOCCA E., 376.
- Effetti del  $\gamma$ -dinitrofenolo sulle uova di «*Aplysia limacina*». CARRANO F., 216.
- Osservazioni sulle cellule nervose motorie del midollo spinale di Anfibi urodeli in seguito all'amputazione dell'arto. MARIANI B. M., 220.
- Ricerche sulla titolazione di tossine e antitossine per mezzo delle colture di tessuti «in vitro». Nota preliminare. PENSO G. e VICARI G., 375.
- Sull'azione citopatogena della tossina difterica, studiata per mezzo delle colture di tessuti «in vitro». PENSO G. e VICARI G., 555.
- Sull'azione citopatogena della tossina stafilococcica, studiata per mezzo delle colture di tessuti «in vitro». PENSO G. e VICARI G., 673.
- Frazione citotossica non emolitica nella *O-streptolisina*, messa in evidenza per mezzo delle colture di tessuti «in vitro». PENSO G. e VICARI G., 772.
- La genesi delle intumescenze del midollo spinale negli Anfibi anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di abbozzi di arti. PERRI T. 767.
- *Bulinus* (*Physopsis*) *abyssinicus*, ospite intermedio di *Schistosoma haematobium* in Somalia. Ricostruzione del ciclo di vita del parassita. SOBRERO E., 553.
- Ricerche sul movimento degli spermatozoi di Anfibi in condizioni sperimentali e con l'ausilio della cinematografia. STEFANELLI A., 772.
- Biologia vegetale.** — Risultati di un trapianto di embrioni fra cariossidi di due razze culturali di grano. MELETTI P., 209.
- C**
- Calcolo numerico.** — Sulle equazioni algebriche matriciali. APARO E., 20.
- Chimica.** — L'acido benzimidazol-N-acetico e la sua azione auxinica. CACACE F., GIULIANO R. e INAM UL-HAQ, 510.
- Ricerche di spettrofotometria I.R. su alcuni complessi cianidrici del ferro (II e III), del cromo (III) e del manganese (I, II e III). CAGLIOTI V., SARTORI G. e SCROCCO M., 266.
- Spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa e allo stato cristallino. CHIORBOLI P. e TEDESCHI E., 44.
- Sulla struttura cristallina del trimero della esaidrobenzaldeide. CORRADINI P., 504.
- Sulla struttura cristallina del succinil-succinato di metile. CORRADINI P. 615.
- Analisi di  $^{14}\text{C}$  in etilene o polietilene marcati. DANUSSO F. e PAJARO G., 48.
- Struttura cristallina dell'1-5-naftiridina. GIACOMELLO G., LIQUORI A. M. e RIPAMONTI A., 418.
- Composti solfonammidici a nucleo dell'indolo. Il 5-solfonammido-triptofano. Nota I. GIULIANO R. e STEIN M. L., 626.
- Determinazione quantitativa della cristallinità del polipropilene. NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M., 11.
- Sull'addizione di ammino-esteri al 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone. ROMEO A. e SCHIMBERNI A. M., 620.
- Su di un metodo per purificare i 3- $\beta$ -idrossi- $\Delta^5$ -steroidi. ROMEO A. e VILLOTTI R., 733.
- Costanti di ionizzazione acida e comportamento spettrofotometrico nell'I.R. e nell'U. V. di acidi c-metil-pirrollici. SCROCCO M. e NICOLAUS R., 311.
- Ricerche spettrofotometriche I.R. ed U. V. su una serie di esteri pirrollici. SCROCCO M. e NICOLAUS R., 500.
- Chimica biologica.** — Ricerche sulla mioglobina fetale. ROSSI-FANELLI A., CAVALLINI D. e DE MARCO C., 18.
- Chimica delle fermentazioni.** — Riduzione «in vitro» della colesterina ad opera di «*Escherichia coli*». GHIRINGHELLI R. e CARINI S., 514.
- Chimica fisica.** — Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del cuprotetracianuro di potassio in soluzione acquosa ed allo stato cristallino. BONINO G. B. e FABBRI G., 402.
- Sullo spettro ultrarosso del cobalticianuro di potassio cristallino alla temperatura dell'azoto liquido. FABBRI G., 488.
- Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina. — Parte I: velocità di bensoilazione delle cloronaftilammine. SIMONEITA M. e CARRÀ S., 176.

**Chimica organica.** — Decomposizione termica di 1-2-4-osodiazoloni-5. Una nuova sintesi di benzimidazoli. BACCHETTI T. e ALEMAGNA A., 637.

— Sulla rigenerazione dei composti carbonilici dai loro dinitro-fenilidrazoni. CASNATI G., 54.

— Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer. Nota III. PIOZZI F., 629.

— Sulla struttura dell'echinulina. QUILICO A., CARDANI C. e PIOZZI F., 411.

**Chimica teorica.** — Sulla struttura elettronica dell'ossido di benzonitrile. DEL RE G., 491.

**Citologia.** — La sostituzione dell'idrolisi a caldo con l'idrolisi a temperatura ambiente (« idrolisi fredda ») nel metodo Feulgen. BATTAGLIA E., 188.

— Metodo Feulgen in Ematologia: un procedimento semplificato (idrolisi a temperatura ambiente) e rapido (30 minuti). BATTAGLIA E., 337.

— Sulla struttura e funzione della cromatina delle cellule nutritive e degli oocitini della oogenesi del baco da seta (« Bombyx mori L. », Lepidoptera). COLOMBO G., 64.

**Commemorazioni.** — Commemorazione del Socio Nazionale Guido Vernoni. ALOISI M., 114.

— Commemorazione del Socio Nazionale Pietro Rondoni. CALIFANO L., 777.

— Commemorazione del Socio Nazionale Federico Sacco. GORTANI M., 226.

— Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Gola. NEGRI G., 680.

— Commemorazione del Socio Nazionale Dante De Blasi. PUNTONI V., 675.

**Comunicazioni varie,** 121, 232, 377, 558, 801.

**Congressi,** 378, 701, 803.

## E

**Ecologia.** — « Influenze cosmiche » e suicidio. (Sugli effetti di poco note condizioni ambientali sull'attività nervosa superiore). MESSERI E., 360.

**Econometrica.** — Sulla dinamica economica. CHERUBINO S., 281.

**Enzimologia.** — L'anello tiazolico della cocarbossilasi identificato quale gruppo attivo cocarboligastico. ANTONIANI C. e LANZANI G. A., 516.

## F

**Fisica.** — Può l'unità « roentgen » venire estesa all'intervallo di energie (0,010 ÷ ÷ 100) MeV? DEMICHELIS F., 610.

— Spettroscopia nucleare dei nuclidi della famiglia del torio con il metodo delle coincidenze discriminate. DEMICHELIS F. e CHINAGLIA B., 613.

— Sull'approssimazione « ritardo infinito » nello studio del transitorio di un reattore nucleare. FARINELLI U., 606.

— Comportamento anomalo della sezione d'urto per neutroni veloci nella fotodisintegrazione del Cr, As, I, Ta. FERRERI F., MALVANO R. e TRIBUNO C.

— Sull'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale. MAJORANA Q., 392.

— Ipotetiche conseguenze dell'assorbimento gravitazionale. MAJORANA Q., 397.

— Contatore elettronico algebrico di frange d'interferenza. RUFFINO G., 602.

**Fisica matematica.** — Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magnetoidrodinamica. CARINI G., 38.

— Osservazioni sulle onde cilindriche della magnetoidrodinamica. CARINI G., 482.

— Sul campo elettromagnetico di un dipolo immerso in un mezzo non omogeneo. FERRARI I., 172.

— Intorno alla propagazione di onde elettromagnetiche nei superconduttori e ai teoremi di reciprocità del campo elettromagnetico. LAMPARIELLO G., 302.

— Le oscillazioni di un plasma sulla base del principio einsteiniano dell'impulso. LAMPARIELLO G., 477.

**Fisiologia.** — Modificazioni dell'attività di singole unità nel nucleo del tetto per stimolazioni della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva. ARDUINI A. e POMPEIANO O., 98.

— Un nuovo metodo di esplorazione delle funzioni laringee: la fotoelettrolaringografia. CERQUIGLINI S., 352.

— Analisi elettroencefalografica dell'effetto Rossi ottenuto in cani predisposti e non predisposti alla epilessia riflessa. COTTI E., CREPAX P. e SILVESTRINI B., 103.

— Caratteri dell'attività elettrica unitaria dei neuroni corticocerebellari. CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., 540.

— Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di

impulsi tattili e propriocettivi ovvero di variazioni del livello pressorio. CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., 649.

- Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di stimoli chimici. CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., 748.
- Effetti della streptomycin e della diidro-streptomycin sul consumo di  $O_2$  da parte di omogenati di cervello di ratto. D'ARCANGELO P., 654.
- Resistenza alle alte accelerazioni di animali immersi in acqua. MARGARIA R., GUALTIEROTTI T. e SPINELLI D., 703.
- Analisi degli effetti della stimolazione elettrica del nucleo rosso nel Gatto decerebrato. POMPEIANO O., 100.

**Fisiologia vegetale.** — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XX. Effetto dell'acido ascorbico e dell'acido deidroascorbico sull'attività fosfoglucomutase. ARRIGONI O., 77.

- Reazioni metaboliche all'auxina. — II. Effetto di concentrazioni sopraottimali di auxina sui sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico, e sul metabolismo energetico in segmenti di internodio di pisello. MARRÈ E., ARRIGONI O. e FORTI G., 85.
- Interazione tra glutatione e auxina nello stimolo della crescita. MARRÈ E. e ARRIGONI O., 641.
- Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. — II. Sulla termoresistenza «in vitro» del sistema citocromo riduttasico di *Cianoficee* termali. MARRÈ E. e SERVETTAZ O., 91.
- Sul meccanismo dell'azione attivante della florigina sulla fotosintesi e sulla reazione di Hill. MARRÈ E. e SERVETTAZ O., 328.

## G

**Genetica.** — Velocità di sviluppo e ritmicità di sfarfallamento in «*Drosophila melanogaster*». NICOLETTI B. e SOLIMA A., 71.

**Geodesia.** — Su una proprietà dell'errore medio di una funzione di quantità compensate. INGHILLERI G., 598.

**Geofisica.** — Il gradiente del campo gravitazionale. NORINELLI A., 470.

**Geologia.** — Sull'esistenza, nei dintorni del Piccolo S. Bernardo, di un elemento tettonico riferibile al ricoprimento del Pas du Roc. ELTER G. e ELTER P., 181.

**Geometria.** — Sulle geodetiche di una  $V_n$  relative a una connessione affine. GASPARI CATTANEO I., 146.

- Alcune trasformazioni parallele di varietà algebriche  $\{H, K\}$  di Del Pezzo-Segre. KATSURADA Y., 719.
- I gruppi di omologia della varietà delle secanti di una curva algebrica iperspaziale. LASCU A. T., 716.
- Variétés riemannniennes multilocales. ONICSCU O., 154.
- Sui piani desarguesiani affini «non ciclici». ROSATI L. A., 443.

## I

**Istologia.** — Grandezza dei neuroni piramidali della corteccia cerebrale in alcune specie di Mammiferi di differente mole somatica. BARASA A., 347.

## M

**Matematica.** — Sulle curve a flessione costante. CALAPSO M. T., 438.

- Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse. FICHERA G., 706.
- Dilatazioni di varietà differenziabili. SEGRE B., 249.
- Fibrizioni differenziabili di un  $n$ -sfera mediante  $k$ -sfere equatoriali. SEGRE B., 383.

**Meccanica.** — Sul flusso secondario nello strato limite tridimensionale. BERTOTTI B., 455.

- Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili. Nota I. COLONNETTI G., 3.
- Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili. Nota II. COLONNETTI G., 130.
- Espressioni delle proiezioni su un retta del peso elastico assiale di un'asta. LATANZI F., 449.

**Meccanica razionale.** — Sopra un notevole fenomeno nel campo delle vibrazioni non lineari di combinazione. COLOMBO G., 726

**Meccanica razionale.** — Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla.

GRIOLI G., 459.

— Sulle basi della termomeccanica. Nota I. TRUESDELL C., 33.

— Sulle basi della termomeccanica. Nota II. TRUESDELL C., 158.

**Microbiologia.** — Sulla metodologia di studio della parete cellulare dei batteri. BOSCO G., 547.

— Studio quantitativo dell'adattamento di *Micrococcus pyogenes* e *Proteus vulgaris* alla novobiocina in coltura continua. GRAZIOSI F., 369.

**Mineralogia.** — Un nuovo minerale fra i prodotti boriferi di Larderello. CIPRIANI C., 519.

— Contributo alla geochimica dell'europio. FENOGLIO M. e RIGAULT G., 420.

— Bonattite: un nuovo minerale di alterazione del giacimento elbano di Capo Calamita. GARAVELLI C. L., 318.

— Metodo di determinazione del calcio e del magnesio nelle rocce mediante diffrattometro a raggi X. MAZZI F., 739.

## O

**Opere pervenute in dono all'Accademia,** — 123, 234, 381, 572, 702, 804.

## P

**Patologia.** — Inquadramento e nosologia di una nuova situazione morbosa: la reticolosi linfoide disprotidemica o Malattia di Waldenström. ASCENZI A. e DI GUGLIELMO R., 205.

— Su la polmonite da « *Pneumocystis carinii* ». BIGNAMI A. e JOPPOLO C., 659.

— Dimostrazione di sinapsi in un ganglioneuroma periferico. BIGNAMI A. e MARCIAFAVA P., 661.

**Personale accademico,** 118, 232, 377, 557, 700, 801.

**Plasticità.** — Soluzioni ad un parametro del problema plastico della deformazione piana. STORCHI E., 286.

— Soluzioni ad un parametro del problema plastico degli sforzi piani. STORCHI E., 593.

**Plichi suggellati,** 118, 378, 700.

**Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei,** 564.

**Presentazione di libri,** 120, 233, 379, 563, 700, 801.

**Presentazione di Note e Memorie,** 122, 233, 379, 558, 701, 803.

## R

**Relazioni di Commissioni,** 803.

## S

**Stastica matematica.** — L'equazione canonica della funzione logistica. Nota I. AMOROSO L., 125.

— L'equazione canonica della funzione logistica. Nota II. AMOROSO L., 237.

## T

**Temi di discussione,** 803.

**Teoria delle funzioni.** — Sur certaines classes de fonctions continues à deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota II. MARCUS S., 140.

## Z

**Zoologia.** — Il corpo cromatoide e l'eteroga metia in Potamon fluviatile (Crustacea Decapoda). BAFFONI G. M., 200.

— La cromatina sessuale in elementi somatici di un Crostaceo decapode. BAFFONI G. M., 533.

— Studio delle dipeptidasi e proteinasi nello sviluppo di « *Artemia salina* », Leach. BELLINI L., 340.

— *Angiostrongylus chabaudi* n. sp. parassita del cuore e dei vasi polmonari del gatto selvatico (*Felis silvestris*). BIOCCE E., 526.

— Su un nuovo genere (*Angulocirrus* gen. nov.) e su due nuove specie di tricostrongilidi (*Angulocirrus orycteropi* sp. nov., *Angulocirrus minor* sp. nov.) parassiti di mammiferi africani. BIOCCE E. e LE ROUX P., 57.

— Su una nuova specie del genere *Uncinaria* e su due nuove specie del genere *Ancylostoma*. LE ROUX P. e BIOCCE E., 192.

— Sopra alcuni esemplari femmine di *Ancylostoma* riportabile ad « *A. iperodontatum* » parassita di « *Caracal nobilis* » LIPPARONI E., 539.



## INDICI DEI FASCICOLI

## FASCICOLO 1.

GENNAIO 1957.

## NOTE DI SOCI

COLONNETTI G., Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili. Nota I . . . .	Pag.	3
NOBILE V., Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota III . . . . .	»	6
NATTA G., CORRADINI P. e CESARI M., Determinazione quantitativa della cristallinità del polipropilene (pres. dal Socio <i>G. Natta</i> ) . . . . .	»	11
ROSSI-FANELLI A., CAVALLINI D. e DE MARCO C., Ricerche sulla mioglobina fetale (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi-Fanelli</i> ) . . . . .	»	18

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

APARO E., Sulle equazioni algebriche matriciali (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . .	»	20
MARCUS S., Sur certaines classes de fonctions continues de deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	»	24
HALANAY A., Solutions périodiques des systèmes non linéaires à petit paramètre (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	»	30
TRUESDELL C., Sulle basi della termomeccanica. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> )	»	33
CARINI G., Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	»	38
CHIORBOLI P. e TEDESCHI E., Spettro Raman del cobalticianuro di potassio in soluzione acquosa e allo stato cristallino (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . .	»	44
DANUSO F. e PAJARO G., Analisi di $^{14}\text{C}$ in etilene o polietilene marcati (pres. dal Socio <i>G. Natta</i> ) . . . . .	»	48
CASNATI G., Sulla rigenerazione dei composti carbonilici dai loro dinitro-fenilidrazoni (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i> ) . . . . .	»	54
BIOCCA E. e LE ROUX P., Su un nuovo genere ( <i>Angulocirrus</i> gen. nov.) e su due nuove specie di tricostrongilidi ( <i>Angulocirrus orycteropi</i> sp. nov., <i>Angulocirrus minor</i> sp. nov.) parassiti di mammiferi africani (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ). . .	»	57
COLOMBO G., Sulla struttura e funzione della cromatura delle cellule nutrici e degli oociti nella oogenesi del baco da seta (« <i>Bombyx mori</i> L. », Lepidoptera). (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i> ) . . . . .	»	64
NICOLETTI B. e SOLIMA A., Velocità di sviluppo e ritmicità di sfarfallamento in « <i>Drosophila melanogaster</i> » (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	»	71
ARRIGONI O., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XX. Effetto dell'acido ascorbico e dell'acido deidroascorbico sull'attività fosfoglucomutase (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	»	77

MARRÈ E., ARRIGONI O. e FORTI G., Reazioni metaboliche all'auxina. — II. Effetto di concentrazioni sopraottimali di auxina sui sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico, e sul metabolismo energetico in segmenti di internodio di pisello (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	Pag. 85
MARRÈ E. e SERVETTAZ O., Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. — II. Sulla termoresistenza « in vitro » del sistema citocromo riduttasico di Cianoficee termali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	» 91
ARDUINI A. e POMPEIANO O., Modificazioni dell'attività di singole unità nel nucleo del tetto per stimolazioni della corteccia cerebellare e della periferia sensitiva (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	» 98
POMPEIANO O., Analisi degli effetti della stimolazione elettrica del nucleo rosso nel Gatto decerebrato (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	» 100
COTTI E., CREPAX P. e SILVESTRINI B., Analisi elettroencefalografica dell'effetto Rossi ottenuto in Cani predisposti e non predisposti alla epilessia riflessa (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	» 103
BAFFONI G. M. e ELIA E., L'attività mitotica durante la morfogenesi cerebellare in un Anfibio anuro (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 109

## COMMEMORAZIONI

ALOISI M., Commemorazione del Socio Guido Vernoni . . . . .	» 114
Personale accademico . . . . .	» 118
Plichi suggellati . . . . .	» 118
Presentazione di libri . . . . .	» 120
Comunicazioni varie . . . . .	» 121
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	» 122
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 gennaio 1957 . . . . .	» 123

## FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1957.

## NOTE DI SOCI

AMOROSO L., L'equazione canonica della funzione logistica. Nota I . . . . .	» 125
COLONNETTI G., Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili. Nota II . . . . .	» 130
ROSSI-FANELLI A. e ANTONINI E., Ricerche sui pigmenti respiratori dei molluschi. Nota I. Isolamento e cristallizzazione di un nuovo pigmento dai muscoli della <i>Aplysia depilans</i> e dell' <i>Aplysia limacina</i> (pres. dal Corresp. <i>A. Rossi-Fanelli</i> ) . . . . .	» 133

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

DINCULEANU N., Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 135
MARCUS S., Sur certaines classes de fonctions continues à deux variables réelles et leurs ensembles de niveau. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 140
GASPARINI CATTANEO I., Sulle geodetiche di una $V_n$ relative a una connessione affine (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .	» 146

ONICESCU O., Variétés riemanniennes multilocales (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i> )	Pag. 154
TRUESDELL C., Sulle basi della termomeccanica. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> )	» 158
TODESCHINI B., Sulle correnti piane poco rotazionali (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> )	» 167
FERRARI I., Sul campo elettromagnetico di un dipolo, immerso in un mezzo non omogeneo (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i> )	» 172
SIMONETTA M. e CARRÀ S., Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina. - Parte I: velocità di bensoilazione delle cloronaftilammine (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> )	» 176
ELTER G. e ELTER P., Sull'esistenza, nei dintorni del Piccolo S. Bernardo, di un elemento tettonico riferibile al ricoprimento del Pas du Roc (pres. dal Socio <i>GB. Dal Piaz</i> )	» 181
BATTAGLIA E., La sostituzione dell'idrolisi a caldo con l'idrolisi a temperatura ambiente («idrolisi fredda») nel metodo Feulgen (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> )	» 188
LE ROUX P. e BIOCCA E., Su una nuova specie del genere <i>Uncinaria</i> e su due nuove specie del genere <i>Ancylostoma</i> (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> )	» 192
BAFFONI G. M., Il corpo cromatoide e l'eterogametia in <i>Potamon fluviatile</i> (Crustacea Decapoda) (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> )	» 200
ASCENZI A. e DI GUGLIELMO R., Inquadramento e nosologia di una nuova situazione morbosa: la reticolosi linfoide disprotidemoca o Malattia di Waldenström (pres. dal Corrisp. <i>G. Bompiani</i> )	» 205
MELETTI P., Risultati di un trapianto di embrioni fra cariossidi di due razze culturali di grano (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i> )	» 209
CARRANO F., Effetti del $\gamma$ -dinitrofenolo sulle uova di « <i>Aplysia limacina</i> » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> )	» 216
MARIANI B. M., Osservazioni sulle cellule nervose motorie del midollo spinale di Anfibi urodeli in seguito all'amputazione dell'arto (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> )	» 220

### COMMEMORAZIONI

GORTANI M., Commemorazione del Socio Nazionale Federico Sacco	» 226
Comunicazioni varie	» 232
Personale accademico	» 232
Presentazione di libri	» 233
Presentazione di Note e Memorie	» 233
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 febbraio 1957	» 234

### FASCICOLO 3.

MARZO 1957.

### NOTE DI SOCI

AMOROSO L., L'equazione canonica della funzione logistica. Nota II	» 237
PICONE M., Riduzione dimensionale del problema dell'integrazione, in grande, dei sistemi di equazioni ai differenziali totali	» 242
SEGRE B., Dilatazioni di varietà differenziabili	» 249
SILVA G., Sulla determinazione degli errori di lettura di una livella dovuti a imperfezioni della costruzione	» 257

- CAGLIOTI V., SARTORI G. e SCROCCO M., Ricerche di spettrofotometria I.R. su alcuni complessi cianidrici del ferro (II e III), del cromo (III) e del manganese (I, II e III) (pres. dal Corrisp. V. Caglioti) . . . . . Pag. 266

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

- DINCULEANU N., Espaces d'Orlicz de champs de vecteurs. Fonctionnelles linéaires continues. Nota II (pres. dal Socio M. Picone) . . . . . » 269
- GHIZZETTI A., Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali Nota I (pres. dal Socio M. Picone) . . . . . » 276
- CHERUBINO S., Sulla dinamica economica (pres. dal Socio B. Segre) . . . . . » 281
- STORCHI E., Soluzioni ad un parametro del problema plastico della deformazione piana (pres. dal Corrisp. B. Finzi) . . . . . » 286
- FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione centro-lembo del Sole del tripletto verde del Magnesio:  $\lambda$  5167,3- $\lambda$  5172,7- $\lambda$  5183,6 (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . . » 294
- GIANNUZZI M. A., Un nuovo metodo per la determinazione dell'orbita fotometrica delle stelle variabili ad eclisse. Nota II (pres. dal Socio G. Armellini) . . . . . » 298
- LAMPARIELLO G., Intorno alla propagazione di onde elettromagnetiche nei superconduttori e ai teoremi di reciprocità del campo elettromagnetico (pres. dal Socio A. Signorini) . . . . . » 302
- SCROCCO M. e NICOLAUS R., Costanti di ionizzazione acida e comportamento spettrofotometrico nell'I.R. e nell'U.V. di acidi c-metil-pirrolici (pres. dal Corrisp. V. Caglioti) . . . . . » 311
- GARAVELLI C. L., Bonattite: un nuovo minerale di alterazione del giacimento elbano di Capo Calamita (pres. dal Socio G. Carobbi) . . . . . » 318
- MARRÈ E. e SERVETTAZ O., Sul meccanismo dell'azione attivante della florizina sulla fotosintesi e sulla reazione di Hill (pres. dal Socio S. Tonzig) . . . . . » 328
- BATTAGLIA E., Metodo Feulgen in Ematologia: un procedimento semplificato (idrolisi a temperatura ambiente) e rapido (30 minuti) (pres. dal Socio A. Chiarugi) . . . . . » 337
- BELLINI L., Studio delle dipeptidasi e proteinasi nello sviluppo di « Artemia salina » Leach (pres. dal Socio G. Cotronei) . . . . . » 340
- BARASA A., Grandezza dei neuroni piramidali della corteccia cerebrale in alcune specie di Mammiferi di differente mole somatica (pres. dal Socio G. Levi) . . . . . » 347
- CERQUIGLINI S., Un nuovo metodo di esplorazione delle funzioni laringee: la fotoelettrolaringografia (pres. dal Corrisp. G. Amantea) . . . . . » 352
- MESSERI E., « Influenze cosmiche » e suicidio. (Sugli effetti di poco note condizioni ambientali sull'attività nervosa superiore) (pres. dal Socio A. Chiarugi) . . . . . » 360
- GRAZIOSI F., Studio quantitativo dell'adattamento di Micrococcus pyogenes e Proteus vulgaris alla novobiocina in coltura continua (pres. dal Socio V. Puntoni) . . . . . » 369
- PENSO G. e VICARI G., Ricerche sulla titolazione di tossine e antitossine per mezzo delle colture di tessuti « in vitro ». Nota preliminare (pres. dal Corrisp. D. Marotta) . . . . . » 375
- BIOCCA E., Il contributo dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma alla conoscenza dell'ospite intermedio e del ciclo di vita degli schistosomi dei mammiferi (Schistosoma haematobium e Schistosoma bovis) in Somalia. Rilievi alla Nota di Enzo Sobrero su Bulinus abyssinicus (pres. dal Socio V. Puntoni) . . . . . » 376
- Comunicazioni varie . . . . . » 377
- Personale accademico . . . . . » 377
- Congressi . . . . . » 378
- Plichi suggellati . . . . . » 379
- Presentazione di libri . . . . . » 379
- Presentazione di Note e Memorie . . . . . » 379
- Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 marzo 1957 . . . . . » 380



## FASCICOLO 4.

APRILE 1957.

## NOTE DI SOCI

SEGRE B., Fibrazioni differenziabili di un $r$ -sfera mediante $k$ -sfere equatoriali .	Pag. 383
MAJORANA Q., Sull'ipotesi dell'assorbimento gravitazionale . . . . .	» 392
MAJORANA Q., Ipotetiche conseguenze dell'assorbimento gravitazionale . . . . .	» 397
BONINO G. B. e FABBRI G., Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del cupro-tetracianuro di potassio in soluzione acquosa ed allo stato cristallino (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .	» 402
QUILICO A., CARDANI C. e PIOZZI F., Sulla struttura dell'echinulina (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i> ) . . . . .	» 411
GIACOMELLO G., LIQUORI A. M. e RIPAMONTI A., Struttura cristallina dell'1-5-naftiridina (pres. dal Corrisp. <i>G. Giacomello</i> ) . . . . .	» 418
FENOGLIO M. e RIGAULT G., Contributo alla geochimica dell'europio (pres. dal Corrisp. <i>M. Fenoglio</i> ) . . . . .	» 420

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

GHIZZETTI A., Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 430
FAEDO S., Un principio di esistenza nell'analisi lineare e sua applicazione alla dualità di alcune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 434
CALAPSO M. T., Sulle curve a flessione costante (pres. dal Socio <i>B. Segre</i> ) . . . . .	» 438
ROSATI L. A., Sui piani desarguesiani affini « non ciclici » (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	» 443
LATTANZI F., Espressioni delle proiezioni su un retta del peso elastico assiale di un'asta (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	» 449
BERTOTTI B., Sul flusso secondario nello strato limite tridimensionale (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	» 455
GRIOLI G., Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla (pres. dal Corrisp. <i>A. Tonolo</i> ) . . . . .	» 459
GIANNUZZI M. A., La moderna colorimetria delle stelle binarie ed il nuovo fotometro colorimetrico dell'Osservatorio Astronomico di Monte Mario. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i> ) . . . . .	» 464
NORINELLI A., Il gradiente del campo gravitazionale (pres. dal Socio <i>G. Silva</i> ) . . . . .	» 470
LAMPARIELLO G., Le oscillazioni di un plasma sulla base del principio einsteiniano dell'impulso (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .	» 477
CARINI G., Osservazioni sulle onde cilindriche della magneto-idrodinamica (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i> ) . . . . .	» 482
FABBRI G., Sullo spettro ultrarosso del cobalticianuro di potassio cristallino alla temperatura dell'azoto liquido (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .	» 488
DEL RE G., Sulla struttura elettronica dell'ossido di benzonitrile (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i> ) . . . . .	» 491
SCROCCO M. e NICOLAUS R., Ricerche spettrofotometriche I. R. ed U. V. su una serie di esteri pirrolici (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i> ) . . . . .	» 500

CORRADINI P., Sulla struttura cristallina del trimero della esaidrobenzaldeide (pres. dal Socio <i>G. Natta</i> ) . . . . .	Pag. 504
CACACE F., GIULIANO R. e INAM-UL-HAQ, L'acido benzimidazol-N-acetico e la sua azione auxinica (pres. dal Corrisp. <i>G. Giacomello</i> ) . . . . .	» 510
GHIRINGHELLI R. e CARINI S., Riduzione « in vitro » della colesterina ad opera di « <i>Escherichia coli</i> » (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	» 514
ANTONIANI C. e LANZANI G. A., L'anello tiazolico della cocarbossilasi identificato quale gruppo attivo cocarboligasico (pres. dal Socio <i>F. Giordani</i> ) . . . . .	» 516
CIPRIANI C., Un nuovo minerale fra i prodotti boriferi di Larderello (pres. dal Socio <i>G. Carobbi</i> ) . . . . .	» 519
BIOCCA E., <i>Angiostrongylus chabaudi</i> n. sp., parassita del cuore e dei vasi polmonari del gatto selvatico ( <i>Felis silvestris</i> ) (pres. dal Socio <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .	» 526
BAFFONI G. M., La cromatina sessuale in elementi somatici di un Crostaceo decapode (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i> ) . . . . .	» 533
LIPPARONI E., Sopra alcuni esemplari femmine di anchilostoma riportabile ad « <i>A. iperodontatum</i> » parassita di « <i>Caracal nobicus</i> » (pres. dal Socio <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .	» 539
CREPAX P., NIGRO A. e PARMERGIANI L., Caratteri dell'attività elettrica unitaria dei neuroni corticocerebellari (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	» 540
BOSCO G., Sulla metodologia di studio della parete cellulare dei batteri (pres. dal Socio <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .	» 547
SOBRERO E., <i>Bulinus</i> ( <i>Physopsis</i> ) <i>abyssinicus</i> , ospite intermedio di <i>Schistosoma haematobium</i> in Somalia. Ricostruzione del ciclo di vita del parassita (pres. dal Socio <i>V. Puntoni</i> ) . . . . .	» 553
PENSO G. e VICARI G., Sull'azione citopatogena della tossina difterica, studiata per mezzo delle colture di tessuti « in vitro » (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> ) . . . . .	» 555
Personale accademico . . . . .	» 557
Comunicazioni varie . . . . .	» 558
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	» 558
Presentazione di libri . . . . .	» 563
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei . . . . .	» 564
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 13 aprile 1957 . . . . .	» 572

## FASCICOLO 5.

MAGGIO 1957.

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

HAIMOVICI A., Una generalizzazione del metodo di Fourier per la risoluzione di alcuni problemi ai limiti (pres. dal Socio <i>M. Picone</i> ) . . . . .	» 573
MERLI L., Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})$ (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	» 580
BAIADA E., La variazione totale, la lunghezza d'una curva e l'integrale del calcolo delle variazioni in una variabile (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	» 584
CONTI R., Sistemi differenziali asintoticamente equivalenti (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i> ) . . . . .	» 588
STORCHI E., Soluzioni ad un parametro del problema plastico degli sforzi piani (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i> ) . . . . .	» 593
INGHILLERI G., Su una proprietà dell'errore medio di una funzione di quantità compensate (pres. dal Corrisp. <i>L. Solaini</i> ) . . . . .	» 598



RUFFINO G., Contatore elettronico algebrico di frange d'interferenza (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i> ) . . . . .	»	602
FARINELLI U., Sull'approssimazione « ritardo infinito » nello studio del transitorio di un reattore nucleare (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i> ). . . . .	»	606
DEMICHIELIS F., Può l'unità « roentgen » venire estesa all'intervallo di energie (0,10 ÷ 100) MeV (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i> ) . . . . .	»	610
DEMICHIELIS F. CHINAGLIA B., Spettrografia nucleare dei nuclidi della famiglia del torio con il metodo delle coincidenze discriminate (pres. dal Socio <i>E. Perucca</i> ) . . . . .	»	613
CORRADINI P., Sulla struttura cristallina del succinilsuccinato di metile (pres. dal Socio <i>G. Natta</i> ) . . . . .	»	615
ROMEO A e SCHIMBERNI A. M., Sull'addizione di ammino-esteri al 2-benziliden-4-metil-5-ossazolone (pres. dal Socio <i>G. Bargellini</i> ) . . . . .	»	620
GIULIANO R. e STEIN M. L., Composti solfonammidici a nucleo dell'indolo. - il 5-solfonammido-triptofano. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Giacomello</i> ) . . . . .	»	626
PIOZZI F., Sulla sintesi isatinica di Sandmeyer, Nota III (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i> ) . . . . .	»	629
BACCHETTI T. e ALEMAGNA A., Decomposizione termica di 1-2-4-osodiazoloni-5. Una nuova sintesi di benzimidazoli (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i> ) . . . . .	»	637
MARRÈ E. e ARRIGONI O., Interazione tra glutatione e auxina nello stimolo della crescita (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i> ) . . . . .	»	641
CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di impulsi tattili e propriocettivi ovvero di variazioni del livello pressorio (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i> ) . . . . .	»	649
D'ARCANGELO P., Effetti della streptomycin e della diidrostreptomycin sul consumo di O <sub>2</sub> da parte di omogenati di cervello di ratto (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i> ) . . . . .	»	654
BIGNAMI A. e JOPPOLO C., Su la polmonite da « <i>Pneumocystis carinii</i> » (pres. dal Corrisp. <i>G. Bompiani</i> ) . . . . .	»	659
BIGNAMI A. e MARCHIAFAVA P., Dimostrazione di sinapsi in un ganglioneuroma periferico (pres. dal Corrisp. <i>G. Bompiani</i> ) . . . . .	»	661
CORSI A. e GALLUCCI V., Osservazioni sulla composizione proteica delle miofibrille cardiache (pres. dal Corrisp. <i>M. Aloisi</i> ) . . . . .	»	664
GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., Contenuto di flavine e sensibilità al cianuro e all'ossido di carbonio dei tessuti di « <i>Octopus vulgaris</i> » (Lam.) (pres. dal Corrisp. <i>G. Montalenti</i> ) . . . . .	»	667
PENSO G. e VICARI G., Sull'azione citopatogena della tossina stafilococcica, studiata per mezzo delle colture di tessuti in « vitro » (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i> ) . . . . .	»	673

#### COMMEMORAZIONI

PUNTONI V., Commemorazione del Socio Nazionale Dante De Blasi . . . . .	»	675
NEGRI G. Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Gola . . . . .	»	680
Personale accademico . . . . .	»	700
Plichi suggellati . . . . .	»	700
Presentazione di libri . . . . .	»	700
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	»	701
Congressi . . . . .	»	701
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 maggio 1957 . . . . .	»	702

## FASCICOLO 6.

GIUGNO 1957.

## NOTE DI SOCI

- MARGARIA R., GUALTIEROTTI T. e SPINELLI D., Resistenza alle alte accelerazioni di animali immersi in acqua (pres. dal Socio *R. Margaria*). . . . . Pag. 703

## NOTE PRESENTATE DA SOCI

- FICHERA G., Caratterizzazione della traccia, sulla frontiera di un campo, di una funzione analitica di più variabili complesse (pres. dal Socio *F. Severi*). » 706
- LASCU A. T., I gruppi di omologia della varietà delle secanti di una curva algebrica iperspaziale (pres. dal Socio *B. Segre*). . . . . » 716
- KATSURADA Y., Alcune trasformazioni parallele di varietà algebriche  $\{H, K\}$  di Del Pezzo-Segre (pres. dal Socio *B. Segre*). . . . . » 719
- CÓLOMBO G., Sopra un notevole fenomeno nel campo delle vibrazioni non lineari di combinazione (pres. dal Corrisp. *D. Graffi*). . . . . » 726
- FERRERO F., MALVANO R. e TRIBUNO C., Comportamento anomalo della sezione d'urto per neutroni veloci nella fotodisintegrazione del Cr, As, I, Ta (pres. Socio *G. Colonnetti*). . . . . » 730
- ROMEO A. e VILLOTTI R., Su di un metodo per purificare i 3- $\beta$ -idrossi- $\Delta^5$ -steroidi (pres. dal Socio *G. Bargellini*). . . . . » 733
- MAZZI F., Metodo di determinazione del calcio e del magnesio nelle rocce mediante il diffrattometro a raggi X (pres. dal Socio *G. Carobbi*). . . . . » 739
- CREPAX P., NIGRO A. e PARMEGGIANI P. L., Modificazioni dell'attività unitaria dei neuroni corticocerebellari per effetto di stimoli chimici (pres. dal Socio *G. C. Pupilli*). . . . . » 748
- GHIRETTI-MAGALDI A., GIUDITTA A. e GHIRETTI F., I citocromi dei Cefalopodi (pres. dal Corrisp. *G. Montalenti*). . . . . » 753
- CORSI A., Osservazioni sulla tropomiosina del muscolo scheletrico umano (pres. dal Corrisp. *M. Aloisi*). . . . . » 761
- AZZONE G. F., CARAFOLI E. e BARBOLINI G., Il glutatione nel fegato e nei muscoli di coniglio in avitaminosi E (pres. dal Corrisp. *M. Aloisi*). . . . . » 763
- PERRI T., La genesi delle intumescenze del midollo spinale negli Anfibii anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di abbozzi di arti (pres. dal Socio *G. Cotronei*). . . . . » 767
- PENSO G. e VICARI G., Frazione citotossica non emolitica nella O-streptolisina, messa in evidenza per mezzo delle culture di tessuti « in vitro » (pres. dal Corrisp. *D. Marotta*). . . . . » 772
- STEFANELLI A., Ricerche sul movimento degli spermatozoi di Anfibii in condizioni sperimentali e con l'ausilio della cinematografia (pres. dal Socio *G. Cotronei*). » 772

## COMMEMORAZIONI

- CALIFANO L., Commemorazione del Socio Nazionale Pietro Rondoni . . . . . » 777
- Personale accademico . . . . . » 801
- Comunicazioni varie . . . . . » 801



Presentazione di libri . . . . .	Pag.	801
Presentazione di Note e Memorie . . . . .	»	803
Relazioni di Commissioni . . . . .	»	803
Congressi . . . . .	»	803
Temi di discussione . . . . .	»	803
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 6 giugno 1957	»	804
Indice per Autori . . . . .	»	807
Indice per materie . . . . .	»	813
Indice dei fascicoli . . . . .	»	818